Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kuželosečky jako grafy funkcí – sbírka řešených úloh

Conics as graphs of functions – collection of solved problems

Aneta Ajksnerová

Vedoucí práce:	JUDr. Mgr. Filip Beran
Studijní program:	Dějepis se zaměřením na vzdělávání se sdruženým studiem Matematika se zaměřením na vzdělávání

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Kuželosečky jako grafy funkcí – sbírka řešených úloh potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Prohlašuji, že jsem při její tvorbě nepoužila nástrojů umělé inteligence jiným způsobem, než je uvedeno ve vyjádření, které je součástí textu práce. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 2. 12. 2024

Tímto bych chtěla poděkovat JUDr. Mgr. Filipu Beranovi za ochotu a cenné rady, které mi při vedení této práce poskytl, a především za veškerý čas, který do konzultací práce investoval. Také bych ráda poděkovala své mamince a svým prarodičům za jejich velkou podporu během mého celého studia.

ABSTRAKT

Tato práce se věnuje kuželosečkám a pohlíží na ně jako na grafy funkcí. Jejím cílem je poukázat na možnost zadání kuželosečky funkčním předpisem a představit souvislosti a rozdíly, které tento druh zadání v porovnáním s běžným analytickým popisem přináší, a to především skrze sbírku řešených úloh věnující se vyšetření průběhu funkcí. Práce je členěna do tří kapitol. První kapitola shrnuje základní informace potřebné pro pochopení dané problematiky a je členěna do šesti částí: první připomíná klasické definice kuželoseček, druhá popisuje výskyt kuželoseček v učivu základních škol a gymnázií, třetí rozebírá převod obecné rovnice kuželosečky na funkční předpis a ukazuje, kdy lze kuželosečku popsat funkčním předpisem kompletně a kdy pouze její část. Čtvrtá a pátá část popisují obecně postupy, které jsou v dalších kapitolách použity při řešení úloh: jak vyšetřit průběh funkce a jak kuželosečku tvořící její graf popsat analyticky a zjistit její charakteristické prvky. Poslední šestá část první podkapitoly představuje výsledky řešených úloh: přehled grafů vyšetřených funkcí a jim odpovídajících kuželoseček. Poslední dvě kapitoly práce obsahují samotnou sbírku řešených i neřešených úloh: druhá kapitola se konkrétně věnuje funkcím, jejichž grafy tvoří kuželosečky v základní poloze, třetí kapitola funkcím, jejichž grafy tvoří kuželosečky v poloze obecné. Řešení každé úlohy se skládá ze dvou částí, a to vyšetření průběhu dané funkce a analytického popisu příslušné kuželosečky. Výsledný materiál tak přináší sbírku úloh, využitelnou především žáky či učiteli na gymnáziích, umožňující komplexnější vnímání tématu kuželoseček a sloužící k procvičení vyšetření průběhu funkcí. Sbírku úloh ovšem mohou využít i vyučující a studenti vysokých škol k propojení těchto na první pohled nesouvisejících témat.

KLÍČOVÁ SLOVA

kuželosečka, graf funkce, vyšetření průběhu funkce, limita, derivace

ABSTRACT

This thesis focuses on conic sections and approaches them as graphs of functions. Its aim is to highlight the possibility of defining conic sections using functional expressions and to present the connections and differences that this approach introduces compared to the standard analytical description, primarily through a collection of solved problems dedicated to examining the behavior of functions. The thesis is divided into three chapters. The first chapter summarizes the basic information necessary for understanding the topic and is divided into six parts: the first revisits the classical definitions of conic sections; the second describes the occurrence of conic sections in the curriculum of primary and secondary schools; the third discusses the transformation of the general equation of a conic section into a functional expression and demonstrates when a conic section can be fully described by a functional expression and when only a part of it can be represented. The fourth and fifth parts outline the general procedures used in solving the problems presented in subsequent chapters: how to analyze the behavior of a function and how to describe the conic section forming its graph analytically and determine its characteristic features. The last sixth part of the first chapter introduces the results of the solved problems: an overview of the graphs of the analyzed functions and their corresponding conic sections. The final two chapters of the thesis contain the collection of solved and unsolved problems: the second chapter specifically focuses on functions whose graphs form conic sections in their standard positions, while the third chapter deals with functions whose graphs form conic sections in general positions. The solution to each problem consists of two parts: an analysis of the behavior of the given function and an analytical description of the corresponding conic section. The resulting material provides a collection of problems primarily aimed at students or teachers at secondary schools, enabling a more comprehensive understanding of the topic of conic sections and serving as practice for analyzing the behavior of functions. However, the collection can also be utilized by university instructors and students to connect these seemingly unrelated topics.

KEYWORDS

conic section, graph of a function, investigation of behavior of a function, limit, derivative

Obsah

Úvod

Kuželosečky, coby jedny ze základních křivek v rovině, hrají významnou roli v mnoha oblastech matematiky, fyziky, chemie a dalších oborů. Byť to nemusí být na první pohled zřejmé, obklopují nás i v našem každodenním životě. Proto není nijak překvapivé, že se s nimi setkávají také žáci ve školách. Nejvíce pozornosti jim je věnováno na gymnáziích při výuce analytické geometrie, kde je kladen důraz především na práci s jejich charakteristickými vlastnostmi. Téma se probírá poměrně izolovaně, žákům poté mohou chybět souvislosti a látka se jim může zdát obtížnější na pochopení.

Kuželosečky přitom mohou být prezentovány mnoha dalšími způsoby, nejtypičtěji asi jako řezy rotační kuželové plochy nebo množiny bodů v rovině dané vlastnosti, mimo to však také např. jako grafy funkcí. Cílem této práce je představit čtenáři poslední zmíněný pohled na danou problematiku skrze sbírku řešených i neřešených úloh zaměřených na vyšetření průběhu funkcí, jejichž grafy tvoří právě kuželosečky, případně jejich části, a současně také vedle této jejich reprezentace položit známý a běžně užívaný popis analytický umožňující hlubší pochopení případných souvislostí a rozdílů.

Materiál, který práce poskytne, je tak využitelný především pro žáky na gymnáziích a může pomoci k jejich komplexnějšímu pochopení problematiky kuželoseček, současně však mohou předložené úlohy sloužit také jako procvičení klasického vyšetření průběhu funkce. V práci je předpokládána čtenářova znalost analytické geometrie v rovině na středoškolské úrovni, a to včetně práce s kuželosečkami, podobně znalost funkcí na stejné úrovni, a to včetně porozumění postupu při vyšetření jejich průběhu.

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první z nich nalezneme základní informace potřebné k pochopení problematiky, kterou se tato práce zabývá. Kapitola je členěna do šesti částí. První slouží jako připomenutí klasických definic kuželoseček a ukazuje, jak se tyto křivky prolínají několika oblastmi matematiky. Druhá se věnuje kuželosečkám ve školské matematice a přibližuje, do jaké míry se s nimi žáci na různých stupních škol setkávají a s jakými jejich vlastnostmi nejtypičtěji pracují. Třetí část se věnuje kuželosečkám jako grafům funkcí. Představuje obecné odvození funkčního předpisu kuželosečky a přehled případů, kdy je kuželosečka funkčním předpisem vyjádřena kompletně a kdy je naopak grafem pouze její část. Čtvrtá část slouží jako připomenutí a shrnutí postupů využitých v příkladech, které práce dále obsahuje. Popisuje vyšetření průběhu funkce, který rozděluje do pěti bodů. Stejným způsobem je koncipovaná také část pátá, která ukazuje, jak z funkčního předpisu zjistit, o jakou kuželosečku se jedná a jak ji vhodně analyticky popsat. Aplikací postupů z kapitol 1.4 a 1.5 pak lze ukázat souvislosti a rozdíly v obou těchto reprezentacích. Poslední část obsahuje přehled všech grafů funkcí a jim odpovídajících kuželoseček, jejichž vyšetření se věnují další kapitoly.

Druhá a třetí kapitola tvoří již samotnou sbírkou úloh, ve kterých vždy vyšetříme průběh konkrétní funkce a následně kuželosečku tvořící její graf vyjádříme také analyticky. Každý příklad je samostatnou podkapitolou a je pojmenován podle tvaru či části dané kuželosečky. Zařazeny jsou základní podoby, na které lze narazit u jednotlivých typů kuželoseček – hyperboly, paraboly a elipsy. Objevují se také dva příklady věnující se speciálně rovnoosé hyperbole a kružnici, přičemž především kružnici budeme někdy vnímat z pohledu středoškolské matematiky jakožto samostatný typ kuželosečky. Ve druhé kapitole jsou zařazeny funkce, jejichž grafy tvoří kuželosečky v základní poloze, ve třetí potom kuželosečky v poloze obecné. Příklady jsou doplněny také o neřešené úlohy sloužící k dalšímu procvičení. Veškeré obrázky doplňující jednotlivé příklady jsou vytvořeny pomocí programu GeoGebra a jsou autorské. V některých příkladech je ve snaze o zachování přehlednosti zmenšena standardní velikost písma.

Odborných děl, věnujících se kuželosečkám, existuje velké množství; zde jsem si jako referenční zdroj zvolila detailní zahraniční publikaci (Glaeser et al., 2016). K tématu kuželoseček jako grafů funkcí jsem však nenarazila v tuzemské literatuře na žádnou obsáhlejší práci. Podobně středoškolské učebnice se ho dotýkají velmi okrajově: zpravidla připomínají pouze parabolu jako graf kvadratické funkce a hyperbolu jako graf lineární lomené funkce, ostatní případy jsou vynechány. Obdobně zmiňují toto téma i kvalifikační práce. V bakalářské práci (Křížová, 2015) se objevuje několik příkladů ukazujících souvislost mezi hyperbolou a lineární lomenou funkcí, podobně i v diplomové práci (Patloková, 2014). Práce (Stránská, 2024) pak propojení s funkcemi zmiňuje v jedné kapitole a zabývá např. tím, kdy tvoří graf funkce kuželosečka celá a kdy pouze její část. Porovnání syntetického a analytického pohledu literatura často zmiňuje, např. (Jandová, 2020) ilustruje tyto přístupy na řadě příkladů, i zde je však souvislost s funkcemi opomenuta.

1 Obecné vlastnosti a reprezentace kuželoseček

Tato úvodní kapitola poskytuje shrnutí informací potřebných pro pochopení problematiky, kterou se budeme zabývat, a to od připomenutí základních definic přes popsání jednotlivých použitých nástrojů po představení důležitých faktů z této oblasti. Jelikož je však u čtenáře předpokládána znalost klíčových pojmů a souvislostí z oblasti funkcí a teorie kuželoseček, uvedeme zde výběrem pouze některé ze základních definic, jelikož představení jejich kompletního výčtu není cílem této práce. Teoretický úvod k funkcím a vyšetření jejich průběhu by čtenář nalezl v (Odvárko, 2021) a (Hrubý & Kubát, 2014), ke kuželosečkám potom v (Boček & Kočandrle, 2020).

1.1 Klasické definice kuželoseček

Pro zavedení kuželoseček, ať už souhrnně či skrze jejich jednotlivé typy, existují definice, z nichž některé jsou za určitých podmínek vzájemně ekvivalentní. Ty si zde nyní stručně uveďme a poukažme na souvislosti mezi nimi. Konkrétním důkazům se však věnovat nebudeme, více se jimi zabývá např. (Stránská, 2024).

Kuželosečky jako řezy kuželové plochy

Kuželosečky jsou úzce spjaty s rotační kuželovou plochou a můžeme je dostat právě jako její řezy rovinou (nikoli jako řezy kužele ve smyslu tělesa). Rotační kuželovou plochu vždy vnímejme jako neomezenou svým vrcholem a také svou výškou, tzn. jako „dvojkuželovou nekonečnou plochu“. (Glaeser et al., 2016, s. 128)

Definice 1 (kuželosečky jako řezy kuželové plochy): Kuželosečka je křivka vznikající jako řez rotační kuželové plochy rovinou, která není vrcholová. (Lávička, 2005, s. 94)

Pozn.: Jako řez rotační kuželové plochy rovinou neprocházející jejím vrcholem dostáváme elipsu, parabolu a hyperbolu. Limitním případem rotační kuželové plochy je rotační válcová plocha, jejímž řezem může být také elipsa. Tyto kuželosečky nazýváme jako *regulární.* V případě, že rovina řezu prochází vrcholem rotační kuželové plochy, pro rotační válcovou plochu je potom rovnoběžná s její osou, dostáváme kuželosečky *singulární*, tzn. dvě různoběžky, dvě různé nebo totožné rovnoběžky, bod či prázdnou množinu. Nebude-li řečeno jinak, budeme se v práci věnovat kuželosečkám regulárním.

Kuželosečky jako množiny bodů dané vlastnosti

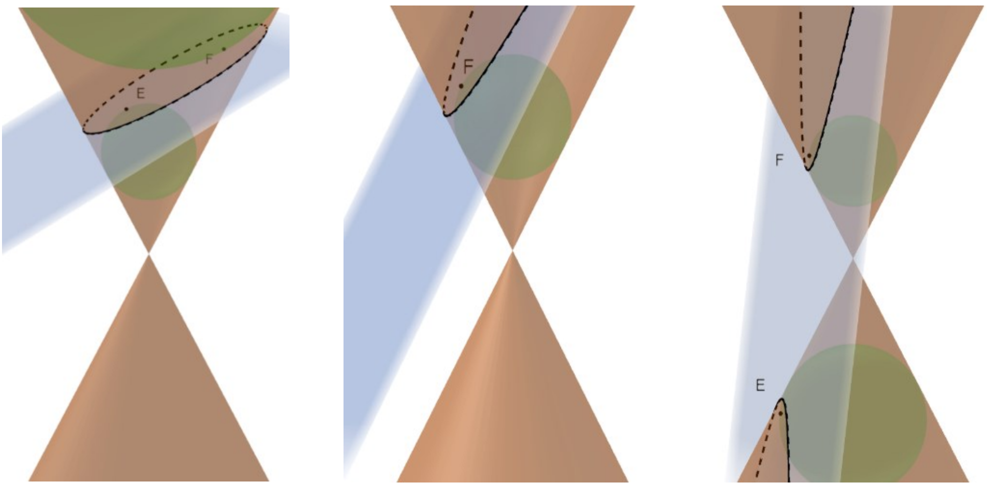
Kuželosečky také můžeme definovat v rovině jako množiny bodů dané vlastnosti, a to dvěma způsoby: pomocí ohnisek nebo pomocí poměru vzdáleností od daného bodu a přímky.

Definice 2 (ohnisková definice kuželoseček): V rovině jsou dány dva pevné body E, F. Množina všech bodů X roviny, pro které se součet $|EX| + |FX|$ vzdáleností bodu X od bodů E, F rovná danému číslu většímu než $|EF|$, se nazývá *elipsa*. Množina všech bodů X roviny, pro které se rozdíl $\big||EX| - |FX|\big|$ vzdáleností bodu X od bodů E, F rovná danému kladnému číslu menšímu než $|EF|$, se nazývá *hyperbola.*

Body E, F se nazývají *ohniska* elipsy / hyperboly. (Boček & Kočandrle, 2020, s. 156, s. 182)

Definice 1 a Definice 2 v tomto znění ekvivalentní nejsou, neboť Definice 1 zahrnuje elipsu (včetně kružnice), parabolu i hyperbolu, zatímco Definice 2 pouze elipsu (opět včetně kružnice) a hyperbolu. Středoškolské učebnice tradičně zařazují mezi ohniskové definice kuželoseček také poměrovou definici paraboly, poté lze ohniskové i stereometrické zavedení regulárních kuželoseček za ekvivalentní považovat, jak ukazuje Věta 1.

Věta 1 (Quételetova-Dandelinova): Řezem rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází jejím vrcholem, je kuželosečka, jejímiž ohnisky jsou body dotyku kulových ploch vepsaných rotační kuželové ploše tak, že se dotýkají roviny řezu. (Glaeser et al., 2016, s. 129)



Obrázek 1: eliptický, parabolický a hyperbolický řez rotační kuželové plochy

Důkaz věty zde nebude uveden, ale čtenář jej nalezne např. právě v (ibid., s. 129–130).

Definice 3 (poměrová definice kuželoseček): V rovině je dán pevný bod F a pevná přímka d, která jím neprochází. Pro libovolnou konstantu $\varepsilon > 0$ je množina všech bodů X v rovině, pro které platí

$$|XF| = \varepsilon \cdot |Xd|$$

kuželosečka s ohniskem F a řídicí přímkou d. (Glaeser et al., 2016, s. 13)

Pozn.: Pro $\varepsilon < 1$ se jedná o elipsu (s výjimkou kružnice), pro $\varepsilon = 1$ se jedná o parabolu, pro $\varepsilon > 1$ se jedná o hyperbolu.

Pokud z Definice 1 vyloučíme řezy rovinami kolmými k ose rotační kuželové plochy, dokážeme ekvivalenci se stereometrickou definicí obdobně jako ekvivalenci mezi Definicí 1 a Definicí 2 rozšířením Věty 1, přičemž řídicí přímkou je průsečnice roviny řezu rotační kuželové plochy a roviny obsahující kružnici dotyku kulové plochy s rotační kuželovou plochou. Důkaz lze nalézt např. v (Pech, 2004, s. 63–64).

Kuželosečky jako algebraické křivky druhého stupně

Stejně jako existují definice planimetrické a stereometrické, tak existuje také definice spadající do oblasti analytické geometrie. Kuželosečky budeme popisovat rovnicemi.

Definice 4: Kuželosečka je množina všech bodů $X[x; y]$ v rovině vyhovující rovnici:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

kde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. (Glaeser et al., 2016, s. 3)

Pozn.: Kuželosečky, jejichž osy jsou v běžné kartézské soustavě souřadnic rovnoběžné s osou x a osou y nazveme jako *kuželosečky v základní poloze*. Kuželosečky, jejichž osy jsou se souřadnicovými osami různoběžné, nazveme jako *kuželosečky v obecné poloze*.

Každý typ kuželosečky lze popsat konkrétní rovnicí, která je speciálním případem rovnice z Definice 4. Odvození rovnice elipsy nalezneme v (Boček & Kočandrle, 2020, s.159–161), paraboly v (ibid., s. 171–173) a hyperboly v (ibid., s. 184–186). Že daná rovnice popisuje i kuželosečky singulární zmiňuje např. (Boček, 1977, s. 16–18), proto ovšem Definici 4 za ekvivalentní s ostatními za uvedených podmínek považovat nelze. Souvislostem mezi nimi se potom více věnuje např. (Stránská, 2024).

1.2 Kuželosečky ve školské matematice

Na kuželosečky žáci ve školách naráží v různých situacích v různých oblastech matematiky, a to počínaje druhým stupněm základní školy. V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (2023) se v části *Závislosti, vztahy a práce s daty* mezi očekávanými výstupy objevuje např. znalost vztahu nepřímé úměrnosti a schopnost vyjádřit funkční vztah tabulkou, rovnicí i grafem. Dle Standardů v základním vzdělávání pro oblast Matematika a její aplikace (2013) se pak tyto dva očekávané výstupy spojují. Nepřímá úměrnost je tak zařazena mezi jedny z prvních funkcí, na které žáci ve škole naráží. Nutnost zmínky o názvu dané křivky, tedy že se jedná o rovnoosou hyperbolu, v souvislosti s širším kontextem kuželoseček prozatím zahrnuta není. I přesto se však pravděpodobně jedná o první setkání s kuželosečkou (mimo kružnici), které však není zařazeno v rámci geometrie, jak by se dalo očekávat, ale právě v souvislosti s funkcemi.

Kuželosečky dále spadají do učiva gymnázií, podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia (2022) především do části *Geometrie*, a to konkrétně analytické. Důraz je kladen hlavně na práci s jejich charakteristickými vlastnostmi a na jejich analytické vyjádření. Žáci tvoří osové a vrcholové rovnice a určují základní údaje o kuželosečce, dále pak také řeší úlohy na vzájemnou polohu přímky a kuželosečky. V rámci stereometrie kuželosečky jako řezy válcové nebo kuželové plochy zmiňovány nejsou, podobně ani v rámci planimetrie. Avšak opět je nalezneme např. v části *Závislostí a funkčních vztahů*, kam jsou zařazeny kvadratické a lineární lomené funkce. Žáci se učí načrtnout jejich grafy, naráží tak opět na rovnoosé hyperboly a nyní také na paraboly, zahrnutí do širšího kontextu kuželoseček opět požadováno není. Žáci se tak setkávají s kuželosečkami především v rámci analytické geometrie.

(Boček & Kočandrle, 2020) např. nejprve uvádí ohniskové definice, ze kterých odvozuje rovnice jednotlivých typů kuželoseček a následně pracuje především s nimi. V sekci *5.8 Vyšetřování množin bodů metodou souřadnic* zařazuje několik příkladů zaměřených na definici poměrovou, byť skrze ni přímo kuželosečky nedefinuje. Současně se jedná samozřejmě pouze o kuželosečky s osami rovnoběžnými se souřadnicovými osami, na kuželosečky v obecné poloze ve středoškolských učebnicích nenarážíme, setkávají se s nimi typicky až studenti ve vysokoškolských skriptech.

1.3 Kuželosečky jako grafy funkcí

Žáci se ve škole setkávají s kuželosečkami zpravidla v rámci analytické geometrie, narazí na ně ovšem i při práci s funkcemi, konkrétně kvadratickými a lineárními lomenými. Při hledání inverzní funkce k funkci kvadratické zjišťují, že i grafem jí odpovídající funkce s odmocninou je kuželosečka, konkrétně polovina paraboly. Tato fakta nás mohou přivést k myšlence, že kuželosečky, případně jejich části, lze obecně vyjadřovat také jako funkce. Podle (Weiss, 2018) se v souvislosti s výukou kuželoseček v Německu v minulosti dokonce debatovalo právě o možnosti zdůraznění těchto souvislostí. V rámci diskusí došlo k souhlasu s propojením zpracování kuželoseček v analytické formě s pojmem proměnné a pojmem funkce, což je také cílem této práce.

Jak bylo zmíněno v kapitole 1.1, každou kuželosečku můžeme vyjádřit rovnicí:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

kde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Pro nulový koeficient b ztrácíme smíšený člen xy a kuželosečka je v základní poloze. Na tyto případy se zaměříme jako první. Předpokládejme tedy, že $b = 0$. Budeme pracovat s jejich rovnicí ve tvaru:

$$ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Vyjádřeme proměnnou y. Diskriminant rovnice je roven:

$$D = 4e^2 - 4c(ax^2 + 2dx + f) = 4e^2 - 4acx^2 - 8cdx - 4cf$$

a proto:

$$y = \frac{-e \pm \sqrt{-acx^2 - 2cdx - cf + e^2}}{c}$$

kde $c \neq 0$ a pro kvadratický trojčlen je splněna existenční podmínka spojená s odmocninou. Ze znamének před odmocninou je patrné, že žádnou kuželosečku v základní poloze (mimo ty postrádající kvadratický člen y^2) nelze vyjádřit jako funkci celou, jelikož se vždy rozděluje na dvě části. Jako konkrétní příklady uveďme v kapitole 2 zařazené funkční předpisy:

$f(x) = 2 - \sqrt{1 + x}$ (příklad 2)

$f(x) = \sqrt{2x^2 + 4} - 6$ (příklad 3)

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 12x + 9} \text{ (příklad 4)}$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 16} - 3 \text{ (příklad 5)}$$

$$f(x) = -\sqrt{-2x^2 + 4x + 16} \text{ (příklad 6)}$$

V případě, že $c = 0$, vyjádříme y jako:

$$y = -\frac{ax^2 + 2dx + f}{2e}$$

kde $e \neq 0$. Provedeme-li substituci $-\frac{a}{2e} = k$, $-\frac{d}{e} = l$, $-\frac{f}{2e} = m$, tak dostáváme rovnici ve tvaru $y = kx^2 + lx + m$, tedy známou kvadratickou funkci, jejímž grafem je parabola. Jedná se o jedinou z kuželoseček v základní poloze, kterou lze jako funkci vyjádřit celou. Jako příklad opět zařaďme funkci, jejíž průběh v kapitole 2.1 vyšetříme:

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3 \text{ (příklad 1)}$$

U kuželoseček v obecné poloze budeme postupovat podobně, předpokládejme, že $b \neq 0$. Vyjádříme proměnnou y, obecnou rovnici kuželosečky můžeme nejprve přepsat do tvaru:

$$cy^2 + y(2bx + 2e) + ax^2 + 2dx + f = 0$$

přičemž diskriminant je roven:

$$D = (2bx + 2e)^2 - 4 \cdot c \cdot (ax^2 + 2dx + f) = 4b^2x^2 + 8bex + 4e^2 - 4acx^2 - 8cdx - 4cf$$

Proto:

$$y = \frac{-bx - e \pm \sqrt{x^2(b^2 - ac) + x(2be - 2cd) + e^2 - cf}}{c}$$

kde $c \neq 0$ a pro kvadratický trojčlen je splněna existenční podmínka spojená s odmocninou. Ze znamének před odmocninou je opět patrné, že žádnou kuželosečku v obecné poloze (mimo ty postrádající kvadratický člen y^2) nelze vyjádřit jako funkci celou. Uveďme opět konkrétní příklady, kterými se zabývá kapitola 3:

$$f(x) = -x - 2 + 2\sqrt{x^2 - 8x + 25} \text{ (příklad 9)}$$

$$f(x) = x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4} \text{ (příklad 10)}$$

$$f(x) = x + \sqrt{25 - x^2} \text{ (příklad 11)}$$

$$f(x) = -x + 7 - 4\sqrt{4 - x} \text{ (příklad 12)}$$

V případě, že $c = 0$, vyjádříme y jako:

$$ax^2 + 2bxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$ax^2 + y(2bx + 2e) + 2dx + f = 0$$

$$y = -\frac{ax^2 + 2dx + f}{2bx + 2e}$$

kde $(b; e) \neq (0; 0)$. V závislosti na volbě koeficientů a, b, d, e, f se může jednat např. o podíl kvadratické a lineární funkce nebo o podíl dvou lineárních funkcí (příp. o nepřímou úměrnost). V těchto případech vyjadřuje funkční předpis kuželosečku kompletně. Jako příklad opět uveďme funkční předpisy z kapitoly 3:

$$f(x) = \frac{2x-4}{x-4} \text{ (příklad 7)}$$

$$f(x) = \frac{2x^2+9x+9}{2x+2} \text{ (příklad 8)}$$

Obecnou rovnici existující regulární kuželosečky je tak možné upravit do jednoho z výše uvedených tvarů a vyjádřit ji (případně její část) jako funkci.

Pozn.: Ze singulárních kuželoseček může mít bod např. rovnici $x^2 + y^2 = 0$, tedy potom $y = \sqrt{-x^2}$, což je ovšem ve sporu s podmínkou platnou pro odmocninu. Stejně tak ji nebude splňovat např. kuželosečka $x^2 + y^2 + 25 = 0$ prezentující prázdnou množinu. Pro dvě různoběžky platí, že lze funkčním předpisem vyjádřit jen takovou jejich část, abychom se nedostali do sporu s definicí funkce, tj. že každému číslu z definičního oboru přiřazujeme právě jedno reálné číslo. Může se tak jednat o jednu z různoběžek, a to včetně konstantní, nebo o funkci s absolutní hodnotou, kterou tvoří části obou různoběžek. Ze dvou rovnoběžek (včetně konstantních) vyjádříme vždy jednu z nich jako lineární funkci. Funkční předpis je vyjadřující tak ve vztazích výše můžeme nalézt. Ostatní singulární kuželosečky, které ve své rovnici neobsahují proměnnou y, jako funkce nevyjádříme vůbec.

Dosavadní poznatky nyní shrňme:

- parabolu s osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou y lze vyjádřit kompletně jako kvadratickou funkci (příklad 1),

- parabolu s osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou x nelze vyjádřit pomocí funkčního předpisu kompletně, jako funkci s odmocninou dostáváme její polovinu (příklad 2),
- parabolu v obecné poloze nelze pomocí funkčního předpisu vyjádřit kompletně, dostáváme jen její část (příklad 12),
- hyperbolu v základní poloze s hlavní osou rovnoběžnou s osou x nelze vyjádřit pomocí funkčního předpisu celou kompletně, dostáváme poloviny obou jejích větví (příklad 4),
- hyperbolu v základní poloze s hlavní osou rovnoběžnou s osou y nelze vyjádřit pomocí funkčního předpisu kompletně, dostáváme jednu z jejích větví (příklad 3),
- rovnoosou hyperbolu asymptotami rovnoběžnými se souřadnicovými osami lze vyjádřit jako lineární lomenou funkci kompletně (příklad 7),
- hyperbolu se svislou a šikmou asymptotou lze vyjádřit pomocí funkčního předpisu s podílem kvadratické a lineární funkce kompletně (příklad 8),
- ostatní hyperboly v obecné poloze nelze vyjádřit pomocí funkčního předpisu kompletně, dostáváme jejich část (příklad 9, příklad 10),
- elipsu v základní poloze nelze vyjádřit pomocí funkčního předpisu kompletně, dostáváme jednu s jejích symetrických polovin: prvního a druhého kvadrantu, třetího a čtvrtého kvadrantu (příklad 6),
- elipsu v obecné poloze nelze vyjádřit pomocí funkčního předpisu kompletně, dostáváme její část (příklad 11),
- kružnici nelze vyjádřit pomocí funkčního předpisu kompletně, dostáváme jednu z jejích symetrických polovin: prvního a druhého kvadrantu, třetího a čtvrtého kvadrantu (příklad 5).

1.4 Vyšetření průběhu funkce

V první části každého příkladu sbírky řešených úloh v kapitole 2 a kapitole 3 budeme vyšetřovat průběh zadané funkce. Pro snazší orientaci a lepší přehlednost si nyní uveďme, jak při výpočtech postupovat, jelikož např. různé středoškolské učebnice preferují odlišné postupy a jejich strukturu. Vyšetření průběhu funkce se tradičně rozděluje do několika bodů, např. (Hrubý & Kubát, 2014) jich uvádí deset na rozdíl od (Macálková et al., 2019), kteří jejich počet snižují na devět. Současně se liší také jejich pořadí. My budeme postupovat v bodech pěti, přičemž od zmíněných učebnic se budeme lišit především spojením výpočtu limit a asymptot do jednoho bodu, jelikož práce s nimi je velmi podobná a pojmy spolu úzce souvisí, obdobně potom do jednoho bodu zahrneme rovnou výpočet odpovídajících derivací a s nimi související výpočet významných bodů funkce. Určení grafu funkce, oboru hodnot a globálních extrémů budeme vnímat jako závěr celého příkladu a do struktury výpočtu skrze body jej zařazovat nebudeme. Závěr také doplníme, na rozdíl od zmíněných publikací, o obecné symetrie grafu dané funkce. Takový postup působí intuitivněji a uceleněji. V jednotlivých bodech se také postupně stupňuje náročnost, v prvních dvou je třeba řešit pouze rovnice a nerovnice, třetí bod již přichází s novým konceptem asymptot. S těmi přichází žáci typicky poprvé do styku právě při práci s hyperbolou. Poslední dva body již vyžadují znalost derivací.

I) *Definiční obor, sudost, lichost*

Jako první určíme definiční obor funkce. V našich případech je třeba zajistit nenulovost výrazů ve jmenovateli a nezápornost výrazů pod odmocninami. Definiční obor budeme využívat i při dalších výpočtech, např. při výpočtu limit v jeho krajních bodech.

Zjistíme, zda je funkce souměrná podle osy y, tzn. zda je sudá. Funkce f se nazývá sudá právě tehdy, když zároveň platí, že pro každé $x \in D_f$ také $-x \in D_f$ a pro každé $x \in D_f$ je $f(-x) = f(x)$. Také ověříme, zda je graf funkce souměrný podle počátku soustavy souřadnic Oxy, tzn. zda je funkce lichá. Funkce f se nazývá lichá právě tehdy, když zároveň platí, že pro každé $x \in D_f$ také $-x \in D_f$ a pro každé $x \in D_f$ je $f(-x) = -f(x)$. Pokud je funkce sudá nebo lichá, usnadní to následující výpočty, jelikož symetrii budou podléhat i její další vlastnosti (příklad 3).

Mohou existovat i obecnější symetrie než pouze sudost a lichost, ty ovšem nejsou ze samotného předpisu funkce tak patrné, proto se k nim vrátíme v závěru celého výpočtu.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka kladná / záporná*

Průsečík se souřadnicovou osou y má souřadnice $P_y[0; y]$, proto hledáme funkční hodnotu $f(0)$. Průsečík se souřadnicovou osou x má souřadnice $P_x[x; 0]$, proto jej dostaneme řešením rovnice $f(x) = 0$.

Průsečík P_x rozdělí definiční obor funkce na intervaly. Z každého z nich dosadíme do funkčního předpisu určitý prvek a z odpovídající funkční hodnoty zjistíme, zda nabývá na konkrétním intervalu funkce kladných $(+)$, nebo záporných $(-)$ funkčních hodnot, což zaneseme do tabulky. Současně můžeme spočítat souřadnice několika jejích dalších bodů pro zkoušku a pro získání lepší představy o tvaru grafu funkce.

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty*

Postupně vypočteme limity v krajních bodech D_f.

- Limity v nevlastních bodech, tj. $x \to \pm\infty$, nejčastěji vypočteme vytknutím nejvyšší mocniny z čitatele a jmenovatele a jejich následným zkrácením (příklad 8), vhodným rozšířením celého výrazu (příklad 9) či vytknutím nejvyšší mocniny před odmocninu (příklad 4). Při práci s odmocninou ale musíme být obezřetní, jelikož $\sqrt{x^2} = |x|$, tedy absolutní hodnotu musíme v dalších výpočtech zohlednit. Bude-li se jednat o limitu pro $x \to \infty$, lze nahradit $|x| = x$, neboť pracujeme s kladnou hodnotou, tudíž absolutní hodnota není třeba. Naopak v limitách pro $x \to -\infty$ nahradíme $|x| = -x$, jelikož platí $|-\infty| = \infty = -(-\infty)$.
- Limity ve vlastních bodech funkce lze někdy řešit pouhým dosazením, konkrétně pro krajní body z uzavřených intervalů D_f (příklad 4). Pokud ovšem není funkce definována v nějakém bodě x_0, ale v jeho okolí ano, vyšetříme chování funkce v jeho okolí pomocí jednostranných limit, tzn. pro $x \to x_0^-$ a $x \to x_0^+$, tedy k bodu se budeme přibližovat dle konkrétní situace z jeho levého či pravého okolí (příklad 7).

Za zvláštní případ limitního chování lze považovat asymptoty – funkční hodnoty se pro $x \to \pm\infty$ blíží hodnotám, kterých zde nabývá přímka, tedy asymptota, ale nikdy jich zcela nedosáhnou. Existence svislých a vodorovných asymptot (tzn. přímek $x = q_1$ a $y = q_2$) plyne z předchozích výpočtů limit v krajních bodech D_f. Existenci šikmých asymptot s rovnicí ve tvaru $y = kx + q$ lze určit různými způsoby. Vždy nás zajímá chování funkce pro $x \to \pm\infty$.

- Asymptotu lze interpretovat např. jako tečnu grafu funkce s bodem dotyku v nekonečnu. Tzn., že pro $x \to \infty$ se rozdíl hodnot, kterých zde nabývá funkce a asymptota, stále zmenšuje, tj. $\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (kx+q)\big) = 0$. Výraz upravme:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) - \lim_{x\to\infty} q = 0$$
$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} q$$
$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = q$$

  Dostáváme vzorec sloužící k výpočtu koeficientu q. Pro směrnici k postupujme podobně.

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (kx+q)\big) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty}(kx+q) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(kx+q)$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{kx+q}{x}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(k + \frac{q}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$$

  Pokud bychom předpokládali průsečík v záporném nekonečnu, postupovali bychom při odvození analogicky. Rovnice asymptot můžeme určit pomocí vzorců:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$$
$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ q = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx)$$

  V případě, že $k = 0$, můžeme ze vzorců dostat také vodorovnou asymptotu.

- Pokud má funkce asymptotu, pro $x \to \pm\infty$ se blíží její tvar tvaru, jaký zde má přímka (asymptota), graf se s ní „zrovnoběžňuje“. Tj. pro tato x se směrnice funkce blíží směrnici asymptoty. Určením směrnice grafu funkce pro $x \to \pm\infty$ nalezneme koeficient k z rovnice výše. To nám určují limity první derivace v nevlastních krajních bodech jejího definičního oboru.

Pozn.: Výpočtem limit první derivace v nevlastních krajních bodech jejího definičního oboru dostáváme směrnici ukazující rychlost růstu pro $x \to \pm\infty$. Pro nevlastní body se tak jedná o asymptoty. V případě vlastních krajních bodů první derivace dostáváme opět směrnici ukazující, jak rychle či pomalu zkoumaná funkce v jejich okolí roste či klesá, což nám umožňuje lepší představu o tvaru jejího grafu. Tento výpočet může také např. ukázat existenci případné svislé asymptoty (příklad 8).

- Funkční předpis lze také např. upravit do součtového tvaru. Zanedbáním částí, které jdou pro $x \to \pm\infty$ k nule, dostáváme rovnou rovnici asymptoty (příklad 8).

V příkladech sbírky budeme využívat k výpočtu asymptot vzorce, limitu první derivace v nevlastních krajních bodech jejího definičního oboru zařadíme do následující bodu IV) jako zkoušku správnosti předchozího výpočtu.

IV) *První derivace: lokální extrémy, intervaly rostoucí/ klesající*

Vypočteme první derivaci a určíme její nulové body (pokud existují), tedy body podezřelé z lokálního extrému. Pomocí nich rozdělíme definiční obor první derivace na intervaly, v nichž určíme její funkční hodnoty a na základě toho stanovíme pro daný interval monotonii zkoumané funkce. Pokud nabývá na intervalu první derivace kladných funkčních hodnot, je zde daná funkce rostoucí, pokud naopak záporných, je klesající. Mění-li se znaménko první derivace v okolí jejího nulového bodu, jedná se o lokální extrém. Tyto poznatky shrneme do tabulky, v jejím prvním řádku nalezneme vypsané intervaly, ve druhém, zda na nich nabývá první derivace kladných $(+)$, nebo záporných $(-)$ funkčních hodnot, a ve třetím, zda je zde zkoumaná funkce rostoucí $(\nearrow)$, nebo klesající $(\searrow)$.

Definiční obor první derivace může být na rozdíl od definičního oboru zadané funkce užší (příklad 6). Typicky se uzavřené části intervalu mění na otevřené, což v příkladech následující sbírky úloh symbolizuje, že funkce je v daném krajním bodě definována, ovšem její první derivace se danému bodu pouze blíží, ale nikdy ho nedosáhne. To znamená, že se graf první derivace blíží pro dané x hodnotě $+\infty$, nebo $-\infty$, proto v okolí tohoto bodu zkoumaná funkce nekonečně rychle klesá či roste. Pokud se definiční obory shodují, můžeme očekávat (na základě předpokládaných podob grafů, kterými se práce zabývá) existenci svislé asymptoty. Toto chování v příkladech ověříme výpočtem limit první derivace ve vlastních krajních bodech jejího definičního oboru, což je rozebráno v bodě III).

Na tomto místě vždy provedeme zkoušku. Pomocí první derivace porovnáme, zda souhlasí růst a klesání funkce na jednotlivých intervalech s jejím limitním chováním a také s tabulkou jejích funkčních hodnot (kladných / záporných). Pomocí limit první derivace v případných nevlastních krajních bodech jejího definičního oboru ověříme správnost předchozích výpočtů šikmých a vodorovných asymptot. V případě vlastních krajních bodů v definičním oboru první derivace určíme rychlost růstu / klesání zkoumané funkce v jejich okolí a také znovu ověříme případnou existenci šikmé asymptoty. To nám zpravidla kompletně neověří správnost výpočtů, ale může upozornit na případnou chybu.

V) *Druhá derivace: inflexní body, intervaly konvexní / konkávní*

Určíme druhou derivaci a její nulové body (pokud existují), tedy body podezřelé z inflexe. Pomocí nich rozdělíme definiční obor na intervaly, v nichž vypočteme funkční hodnoty druhé derivace. Pokud nabývá na intervalu druhá derivace kladných funkčních hodnot, je zde daná funkce konvexní, pokud naopak záporných, je konkávní. Mění-li se znaménko druhé derivace v okolí jejího nulového bodu, jedná se o inflexní bod. Tyto poznatky opět shrneme do tabulky, v jejím prvním řádku nalezneme vypsané veškeré intervaly, ve druhém, zda jsou na nich funkční hodnoty druhé derivace kladné $(+)$, či záporné $(-)$, ve třetím, zda je zde proto první derivace rostoucí $(\nearrow)$, nebo klesající $(\searrow)$ a ve čtvrtém, zda je proto zkoumaná funkce konvexní $(\cup)$, nebo konkávní $(\cap)$.

Závěr

Z grafu zpětně určíme obor hodnot a globální extrémy funkce. Současně vyšetříme mimo sudosti a lichosti také případné další symetrie grafu funkce, které odhadneme z jeho tvaru a ověříme výpočtem. Jejich existenci můžeme v této sbírce předem očekávat, jelikož dopředu víme, že grafy budou tvořeny kuželosečkami, které v sobě mnohé symetrie nesou. V případech, kdy je graf tvořen jen částí kuželosečky, ale musíme rozlišovat mezi symetrií kuželosečky a grafu, jelikož tato nekompletnost může vést ke ztrátě kompletní symetrie grafu funkce.

Pozn.: U výsledků budeme z většiny ponechávat odmocninu ve jmenovateli a zlomky nebudeme usměrňovat, jelikož tento tvar v daných případech zjednoduší další výpočty, typicky např. derivování.

1.5 Analytický popis kuželosečky

Ve druhé části příkladů vždy popíšeme kuželosečku analyticky. Pro kuželosečky v základní poloze rozdělíme tento popis do tří bodů.

I) *Převod do středového / vrcholového tvaru rovnice*

Abychom funkční předpis upravili do tvaru rovnice kuželosečky, odstraníme z něj umocněním na druhou případnou odmocninu, vhodně přeskupíme členy na obou stranách rovnice a provedeme úpravu na čtverec.

II) *Určení charakteristických prvků*

Ze středového (vrcholového) tvaru kuželosečky určíme pro případ elipsy a hyperboly souřadnice středu, hlavních vrcholů a ohnisek, délku hlavní a vedlejší poloosy a díky nim dopočteme excentricitu. Pro případ paraboly určíme souřadnice vrcholu, ohniska a rovnici řídicí přímky. Pro kružnici její střed a poloměr.

III) *Ověření ohniskové definice*

Z tvaru funkčního předpisu vyjádříme souřadnice každého bodu grafu, pro něž následně dosazením ověříme platnost ohniskové definice příslušející konkrétnímu typu kuželosečky.

V případě kuželosečky v obecné poloze pouze upravíme funkční předpis do tvaru obecné rovnice kuželosečky a určíme, o jaký konkrétní typ se jedná. K samotné klasifikaci typu kuželosečky využijeme metodu pracující pouze se zkoumáním vzájemné polohy kuželosečky a přímky.

Podíváme-li se blíže na zmíněný vztah, zjistíme, že v případě elipsy, příp. kružnice, mohou nastat následující možnosti: přímka jde vně kuželosečky, je její tečnou nebo je její sečnou se dvěma společnými body. U hyperboly se může jednat o asymptotu, tečnu či opět sečnu, ovšem tentokrát s jedním i dvěma společnými body. Pro parabolu může ležet přímka opět v její vnější oblasti, být její tečnou či sečnou s jedním i dvěma společnými body. Pokud tedy budeme řešit soustavu dvou rovnic, kuželosečky a přímky, dostaneme se ve finále k:

1) kvadratické rovnici s kladným diskriminantem, přímka je sečna (2 společné body),
2) kvadratické rovnici s nulovým diskriminantem, přímka je tečna,
3) kvadratické rovnici se záporným diskriminantem, přímka leží vně kuželosečky,
4) lineární rovnici s jediným řešením, přímka je sečna (1 společný bod),
5) rovnosti typu $1 = 0$, přímka je asymptota,
6) rovnosti typu $0 = 0$, přímka leží celá na kuželosečce, jedná se o singulární kuželosečku.

V posledních třech případech zaniká v rovnici její kvadratická část. Směr přímky, která povede při řešení zmiňované soustavy na lineární rovnici, se potom nazve *asymptotickým.* (Otruba, 2010).

Definice 5 (asymptotický směr kuželosečky): Směr v rovině, daný nenulovým vektorem $\vec{u} = (u, v)$, se nazývá asymptotickým směrem kuželosečky o rovnici:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

jestliže:

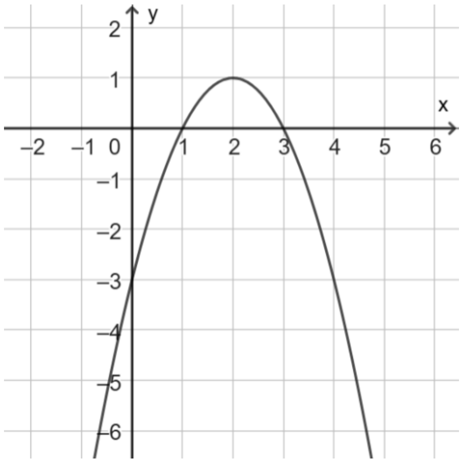
$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$$

(Boček, 1977, s. 23).

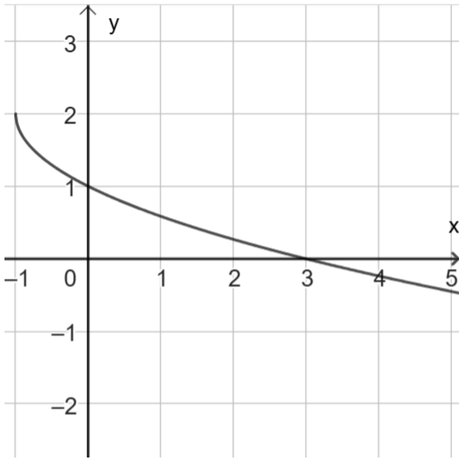
Pro regulární kuželosečky tedy platí, že asymptotickým směrem rozumíme směr přímky, která je asymptotou dané kuželosečky nebo její sečnou s jedním společným bodem. Pokud se podíváme na jednotlivé typy kuželoseček a počty jim příslušejících asymptotických směrů, zjistíme, že elipsa (kružnice) nemá žádný, parabole přísluší právě jeden (rovnoběžný s její osou) a hyperbole dva (směry asymptot). Tedy s jejich pomocí od sebe dokážeme poměrně snadno jednotlivé typy kuželoseček odlišit.

Ve výpočtech budeme často narážet na rovnice s odmocninami. Na úvod proto ještě připomeňme nutnost provedení zkoušky, jelikož budeme provádět neekvivalentní úpravu umocnění. Ta může vést k získání hodnoty, která nebude kořenem rovnice (příklad 11). Právě provedení neekvivalentní úpravy umocnění povede z většiny (příklad 2 až příklad 6, příklad 9 až příklad 12) také k tomu, že zatímco graf funkce bude tvořen jen částí kuželosečky, vypočtená rovnice ji bude popisovat celou. Tento zásadní rozdíl zde proto zdůrazněme.

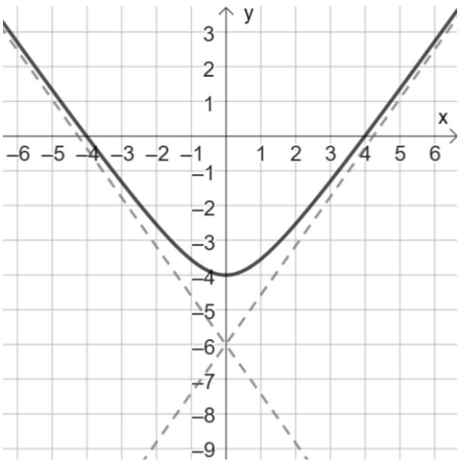
1.6 Přehled grafů vyšetřených funkcí



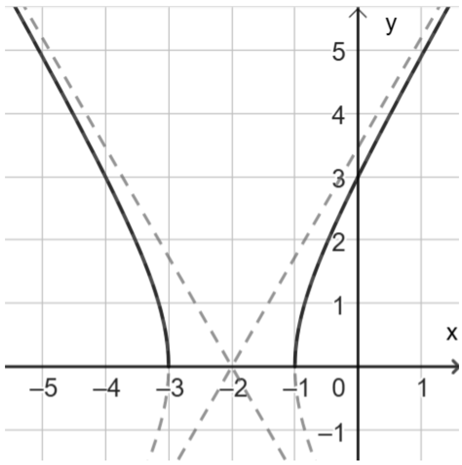
Obrázek 2: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$



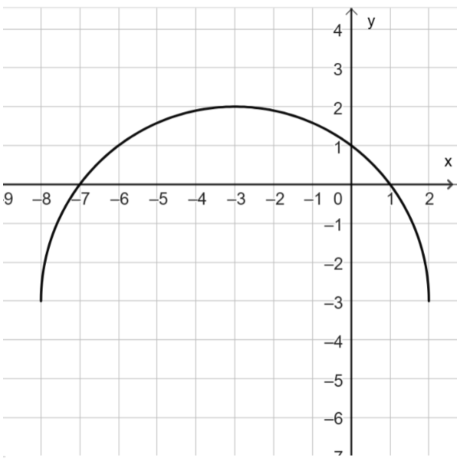
Obrázek 3: $f(x) = 2 - \sqrt{1+x}$



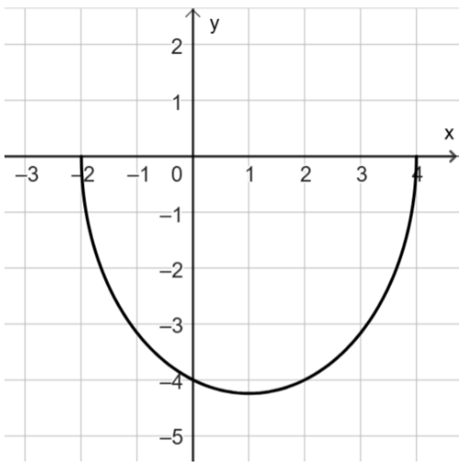
Obrázek 4: $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4} - 6$



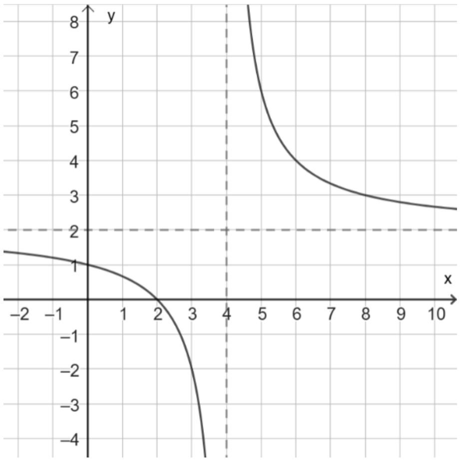
Obrázek 5: $f(x) = \sqrt{3x^2 + 12x + 9}$



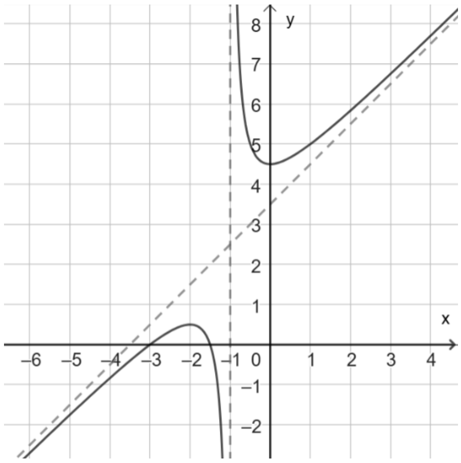
Obrázek 6: $f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 16} - 3$



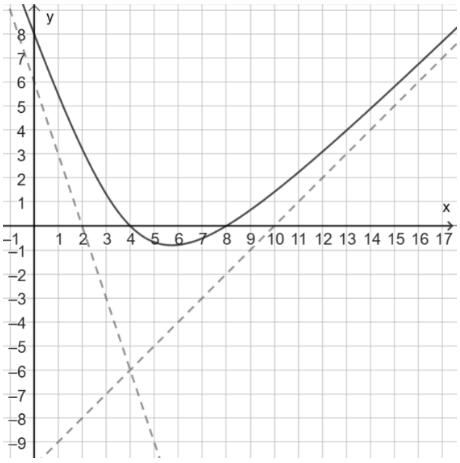
Obrázek 7: $f(x) = -\sqrt{-2x^2 + 4x + 16}$



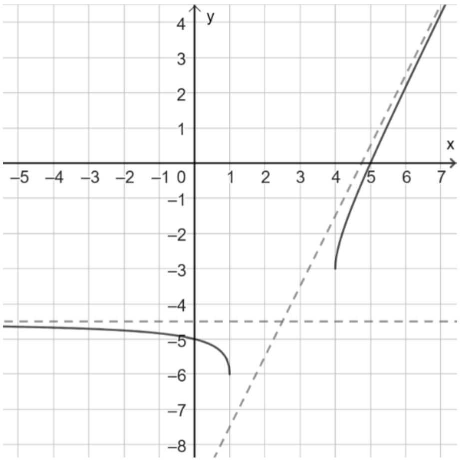
Obrázek 8: $f(x) = \frac{2x-4}{x-4}$



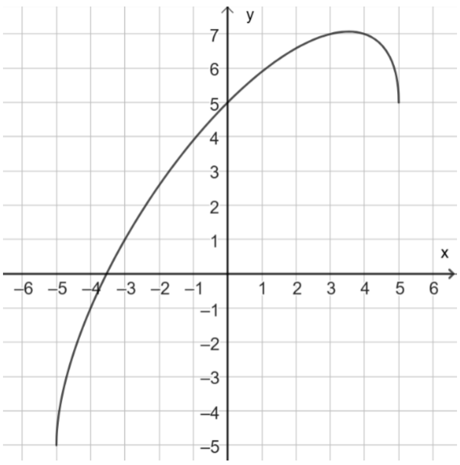
Obrázek 9: $\frac{2x^2+9x+9}{2x+2}$



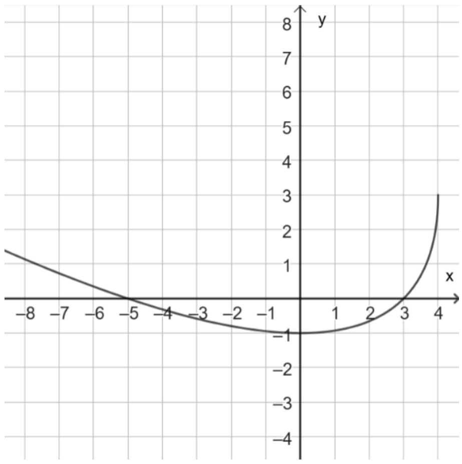
Obrázek 10: $f(x) = -x - 2 + 2\sqrt{x^2 - 8x + 25}$



Obrázek 11 $f(x) = x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

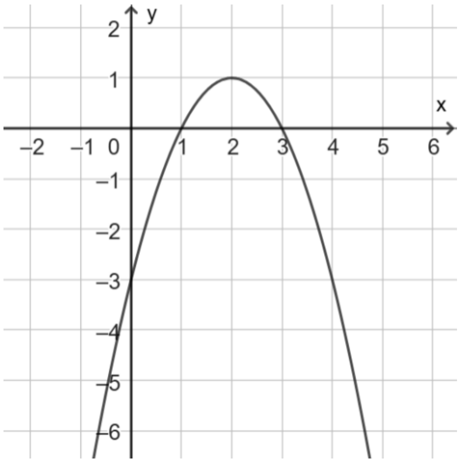


Obrázek 12: $f(x) = x + \sqrt{25 - x^2}$

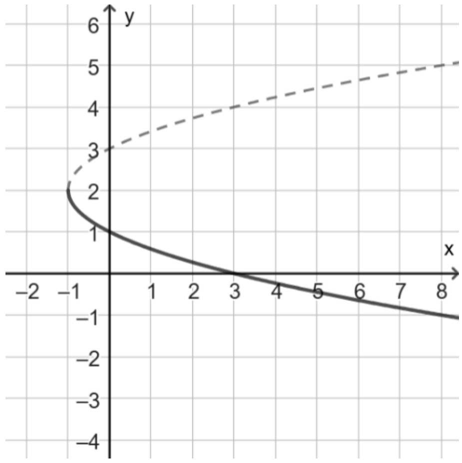


Obrázek 13: $f(x) = -x + 7 - 4\sqrt{4 - x}$

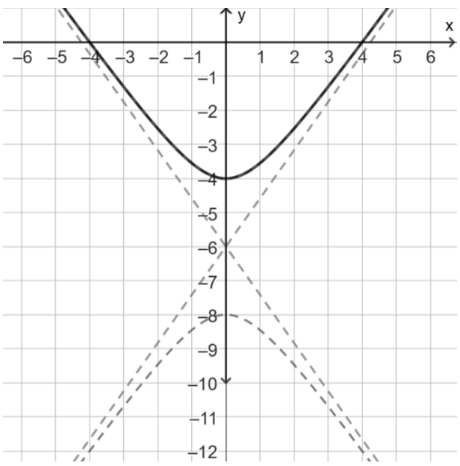
Přehled kuželoseček tvořících grafy vyšetřených funkcí



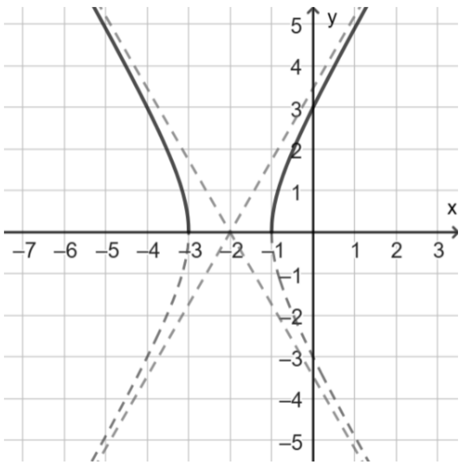
Obrázek 14: parabola, příklad 1



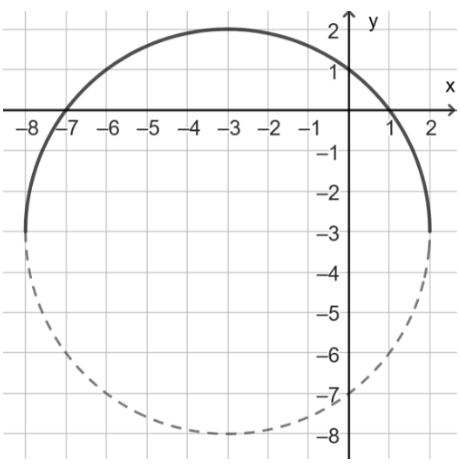
Obrázek 15: parabola, příklad 2



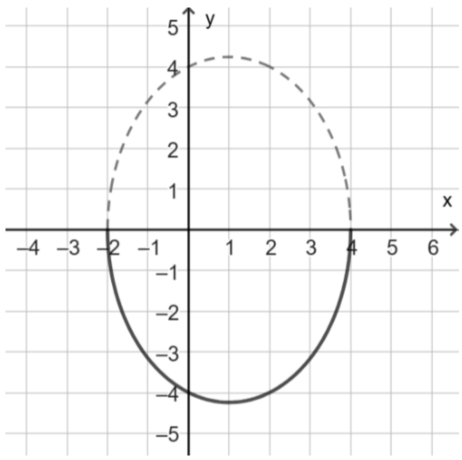
Obrázek 16: hyperbola, příklad 3



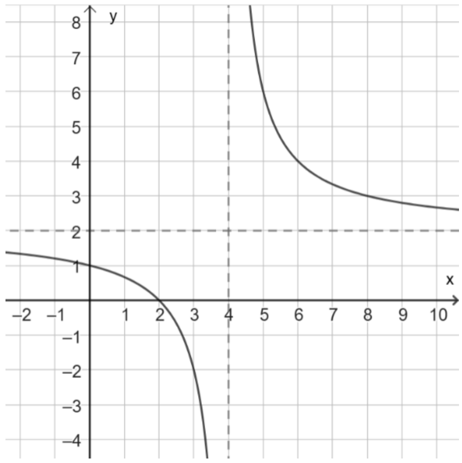
Obrázek 17: hyperbola, příklad 4



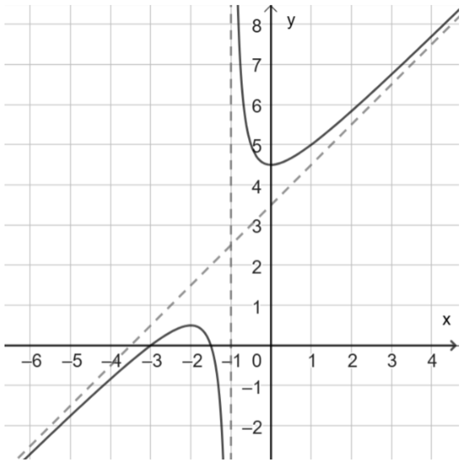
Obrázek 18: kružnice, příklad 5



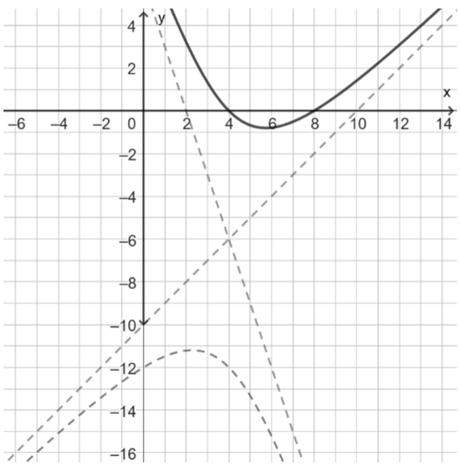
Obrázek 19: elipsa, příklad 6



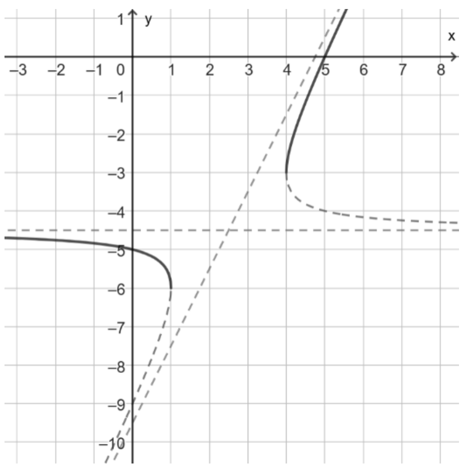
Obrázek 20: hyperbola, příklad 7



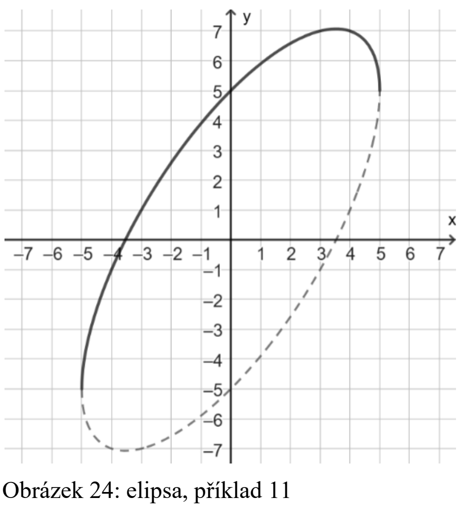
Obrázek 21: hyperbola, příklad 8



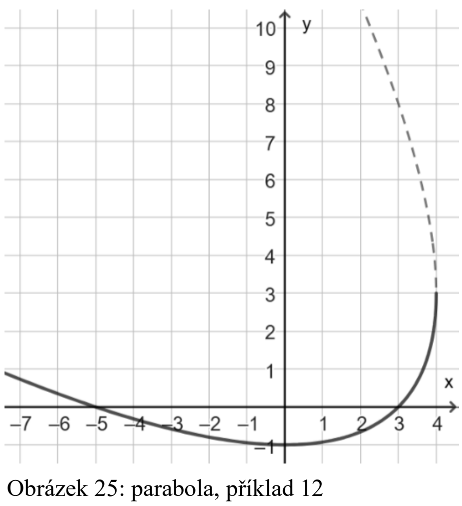
Obrázek 22: hyperbola, příklad 9



Obrázek 23: hyperbola, příklad 10



Obrázek 24: elipsa, příklad 11



Obrázek 25: parabola, příklad 12

2 Kuželosečky v základní poloze

V této kapitole budeme vyšetřovat průběhy funkcí, jejichž grafy tvoří kuželosečky, případně jejich části. U každého příkladu zadaného funkčním předpisem nejprve vyšetříme průběh dané funkce (podle kapitoly 1.4) a následně konkrétní kuželosečku popíšeme analyticky (podle kapitoly 1.5), abychom tak ukázali souvislosti a rozdíly dané jejím odlišným zadáním skrze její analytickou rovnici a funkční předpis.

Funkční předpisy obsažené v této části sbírky jsou voleny tak, aby grafem daných funkcí byly kuželosečky v základní poloze. Kapitola se skládá z šesti řešených úloh ilustrujících základní případy, na které lze narazit, a dále je doplněna také o úlohy neřešené sloužící případným zájemcům k dalšímu procvičení. Na úvod příkladů se vždy objevuje krátký komentář rozebírající, jaké vlastnosti příslušné funkce můžeme poznat na první pohled z jejího předpisu, případně zda lze již dopředu odhadnout, o jakou kuželosečku by se mohlo jednat. Pomyslným odstraněním odmocniny z funkčního předpisu a zkoumáním znamének před kvadratickými členy x^2 a y^2 (a samotné existence obou z nich) lze dobře konkrétní odhad učinit, jelikož ve středových či vrcholových rovnicích kuželoseček je tato skutečnost rozhodující. Jedná se však vždy o pouhý prvotní odhad, protože pro naprostou jistotu je třeba vyšetřit podobu případné rovnice detailněji.

Příklady jsou doplněny o obrázky ukazující nejprve graf vyšetřené funkce a následně jí odpovídající kuželosečku.

2.1 Příklad 1: parabola

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Průběh funkce

Jedná se o kvadratickou funkci, její graf dokážeme určit nalezením kořenů jí odpovídající kvadratické rovnice $-x^2 + 4x - 3 = 0$ a dohledáním souřadnic vrcholu. Zde však graf určíme pomocí vyšetření průběhu funkce. Jedná se o postup výrazně delší a složitější, nicméně bude využíván i v následujících příkladech, kde podoba výsledné křivky již nebude tak zřejmá, proto je vhodné jej poprvé aplikovat na známý objekt. Nyní pomocí něj ukážeme, že grafem této kvadratické funkce je opravdu parabola.

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Zřejmě $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f není sudá ani lichá, neboť $f(-x) = -(-x)^2 + 4 \cdot (-x) - 3 = -x^2 - 4x - 3 \neq \pm f(x)$.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka kladná / záporná:* Pro P_y platí:

$$f(0) = 0 + 4 \cdot 0 - 3 = -3 \rightarrow P_y[0; -3]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$-(x-1)(x-3) = 0$$
$$x_1 = 1;\ x_2 = 3$$

Rovnice má dva kořeny, tedy existují i dva průsečíky $P_{x_1}[1; 0]$, $P_{x_2}[3; 0]$. Ty rozdělují definiční obor na tři intervaly. Tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$(-\infty; 1)$	$(1; 3)$	$(3; \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Tabulka 1: příklad 1, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* Pomocí rozkladu výrazu v limitě na součin a vytknutí mínus jedné před limitu dostáváme:

$$\lim_{x \to \infty} (-x^2 + 4x - 3) = -\lim_{x \to \infty} (x-1)(x-3) = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2+4x-3) = -\lim_{x\to-\infty}(x-1)(x-3) = -(-\infty)(-\infty) = -\infty$$

Z výpočtu limit neplyne existence svislých nebo vodorovných asymptot. Pro šikmé asymptoty platí:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+4x-3}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x} = \infty\cdot(-1+0-0) = -\infty$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+4x-3}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x} = -\infty\cdot(-1+0-0) = \infty$$

Nicméně směrnice musí být reálné číslo, tedy nedostáváme ani asymptoty šikmé.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Vypočteme první derivaci.

$$f'(x) = (-x^2+4x-3)' = -2x+4$$

Získáme její nulový bod $x=2$. Monotonii funkce f tak vyšetříme na dvou intervalech.

	$(-\infty; 2)$	$(2; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Tabulka 2: příklad 1, f rostoucí / klesající

Z tabulky plyne existence lokálního maxima, z hodnoty $f(2)=1$ plynou jeho souřadnice $[2;1]$. Monotonie funkce f na jednotlivých intervalech odpovídá hodnotám z tabulky 1 i jejímu limitnímu chování. Funkce f nejprve nabývá záporných hodnot, roste ze záporného nekonečna do kladného lokálního maxima a z něj klesá zpět do záporného nekonečna. Ověřme ještě pomocí limit první derivace v nevlastních krajních bodech jejího definičního oboru správnost předchozího výpočtu šikmých asymptot. $D_{f'} = \mathbb{R}$, proto:

$$\lim_{x\to\infty}(-2x+4) = -\infty; \; \lim_{x\to-\infty}(-2x+4) = \infty$$

Kdyby šikmé asymptoty existovaly, výsledkem těchto limit první derivace by bylo reálné číslo coby jejich směrnice. Takto jsme tedy ověřili, že šikmé asymptoty funkce f nemá.

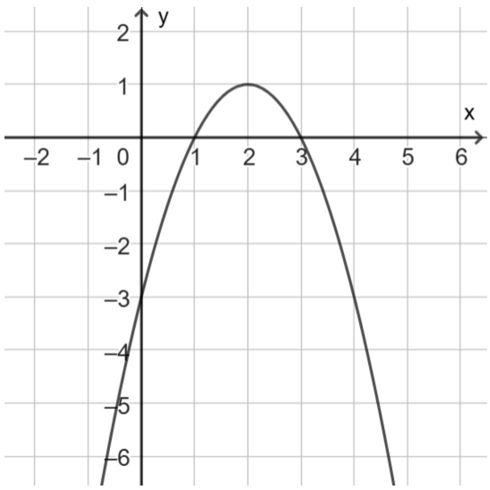
V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Vypočteme druhou derivaci.

$$f''(x) = (-2x + 4)' = -2$$

Druhá derivace je zjevně záporná, proto je funkce f na celém svém definičním oboru konkávní a žádné inflexní body neexistují.

	$(-\infty; \infty)$
$f''(x)$	$-$
$f'(x)$	$\searrow$
$f(x)$	$\cap$

Tabulka 3: příklad 1, f konvexní / konkávní



Obrázek 26: graf funkce $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Obor hodnot: $H_f = (-\infty; 1\rangle$

Globální extrémy: Globální maximum v $x = 2$, tzn. v bodě $[2; 1]$.

Symetrie: Graf je symetrický podle osy $x = 2$, platí $f(2 - x) = f(2 + x)$.

$$-(2 - x)^2 + 4(2 - x) - 3 = -(2 + x)^2 + 4(2 + x) - 3$$
$$-4 + 4x - x^2 + 8 - 4x - 3 = -4 - 4x - x^2 + 8 + 4x - 3$$
$$-x^2 + 1 = -x^2 + 1$$
$$0 = 0$$

Analytický popis kuželosečky

I) *Převod rovnice do vrcholového tvaru:* Funkční předpis upravíme na čtverec.

$$y + 3 = -(x^2 - 4x)$$
$$y + 3 = -(x - 2)^2 - 4 \cdot (-1)$$
$$(x - 2)^2 = -(y - 1)$$

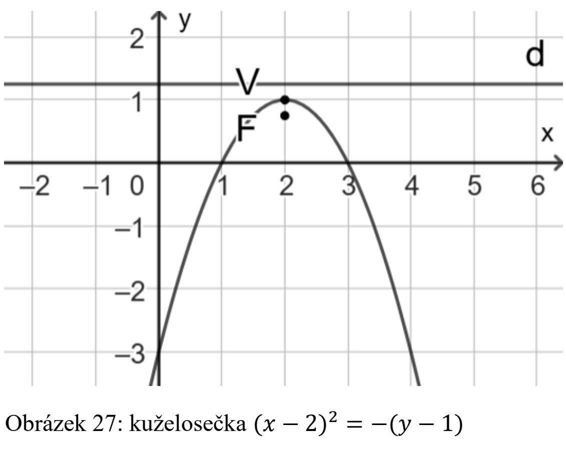
Jedná se o rovnici paraboly.

II) *Určení charakteristických prvků:* Vrchol $V[2; 1]$, ohnisko $F\left[2; \frac{3}{4}\right]$, řídicí přímka $d: y = \frac{5}{4}$.

III) *Ověření ohniskové definice:* Každý bod paraboly má souřadnice $[x;\ -x^2 + 4x - 3]$ a musí splňovat $|XF| = |Xd|$.

$$\sqrt{(2 - x)^2 + \left(\frac{3}{4} + x^2 - 4x + 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4} + x^2 - 4x + 3\right)^2}$$
$$\sqrt{(2 - x)^2 + \left(x^2 - 4x + \frac{15}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(x^2 - 4x + \frac{17}{4}\right)^2}$$
$$4 - 4x + x^2 + x^4 + 16x^2 + \frac{225}{16} - 8x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 30x = x^4 + 16x^2 + \frac{289}{16} - 8x^3 + \frac{17}{2}x^2 - 34x$$
$$x^4 - 8x^3 + \frac{49}{2}x^2 - 34x + \frac{289}{16} = x^4 - 8x^3 + \frac{49}{2}x^2 - 34x + \frac{289}{16}$$
$$0 = 0$$

Ohnisková definice je splněna.



Obrázek 27: kuželosečka $(x - 2)^2 = -(y - 1)$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

II) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$

2.2 Příklad 2: polovina paraboly

$$f(x) = 2 - \sqrt{1+x}$$

Průběh funkce

V tomto případě budeme pracovat s již ne zcela běžnou funkcí. Určeme funkci k ní inverzní.

$$x = 2 - \sqrt{1+y}$$
$$x^2 - 4x + 4 = 1 + y$$
$$y = x^2 - 4x + 3$$

Zjišťujeme, že dostáváme pro nás známou funkci kvadratickou, jejímž grafem je parabola. Proto musí být i grafem funkce f parabola, v závislosti na definičním oboru potom její část. Funkční předpisy obsahující dva odlišné objekty tak mají stejnou geometrickou interpretaci.

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Výraz pod odmocninou nesmí být záporný, proto musí platit, že $1 + x \geq 0$, tedy $D_f = \langle -1; \infty)$. Neboť $f(-x) = 2 - \sqrt{1-x} \neq \pm f(x)$, není funkce f ani sudá ani lichá.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka hodnot:* Pro P_y platí:

$$f(0) = 2 - \sqrt{1+0} = 2 - 1 = 1 \rightarrow P_y[0; 1]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$2 - \sqrt{1+x} = 0$$
$$2 = \sqrt{1+x}$$
$$4 = 1 + x$$
$$x = 3$$

Rovnice obsahovala odmocninu, provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění. Proto je třeba provést zkoušku.

$$2 - \sqrt{1+3} = 2 - \sqrt{4} = 2 - 2 = 0$$

Hodnota $x = 3$ je kořenem rovnice, proto $P_x[3; 0]$. Průsečík rozděluje definiční obor na dva intervaly, tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$\langle -1; 3)$	$(3; \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$

Tabulka 4: příklad 2, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* Pro levý krajní bod vyřešíme limitu přímým dosazením. Pro pravý krajní bod využijeme tvrzení, že limita rozdílu se rovná rozdílu limit.

$$\lim_{x \to -1} \left(2 - \sqrt{1+x}\right) = 2 - \sqrt{1-1} = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 - \sqrt{1+x}\right) = \lim_{x \to \infty} 2 - \lim_{x \to \infty} \sqrt{1+x} = 2 - \sqrt{1+\infty} = -\infty$$

Z výpočtu limit neplyne existence vodorovných ani svislých asymptot. Vzorce sloužící k určení šikmých asymptot můžeme využít jen pro $x \to +\infty$, jelikož pro $x \to -\infty$ není funkce f definována.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - |x| \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(\frac{2}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}\right)}{x} = 0 - \sqrt{0+0} = 0$$

$$q = \lim_{x \to \infty} (2 - \sqrt{1+x} - 0x) = \lim_{x \to \infty} (2 - \lim_{x \to \infty} \sqrt{1+x}) = 2 - \sqrt{1+\infty} = -\infty$$

Jelikož koeficient q není reálné číslo, neexistuje ani šikmá asymptota.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako složenou funkci.

$$f'(x) = \left(2 - \sqrt{1+x}\right)' = \left(2 - (1+x)^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{-1}{2\sqrt{1+x}}$$

Nulový bod první derivace neexistuje, ta nabývá pouze záporných funkčních hodnot. Funkce f je proto na celém svém definičním oboru klesající a lokální extrém neexistuje.

	$(-1; \infty)$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$

Tabulka 5: příklad 2, f rostoucí / klesající

Chování funkce f popsané tabulkou souhlasí s hodnotami z tabulky 4 a odpovídá jejímu limitnímu chování, tedy že z kladných hodnot klesá do záporného nekonečna. Vypočtěme ještě limity první derivace v krajních bodech jejího definičního oboru a zkontrolujme tak mimo jiné správnost výpočtu směrnic šikmých asymptot. Neboť $D_{f'} = (-1; \infty)$, tak:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1+\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{-1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1+(-1)^+}} = -\infty$$

Pro pravý krajní bod dostáváme stejnou hodnotu, jako za využití vzorců pro výpočet koeficientů šikmých asymptot. Z levého krajního bodu funkce f klesá nekonečně rychle.

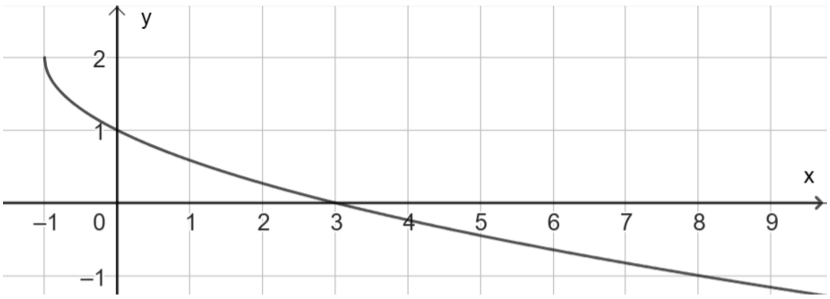
V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako podíl a jako složenou funkci.

$$f''(x) = \left(\frac{-1}{2\sqrt{1+x}}\right)' = \frac{0 \cdot 2\sqrt{1+x} - (-1) \cdot \frac{2}{2\sqrt{x+1}}}{4+4x} = \frac{1}{4 \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1}}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje, tedy ani inflexní bod funkce f. Výraz pod odmocninou musí být kladný, je navíc obsažen i ve druhé závorce součinu ve jmenovateli, proto druhá derivace nabývá jen kladných funkčních hodnot a funkce f má konvexní tvar.

	$(-1;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$
$f(x)$	$\cup$

Tabulka 6: příklad 2, f konvexní / konkávní



Obrázek 28: graf funkce $f(x) = 2 - \sqrt{1+x}$

Obor hodnot: $H_f = (-\infty; 2\rangle$

Globální extrémy: Globální maximum v $x = -1$, tzn. v bodě $[-1; 2]$.

Symetrie: Žádné symetrie příslušného grafu neexistují.

Analytický popis kuželosečky

I) *Určení tvaru vrcholové rovnice:* Umocněním funkčního předpisu na druhou se zbavíme odmocniny a provedeme úpravu na čtverec.

$$y - 2 = -\sqrt{1+x}$$
$$y^2 - 4y + 4 = 1 + x$$
$$(y-2)^2 - 4 + 4 = 1 + x$$
$$(y-2)^2 = (x+1)$$

Jedná se o rovnici paraboly.

II) *Určení charakteristických prvků:* Vrchol $V[-1; 2]$, ohnisko $F\left[-\frac{3}{4}; 2\right]$, řídicí přímka $d: x = -\frac{5}{4}$.

III) *Ověření ohniskové definice:* Každý bod paraboly má souřadnice $\left[x; 2 - \sqrt{1+x}\right]$ a musí splňovat $|XF| = |Xd|$.

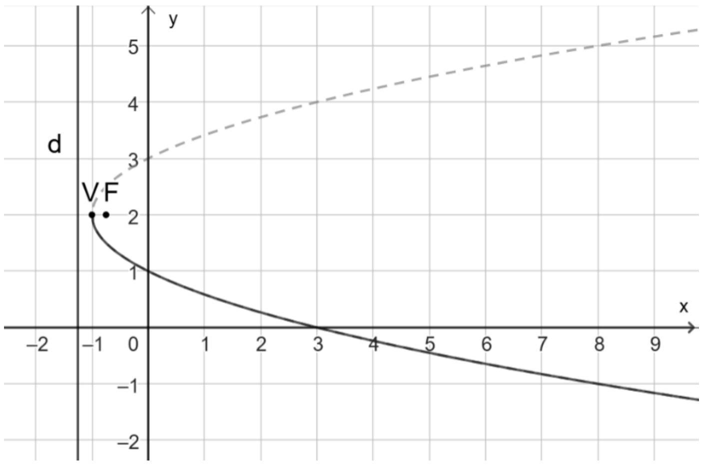
$$\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(2-\sqrt{1+x}-2\right)^2}=\sqrt{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2}$$

$$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}+1+x=x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}$$

$$0=0$$

Ohnisková definice je splněna.



Obrázek 29: kuželosečka $(y-2)^2=(x+1)$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x)=3-\sqrt{-x+4}$

II) $f(x)=-1+\sqrt{9-x}$

2.3 Příklad 3: větev hyperboly

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 4} - 6$$

Průběh funkce

V tomto případě je ve funkčním předpisu odmocnina obsahující kvadratický člen x^2. Nejedná se o běžný objekt, podobně ani funkce k ní inverzní by nám nebyla známá. Pokud bychom z funkčního předpisu odstranili odmocninu a kvadratické členy x^2 a y^2 ponechali na jedné straně rovnice, měly by odlišná znaménka. Na základě znalosti tvarů středových rovnic kuželoseček můžeme očekávat, že by se mohlo jednat o hyperbolu. Vyšetřeme rovnou průběh této funkce.

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Výraz pod odmocninou nabývá pouze kladných hodnot, existenční podmínka vztahující se k odmocnině je splněna pro všechna x, proto $D_f = \mathbb{R}$. Neboť $f(-x) = \sqrt{2 \cdot (-x)^2 + 4} - 6 = \sqrt{2x^2 + 4} - 6 = f(x)$, je funkce f sudá. Naopak $f(-x) = \sqrt{2x^2 + 4} - 6 \neq -f(x)$, tedy funkce f není lichá.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka hodnot:* Pro P_y platí:

$$f(0) = \sqrt{2 \cdot 0 + 4} - 6 = 2 - 6 = -4 \rightarrow P_y[0; -4]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$\sqrt{2x^2 + 4} - 6 = 0$$
$$2x^2 + 4 = 36$$
$$(x - 4) \cdot (x + 4) = 0$$
$$x_{1;2} = \pm 4$$

Provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění, proto je potřeba provést zkoušku.

$$\sqrt{2 \cdot (-4)^2 + 4} - 6 = \sqrt{32 + 4} - 6 = \sqrt{36} - 6 = 6 - 6 = 0$$
$$\sqrt{2 \cdot 4^2 + 4} - 6 = \sqrt{32 + 4} - 6 = \sqrt{36} - 6 = 6 - 6 = 0$$

Obě hodnoty jsou opravdu kořeny rovnice, proto $P_{x_1}[4; 0]$, $P_{x_2}[-4; 0]$. Průsečíky dělí definiční obor D_f na tři intervaly, pomocí tabulky popíšeme, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$(-\infty; -4)$	$(-4; 4)$	$(4; \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Tabulka 7: příklad 3, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* Využijeme tvrzení, že limita rozdílu se rovná rozdílu limit a dále vytkneme nejvyšší mocninu před odmocninu, přičemž nesmíme zapomenout na absolutní hodnotu, protože platí, že $\sqrt{x^2} = |x|$, jak je popsáno v kapitole 1.4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4}-6\right) = -6 + \lim_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+4} = -6 + \lim_{x\to\infty}\left(|x|\sqrt{2+\frac{4}{x^2}}\right) =$$

$$= -6 + \infty\cdot(2+0) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+4}-6\right) = -6 + \lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+4} = -6 + \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{2+\frac{4}{x^2}}\right) =$$

$$= -6 + \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{2+\frac{4}{x^2}}\right) = -6 + \infty\cdot(2+0) = \infty$$

Z výpočtu limit neplyne existence vodorovných ani svislých asymptot. Pro koeficient k šikmých asymptot platí:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+4}-6}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{4}{x^2}}-6}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{2+\frac{4}{x^2}}-6}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{2+\frac{4}{x^2}}-\frac{6}{x}\right)}{x} = \sqrt{2+0}-0 = \sqrt{2}$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+4}-6}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{2+\frac{4}{x^2}}-6}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2+\frac{4}{x^2}}-6}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(-\sqrt{2+\frac{4}{x^2}}-\frac{6}{x}\right)}{x} = -\sqrt{2+0}-0 = -\sqrt{2}$$

Pro koeficient q_1 máme:

$$q_1 = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4} - 6 - \sqrt{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+4} - 6 - \sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+4} + 6 + \sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+4} + 6 + \sqrt{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+4}\right)^2 - \left(-6 - \sqrt{2}x\right)^2}{\sqrt{2x^2+4} + 6 + \sqrt{2}x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4 - \left(36 + 12\sqrt{2}x + 2x^2\right)}{\sqrt{2x^2+4} + 6 + \sqrt{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-32 - 12\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+4} + 6 + \sqrt{2}x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-\frac{32}{x} - 12\sqrt{2}\right)}{|x|\cdot\sqrt{2 + \frac{4}{x^2}} + 6 + \sqrt{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-\frac{32}{x} - 12\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{2 + \frac{4}{x^2}} + \frac{6}{x} + \sqrt{2}\right)} = \frac{0 - 12\sqrt{2}}{\sqrt{2+0} + 0 + \sqrt{2}} = \frac{-12\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -6$$

Analogicky pro q_2:

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+4} - 6 + \sqrt{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+4} - 6 + \sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+4} + 6 - \sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+4} + 6 - \sqrt{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+4}\right)^2 - \left(-6 + \sqrt{2}x\right)^2}{\sqrt{2x^2+4} + 6 - \sqrt{2}x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+4 - \left(36 - 12\sqrt{2}x + 2x^2\right)}{\sqrt{2x^2+4} + 6 - \sqrt{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-32 + 12\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+4} + 6 - \sqrt{2}x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\frac{32}{x} + 12\sqrt{2}\right)}{|x|\cdot\sqrt{2 + \frac{4}{x^2}} + 6 - \sqrt{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\frac{32}{x} + 12\sqrt{2}\right)}{-x\cdot\sqrt{2 + \frac{4}{x^2}} + 6 - \sqrt{2}x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\frac{32}{x} + 12\sqrt{2}\right)}{x\left(-\sqrt{2 + \frac{4}{x^2}} + \frac{6}{x} - \sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{0 + 12\sqrt{2}}{-\sqrt{2+0} + 0 - \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -6$$

Funkce f má dvě asymptoty, a to $a_1\colon y = \sqrt{2}x - 6$ a $a_2\colon y = -\sqrt{2}x - 6$.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako složenou funkci.

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x^2+4} - 6\right)' = \left((2x^2+4)^{\frac{1}{2}} - 6\right)' = \frac{1}{2} \cdot (2x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{2x^2+4}}$$

Existuje právě jeden její nulový bod, a to $x = 0$. Monotonii funkce f tak vyšetříme na dvou intervalech.

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

Tabulka 8: příklad 3, f rostoucí / klesající

Funkce f mění v okolí nulového bodu svou monotonii z klesající na rostoucí, proto je zde její lokální minimum. Z hodnoty $f(0) = -4$ plynou jeho souřadnice $[0; -4]$. Monotonie funkce f na jednotlivých intervalech odpovídá jejím limitnímu chování a hodnotám z tabulky 7. Z kladných funkčních hodnot klesá do záporného lokálního minima a poté roste zpět do kladného nekonečna. Ověřme ještě pomocí limit první derivace v nevlastních krajních bodech jejího definičního oboru správnost předchozího výpočtu směrnic šikmých asymptot. $D_{f'} = \mathbb{R}$, tedy:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{2x^2+4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{4}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{2+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{2x^2+4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x\sqrt{2 + \frac{4}{x^2}}} = \frac{2}{-\sqrt{2+0}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dostáváme stejné hodnoty, jako při výpočtu pomocí vzorců.

V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako podíl a jako složenou funkci.

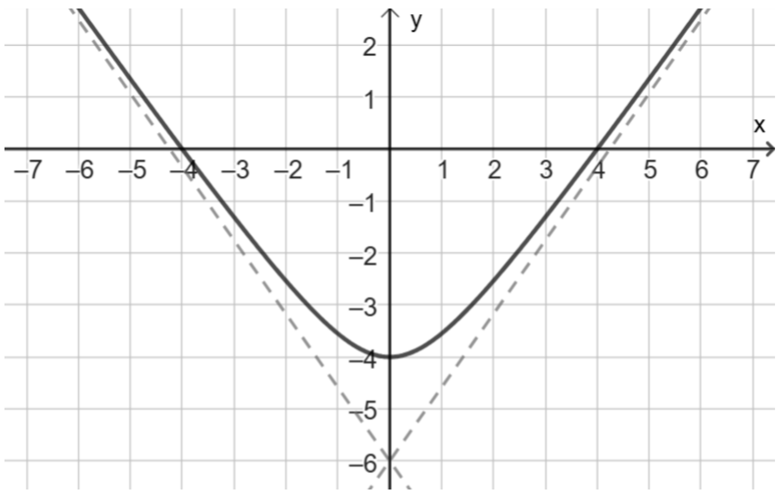
$$f''(x) = \left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+4}}\right)' = \frac{2 \cdot \sqrt{2x^2+4} - 2x \cdot \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+4}}}{2x^2+4} = \frac{2 \cdot \sqrt{2x^2+4} - \frac{4x^2}{\sqrt{2x^2+4}}}{2x^2+4} =$$

$$= \frac{\frac{4x^2+8-4x^2}{\sqrt{2x^2+4}}}{2x^2+4} = \frac{4}{(x^2+2) \cdot \sqrt{2x^2+4}}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje a ta v nabývá pouze kladných funkčních hodnot, proto neexistují žádné inflexní body funkce f a ta je na celém svém definičním oboru konvexní.

	$(-\infty; \infty)$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$
$f(x)$	$\cup$

Tabulka 9: příklad 3, f konvexní / konkávní



Obrázek 30: graf funkce $f(x) = \sqrt{2x^2+4} - 6$

Obor hodnot: $H_f = \langle -4; \infty)$

Globální extrémy: Globální minimum v $x = 0$, tzn. v bodě $[0; -4]$.

Symetrie: Graf funkce f je symetrický podle souřadnicové osy y, což bylo ukázáno v bodě I).

Analytický popis kuželosečky

I) *Převod rovnice do středového tvaru:* Umocněním funkčního předpisu na druhou se zbavíme odmocniny a provedeme úpravu na čtverec.

$$y + 6 = \sqrt{2x^2 + 4}$$
$$y^2 + 12y + 36 = 2x^2 + 4$$
$$(y + 6)^2 - 36 + 36 - 2x^2 = 4$$
$$-\frac{x^2}{2} + \frac{(y + 6)^2}{4} = 1$$

Jedná se o rovnici hyperboly.

II) *Určení charakteristických prvků:* Střed $S[0; -6]$, délky poloos $a = 2, b = \sqrt{2}$, excentricita $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$, hlavní vrcholy $A[0; -4]$, $B[0; -8]$, ohniska $E\left[0; -6 + \sqrt{6}\right]$, $F\left[0; -6 - \sqrt{6}\right]$.

III) *Ověření ohnisková definice:* Každý bod grafu má souřadnice $\left[x;\ \sqrt{2x^2 + 4} - 6\right]$ a musí splňovat, že $\big||EX| - |FX|\big| = 2a$.

$$\left|\sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2x^2 + 4} - 6 + 6 - \sqrt{6}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2x^2 + 4} - 6 + 6 + \sqrt{6}\right)^2}\right| = 4$$
$$\left|\sqrt{3x^2 + 10 - 2\sqrt{12x^2 + 24}} - \sqrt{3x^2 + 10 + 2\sqrt{12x^2 + 24}}\right| = 4$$

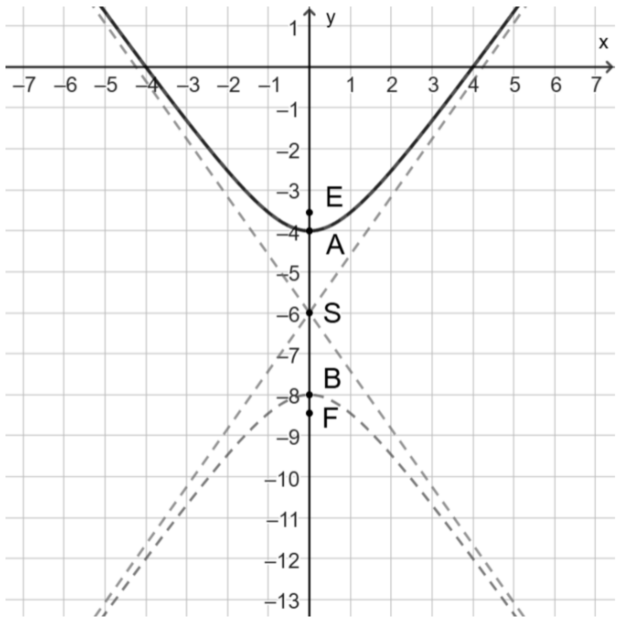
Rovnici umocníme na druhou a upravíme, přičemž pro levou stranu využijeme vzorec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$6x^2 + 20 - 2\sqrt{9x^4 + 12x^2 + 4} = 16$$
$$3x^2 + 2 = \sqrt{9x^4 + 12x^2 + 4}$$

Znovu umocníme na druhou a dostáváme:

$$9x^4 + 12x^2 + 4 = 9x^4 + 12x^2 + 4$$
$$0 = 0$$

Ohnisková definice je splněna.



Obrázek 31: kuželosečka $-\frac{x^2}{2}+\frac{(y+6)^2}{4}=1$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x)=-\sqrt{3x^2+9}+6$

II) Dva hmotné body jsou umístěny v soustavě souřadnic v bodech $A[0;8]$, $B\,[7;0]$, souřadnice jsou uvedeny v metrech. V témže okamžiku se oba dají do pohybu po osách soustavy souřadnic k jejímu počátku. Zatímco hmotný bod umístěný v bodě A se pohybuje rychlostí $v_1=1\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, tak druhý hmotný bod B rychlostí $v_2=2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Vyšetřete funkci vyjadřující vzdálenost hmotných bodů v závislosti na době pohybu. Inspirováno (Kubát & Hrubý, 2014, s. 140)

2.4 Příklad 4: poloviny větví hyperboly

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 12x + 9}$$

Průběh funkce

Funkční předpis není na první pohled nijak známý, obsahuje sice odmocninu, ale o parabolu se jednat nebude, jelikož se pod odmocninou vyskytuje kvadratický trojčlen. Můžeme předpokládat, že funkce bude nabývat jen kladných funkčních hodnot. Pomyslným odstraněním odmocniny z funkčního předpisu dostáváme kvadratické členy $3x^2$ a y^2, které jsou-li na stejné straně rovnice, mají odlišná znaménka. Na základě znalosti středové rovnice hyperboly můžeme očekávat, že se o ni bude jednat i v tomto případě, což ověříme výpočtem.

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Výraz pod odmocninou nesmí být záporný, proto:

$$3x^2 + 12x + 9 \geq 0$$
$$3(x+1)(x+3) \geq 0$$

Ze součinu na levé straně plyne, že $D_f = (-\infty; -3\rangle \cup \langle -1; \infty)$. Funkce f není sudá ani lichá, neboť $f(-x) = \sqrt{3(-x)^2 - 12x + 9} = \sqrt{3x^2 - 12x + 9} \neq \pm f(x)$.

II) *Průsečíky s osami, tabulka kladná / záporná:* Pro P_y platí:

$$f(0) = \sqrt{3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 9} = \sqrt{9} = 3 \rightarrow P_y[0; 3]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$\sqrt{3x^2 + 12x + 9} = 0$$
$$3(x+1)(x+3) = 0$$
$$x_1 = -1; x_2 = -3$$

Provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění, je tedy třeba provést zkoušku.

$$\sqrt{3 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) + 9} = \sqrt{3 - 12 + 9} = 0$$

$$\sqrt{3 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot (-3) + 9} = \sqrt{27 - 36 + 9} = 0$$

Obě hodnoty jsou opravdu kořeny dané rovnice, proto $P_{x_1}[-1; 0]$, $P_{x_2}[-3; 0]$. Průsečíky jsou současně krajními body definičního oboru. Tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na jeho jednotlivých intervalech funkce f nabývá.

	$(-\infty; -3)$	$(-1; \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$

Tabulka 10: příklad 4, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* Limity funkce f v obou nekonečnech vypočteme pomocí vytknutí nejvyšší mocniny před odmocninu, přičemž nesmíme zapomenout na absolutní hodnotu, jelikož platí $\sqrt{x^2} = |x|$, jak je popsáno v kapitole 1.4.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2 + 12x + 9} = \lim_{x\to\infty} |x| \sqrt{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}} = \infty \cdot \left(\sqrt{3 + 0 + 0}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2 + 12x + 9} = \lim_{x\to-\infty} |x| \sqrt{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \left(-x \sqrt{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}\right) =$$

$$= \infty \cdot (3 + 0 + 0) = \infty$$

Na základě předchozích výpočtů můžeme rovnou určit, že limity v ostatních dvou krajních bodech jsou rovny nule, neboť se jedná o průsečíky s osou x. Z výpočtů také plyne, že neexistují vodorovné ani svislé asymptoty. Pro výpočet asymptot šikmých dosadíme do vzorce.

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 12x + 9}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}}{x} = \sqrt{3}$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 12x + 9}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}}{x} = -\sqrt{3}$$

Pro koeficient q_1 dostáváme:

$$q_1 = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+12x+9} - \sqrt{3}x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{3x^2+12x+9} - \sqrt{3}x)(\sqrt{3x^2+12x+9} + \sqrt{3}x)}{\sqrt{3x^2+12x+9} + \sqrt{3}x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+12x+9-3x^2}{\sqrt{3x^2+12x+9} + \sqrt{3}x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(12+\frac{9}{x}\right)}{|x|\sqrt{3+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}} + \sqrt{3}x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(12+\frac{9}{x}\right)}{\sqrt{3}x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)} = \frac{12+0}{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Podobně pak pro koeficient q_2:

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2+12x+9} + \sqrt{3}x) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{3x^2+12x+9} + \sqrt{3}x)(\sqrt{3x^2+12x+9} - \sqrt{3}x)}{\sqrt{3x^2+12x+9} - \sqrt{3}x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+12x+9-3x^2}{\sqrt{3x^2+12x+9} - \sqrt{3}x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(12+\frac{9}{x}\right)}{|x|\sqrt{3+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}} - \sqrt{3}x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(12+\frac{9}{x}\right)}{-x\sqrt{3+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}} - \sqrt{3}x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(12+\frac{9}{x}\right)}{-\sqrt{3}x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - \sqrt{3}x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(12+\frac{9}{x}\right)}{-\sqrt{3}x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)} = \frac{12+0}{-\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)} = \frac{12}{-2\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}$$

Funkce f má dvě asymptoty, a to $a_1\colon y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ a $a_2\colon y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako složenou funkci.

$$f'(x) = \left(\sqrt{3x^2+12x+9}\right)' = \left((3x^2+12x+9)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (3x^2 + 12x + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x + 12) = \frac{6x + 12}{2\sqrt{3x^2 + 12x + 9}} = \frac{3x + 6}{\sqrt{3x^2 + 12x + 9}}$$

Nulový bod první derivace neexistuje, tudíž ani lokální extrém funkce f. Monotonii funkce f na jednotlivých intervalech popisuje následující tabulka.

	$(-\infty; -3)$	$(-1; \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Tabulka 11: příklad 4, f rostoucí / klesající

Monotonie funkce f na jednotlivých intervalech odpovídá jejímu limitnímu chováním i hodnotám z tabulky 10. Funkce f klesá z kladného nekonečna k nule, na svém druhém intervalu od ní naopak do kladného nekonečna roste. Spočítejme ještě limity první derivace v krajních bodech jejího definičního oboru, což nám mimo jiné umožní kontrolu předchozího výpočtu směrnic šikmých asymptot. Jelikož $D_{f'} = (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$, tak:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x + 6}{\sqrt{3x^2 + 12x + 9}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(3 + \frac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}} = \frac{3 + 0}{\sqrt{3 + 0 + 0}} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 6}{\sqrt{3x^2 + 12x + 9}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(3 + \frac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(3 + \frac{6}{x}\right)}{-x\sqrt{3 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \frac{3 + 0}{-\sqrt{3 + 0 + 0}} = -\sqrt{3}$$

Pro nevlastní krajní body dostáváme stejné směrnice jako pomocí vzorců. Určeme ještě směrnici funkce f v okolí $x = -3$ a $x = -1$.

$$\lim_{x \to (-3)^-} \frac{3x + 6}{\sqrt{3x^2 + 12x + 9}} = \lim_{x \to (-3)^-} \frac{3 \cdot (-3)^- + 6}{\sqrt{3 \cdot ((-3)^-)^2 + 12 \cdot (-3)^- + 9}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{3x + 6}{\sqrt{3x^2 + 12x + 9}} = \lim_{x \to (-1)^+} \frac{3 \cdot (-1)^+ + 6}{\sqrt{3 \cdot ((-1)^+)^2 + 12 \cdot (-1)^+ + 9}} = \infty$$

Z výpočtu plyne, že funkce f v okolí daných bodů roste a klesá nekonečně rychle.

V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako složenou funkci a jako podíl.

$$f''(x) = \left(\frac{3x+6}{\sqrt{3x^2+12x+9}}\right)' = \frac{3 \cdot \sqrt{3x^2+12x+9} - (3x+6) \cdot \frac{6x+12}{2\sqrt{3x^2+12x+9}}}{3x^2+12x+9} =$$

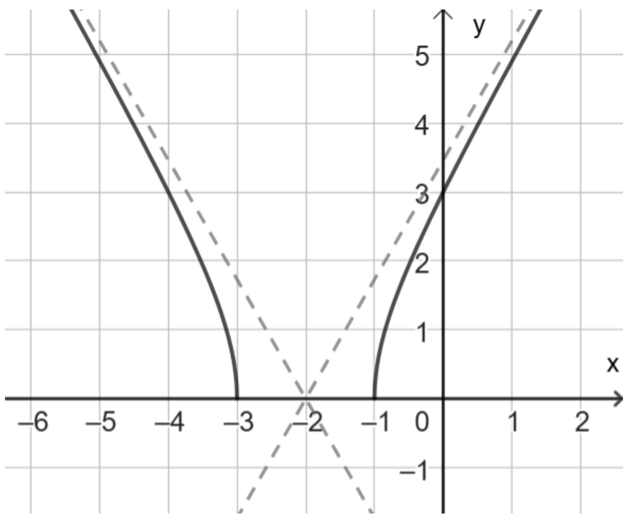
$$= \frac{3 \cdot \sqrt{3x^2+12x+9} - \frac{(3x+6)^2}{\sqrt{3x^2+12x+9}}}{3x^2+12x+9} = \frac{\frac{9x^2+36x+27-9x^2-36x-36}{\sqrt{3x^2+12x+9}}}{3x^2+12x+9} =$$

$$= \frac{-3}{(x^2+4x+3)\sqrt{3x^2+12x+9}}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje, tedy ani inflexní bod funkce f. Jak ukazuje tabulka, nabývá druhá derivace jen záporných funkčních hodnot. Funkce f má konkávní tvar.

	$(-\infty; -3)$	$(-1; \infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$
$f'(x)$	↘	↘
$f(x)$	$\cap$	$\cap$

Tabulka 12: příklad 4, f konvexní / konkávní



Obrázek 32: graf funkce $f(x) = \sqrt{3x^2+12x+9}$

Obor hodnot: $H_f = \langle 0; \infty)$

Globální extrémy: Globální minima v $x = -3$ a v $x = -1$, tzn. v bodech $[-3; 0]$ a $[-1; 0]$.

Symetrie: Graf funkce f je symetrický dle osy $x = -2$, platí $f(-2 - x) = f(-2 + x)$.

$$\sqrt{3(-2-x)^2 + 12(-2-x) + 9} = \sqrt{3(-2+x)^2 + 12(-2+x) + 9}$$
$$3(4 + 4x + x^2) - 24 - 12x + 9 = 3(4 - 4x + x^2) - 24 + 12x + 9$$
$$12 + 12x + 3x^2 - 24 - 12x + 9 = 12 - 12x + 3x^2 - 24 + 12x + 9$$
$$3x^2 - 3 = 3x^2 - 3$$
$$0 = 0$$

Analytický popis kuželosečky

I) *Převod rovnice do středového tvaru:* Umocněním funkčního předpisu na druhou se zbavíme odmocniny a upravíme na čtverec.

$$y^2 = 3x^2 + 12x + 9$$
$$y^2 = 3 \cdot (x+2)^2 - 4 \cdot 3 + 9$$
$$\frac{(x+2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

Jedná se o rovnici hyperboly.

II) *Určení charakteristických prvků:* Střed $S[-2; 0]$, délka hlavní poloosy $a = 1$, délka vedlejší poloosy $b = \sqrt{3}$, excentricita $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, hlavní vrcholy $A[-3; 0]$, $B[-1; 0]$, ohniska $E[-4; 0]$, $F[0; 0]$.

III) *Ověření ohniskové definice:* Pro každý bod grafu $\left[x; \sqrt{3x^2 + 12x + 9}\right]$ musí platit $\big||EX| - |FX|\big| = 2a$.

$$\left|\sqrt{(x+4)^2 + \left(\sqrt{3x^2 + 12x + 9}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{3x^2 + 12x + 9}\right)^2}\right| = 2$$
$$\left|\sqrt{x^2 + 8x + 16 + 3x^2 + 12x + 9} - \sqrt{x^2 + 3x^2 + 12x + 9}\right| = 2$$

$$\left|\sqrt{4x^2+20x+25}-\sqrt{4x^2+12x+9}\right|=2$$

$$4x^2+20x+25+4x^2+12x+9-2\sqrt{16x^4+48x^3+36x^2+80x^3+240x^2+180x+100x^2+300x+225}=4$$

$$8x^2+32x+30=2\sqrt{16x^4+128x^3+376x^2+480x+225}$$

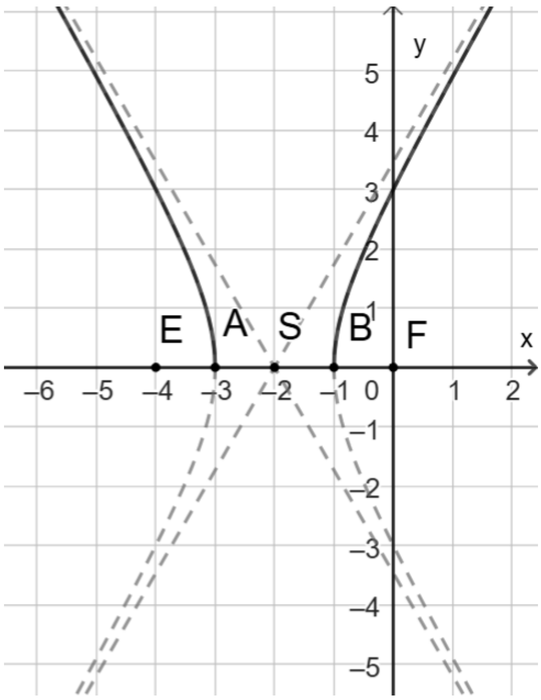
$$4x^2+16x+15=\sqrt{16x^4+128x^3+376x^2+480x+225}$$

$$16x^4+256x^2+225+128x^3+120x^2+480x=16x^4+128x^3+376x^2+480x+225$$

$$16x^4+128x^3+376x^2+480x+225=16x^4+128x^3+376x^2+480x+225$$

$$0=0$$

Ohnisková definice je splněna.



Obrázek 33: kuželosečka $\frac{(x+2)^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x)=-\sqrt{x^2-13x+36}$

II) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+1}+5$

2.5 Příklad 5: polovina kružnice

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 16} - 3$$

Průběh funkce

Nejedná běžnou funkci. Pomyslným odstraněním odmocniny z funkčního předpisu dostáváme kvadratické členy x^2 a y^2, které jsou-li na stejné straně rovnice, mají stejná znaménka. Na základě znalosti středové rovnice elipsy lze odhadnout, že se bude v tomto případě jednat právě o ni. Tento odhad ověříme výpočtem.

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Výraz pod odmocninou nesmí nabývat záporných hodnot, musí platit:

$$-x^2 - 6x + 16 \geq 0$$
$$-(x+8)(x-2) \geq 0$$

Ze součinu na levé straně nerovnice plyne $D_f = \langle -8; 2 \rangle$. Funkce f není sudá ani lichá, neboť $f(-x) = \sqrt{-(-x)^2 - 6 \cdot (-x) + 16} - 3 = \sqrt{-x^2 + 6x + 16} - 3 \neq \pm f(x)$.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka kladná / záporná:* Pro průsečík P_y platí:

$$f(0) = \sqrt{-0^2 - 6 \cdot 0 + 16} - 3 = \sqrt{16} - 3 = 4 - 3 = 1 \rightarrow P_y[0; 1]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$\sqrt{-x^2 - 6x + 16} - 3 = 0$$
$$\sqrt{-x^2 - 6x + 16} = 3$$
$$-x^2 - 6x + 16 = 9$$
$$-x^2 - 6x + 7 = 0$$
$$-(x-1)(x+7) = 0$$
$$x_1 = 1;\ x_2 = -7$$

Provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění, proto je třeba provést zkoušku.

$$\sqrt{-1^2 - 6 \cdot 1 + 16} - 3 = \sqrt{-1 - 6 + 16} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$$
$$\sqrt{-(-7)^2 - 6 \cdot (-7) + 16} - 3 = \sqrt{-49 + 42 + 16} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$$

Obě hodnoty jsou kořeny dané rovnice, proto $P_{x_1}[1;0]$, $P_{x_2}[-7;0]$. Průsečíky rozdělují definiční obor funkce f na tři intervaly. Tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$\langle -8;-7)$	$(-7;1)$	$(1;2\rangle$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Tabulka 13: příklad 5, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* Limity jsou v tomto případě řešitelné pouhým dosazením.

$$\lim_{x\to -8}\left(\sqrt{-x^2-6x+16}-3\right)=\sqrt{-64+48+16}-3=-3$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{-x^2-6x+16}-3\right)=\sqrt{-4-12+16}-3=-3$$

Z výpočtu nevyplývá existence vodorovných ani svislých asymptot. Jelikož funkce f není definována pro $x\to\pm\infty$, neexistují ani asymptoty šikmé.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako složenou funkci, dostáváme:

$$f'(x)=\left(\sqrt{-x^2-6x+16}-3\right)'=\left((-x^2-6x+16)^{\frac{1}{2}}-3\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-x^2-6x+16)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x-6)=\frac{-2x-6}{2\sqrt{-x^2-6x+16}}=\frac{-x-3}{\sqrt{-x^2-6x+16}}$$

Získáváme nulový bod první derivace $x=-3$, pomocí tabulky vyšetříme, zda se jedná o lokální extrém funkce f a v souvislosti s tím i její monotonii na jednotlivých intervalech.

	$(-8;-3)$	$(-3;2)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Tabulka 14: příklad 5, f rostoucí / klesající

Funkce f mění v okolí nulového bodu první derivace svou monotonii, nachází se v něm její lokální maximum. Z hodnoty $f(-3)=2$ plynou jeho souřadnice $[-3;2]$.

Monotonie funkce f na jednotlivých intervalech souhlasí i s jejím limitním chováním a hodnotami z tabulky 13, tedy že roste ze záporných hodnot do kladných a následně klesá zpět ke krajnímu bodu svého definičního oboru. Vypočtěme ještě limity první derivace v krajních bodech jejího definičního oboru. Jelikož $D_{f'} = (-8; 2)$, tak:

$$\lim_{x \to (-8)^+} \frac{-x-3}{\sqrt{-x^2-6x+16}} = \frac{-(-8)^+ - 3}{\sqrt{-((-8)^+)^2 - 6 \cdot (-8)^+ + 16}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-x-3}{\sqrt{-x^2-6x+16}} = \frac{-2^- - 3}{\sqrt{-(2^-)^2 - 6 \cdot 2^- + 16}} = -\infty$$

Funkce f z levého krajního bodu roste nekonečně rychle a do pravého krajního bodu nekonečně rychle klesá.

V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako podíl a jako složenou funkci.

$$f''(x) = \left(\frac{-x-3}{\sqrt{-x^2-6x+16}}\right)' = \frac{-1 \cdot \sqrt{-x^2-6x+16} - (-x-3) \cdot \frac{-2x-6}{2\sqrt{-x^2-6x+16}}}{-x^2-6x+16} =$$

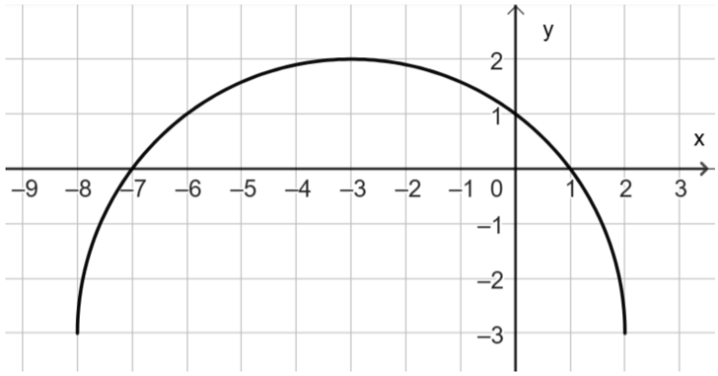
$$= \frac{-1 \cdot \sqrt{-x^2-6x+16} - \frac{(-x-3)^2}{\sqrt{-x^2-6x+16}}}{-x^2-6x+16} = \frac{\frac{x^2+6x-16-x^2-6x-9}{\sqrt{-x^2-6x+16}}}{-x^2-6x+16} =$$

$$= \frac{-25}{(-x^2-6x+16) \cdot \sqrt{-x^2-6x+16}}$$

Druhá derivace nabývá jen záporných funkčních hodnot. Čitatel je záporný a ve jmenovateli je odmocnina obsahující kvadratický trojčlen, kterým je sama násobena. Funkce f nemá žádné inflexní body a je na celém svém definičním oboru je konkávní.

	$(-8; 2)$
$f''(x)$	$-$
$f'(x)$	↘
$f(x)$	$\cap$

Tabulka 15: příklad 5, f konvexní / konkávní



Obrázek 34: graf funkce $f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 16} - 3$

Obor hodnot: $H_f = \langle -3; 2\rangle$

Globální extrémy: Globální minimum v $x = -8$ a v $x = 2$, tzn. v bodě $[-8; -3]$ a $[2; -3]$, globální maximum v $x = -3$, tzn. v bodě $[-3; 2]$.

Symetrie: Funkce f je symetrická podle osy $x = -3$, platí $f(-3 - x) = f(-3 + x)$.

$$\sqrt{-(-3-x)^2 - 6(-3-x) + 16} - 3 = \sqrt{-(-3+x)^2 - 6(-3+x) + 16} - 3$$
$$\sqrt{-9 - 6x - x^2 + 18 + 6x + 16} = \sqrt{-9 + 6x - x^2 + 18 - 6x + 16}$$
$$-x^2 + 25 = -x^2 + 25$$
$$0 = 0$$

Analytický popis kuželosečky

I) *Převod rovnice do středového tvaru:* Umocněním funkčního předpisu na druhou se zbavíme odmocniny, následně provedeme úpravu na čtverec.

$$y + 3 = \sqrt{-x^2 - 6x + 16}$$
$$y^2 + 6y + 9 = -x^2 - 6x + 16$$
$$(y+3)^2 - 9 + (x+3)^2 - 9 = 7$$
$$(x+3)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Jedná se o rovnici kružnice. Náš úvodní odhad, tedy že se bude jednat o elipsu, byl však správný, jelikož kružnici lze vnímat jako elipsu se stejně dlouhou hlavní a vedlejší poloosou.

II) *Určení charakteristických prvků:* Střed $S[-3;-3]$, poloměr $r = 5$.

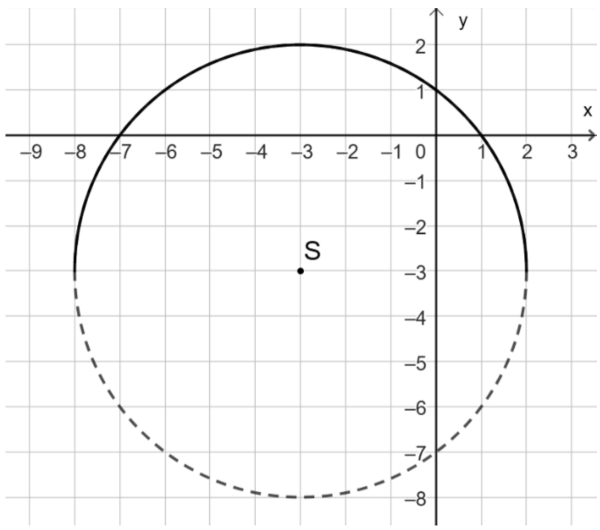
III) *Ověření ohniskové definice:* Všechny body grafu $\left[x; \sqrt{-x^2-6x+16}-3\right]$ musí splňovat, že $|SX| = r$.

$$\sqrt{(x+3)^2 + \left(\sqrt{-x^2-6x+16}-3+3\right)^2} = 5$$

$$\sqrt{x^2+6x+9-x^2-6x+16} = 5$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$5 = 5$$



Obrázek 35: kuželosečka $(y+3)^2 + (x+3)^2 = 25$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x) = -\sqrt{-x^2+4x+12}$

II) $f(x) = \sqrt{-x^2+6x+16}-3$

2.6 Příklad 6: polovina elipsy

$$f(x) = -\sqrt{-2x^2 + 4x + 16}$$

Průběh funkce

Nejedná se o běžnou funkci. V předpisu se sice vyskytuje druhá odmocnina, ovšem obsahuje kvadratický trojčlen. Na první pohled můžeme odhadnout, že funkce bude nabývat jen záporných funkčních hodnot. Při pomyslném odstranění odmocniny, umocněním celého funkčního předpisu na druhou, dostaneme dva kvadratické členy x^2 a y^2, které jsou-li na stejné straně rovnice, mají stejná znaménka. Proto lze očekávat, že bychom mohli jako výslednou křivku dostat elipsu.

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Výraz pod odmocninou nesmí být záporný, proto:

$$-2x^2 + 4x + 16 \geq 0$$
$$-2 \cdot (x + 2)(x - 4) \geq 0$$

Z řešení nerovnice plyne, že $D_f = \langle -2; 4 \rangle$. Funkce f není ani sudá ani lichá, jelikož $f(-x) = -\sqrt{-2 \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 16} = -\sqrt{-2x^2 - 4x + 16} \neq \pm f(-x)$.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka kladná / záporná:* Pro P_y platí:

$$f(0) = -\sqrt{-2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 16} = -\sqrt{16} = -4 \rightarrow P_y[0; -4]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$-\sqrt{-2x^2 + 4x + 16} = 0$$
$$-2x^2 + 4x + 16 = 0$$
$$-2(x + 2)(x - 4) = 0$$
$$x_1 = -2; x_2 = 4$$

Provedli neekvivalentní úpravu umocnění, proto je třeba provést zkoušku.

$$-\sqrt{-2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 16} = -\sqrt{-8 - 8 + 16} = -\sqrt{-16 + 16} = 0$$

$$-\sqrt{-2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 16} = -\sqrt{-32 + 16 + 16} = -\sqrt{-32 + 32} = 0$$

Obě hodnoty jsou opravdu kořeny rovnice, proto $P_{x_1}[-2;0]$, $P_{x_2}[4;0]$. Průsečíky jsou současně krajními body definičního oboru. Dosadíme-li z něj do funkčního předpisu libovolnou hodnotu x, tak dostáváme, že funkce f nabývá na celém svém definičním oboru jen záporných funkčních hodnot, což jsme určili již před začátkem samotných výpočtů z podoby funkčního předpisu.

	$(-2;4)$
$f(x)$	$-$

Tabulka 16: příklad 6, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* Z předchozího výpočtu je patrné, že krajními body definičního oboru jsou přímo průsečíky s osou x. Funkce f je na celém svém definičním oboru spojitá, ten je tvořen jedním uzavřeným intervalem, tedy vodorovné ani svislé asymptoty neexistují. Podobně ani asymptoty šikmé, neboť vzorce sloužících k jejich určení pracují s limitami pro $x \to \pm\infty$, kde ale funkce f není definována.

IV) *První derivace: lokální extrémy, intervaly rostoucí / klesající:* Derivujeme jako složenou funkci.

$$f'(x) = \left(-\sqrt{-2x^2+4x+16}\right)' = \left(-(-2x^2+4x+16)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(-2x^2+4x+16)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4x+4) = \frac{2x-2}{\sqrt{-2x^2+4x+16}}$$

Získáváme nulový bod první derivace $x = 1$. Vyšetříme, zda se jedná o lokální extrém funkce f, určíme její monotonii na příslušných intervalech.

	$(-2;1)$	$(1;4)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Tabulka 17: příklad 6, f rostoucí / klesající

Funkce f mění v okolí nulového bodu první derivace svou monotonii, existuje její lokální minimum. Z hodnoty $f(1) = -3\sqrt{2}$ plynou jeho souřadnice $\left[1;-3\sqrt{2}\right]$. To, že funkce f nejprve klesá do svého lokálního minima, které je záporné, a poté roste zpět, odpovídá i hodnotám z tabulky 16 a jejímu limitnímu chování. Určeme ještě limity první derivace v krajních bodech jejího definičního oboru. Jelikož $D_{f'} = (-2; 4)$, tak:

$$\lim_{x\to(-2)^+} \frac{2x-2}{\sqrt{-2x^2+4x+16}} = \lim_{x\to(-2)^+} -\frac{2\cdot(-2)^+ - 2}{\sqrt{-2\cdot((-2)^+)^2 + 4\cdot(-2)^+ + 16}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to4^-} \frac{2x-2}{\sqrt{-2x^2+4x+16}} = \lim_{x\to4^-} -\frac{2\cdot 4^- - 2}{\sqrt{-2\cdot(4^-)^2 + 2\cdot 4^- + 16}} = \infty$$

Z hodnot je patrné, že funkce f se ke svým krajním bodům přibližuje nekonečně rychle.

V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako složenou funkci a jako podíl.

$$f''(x) = \left(\frac{2x-2}{\sqrt{-2x^2+4x+16}}\right)' = \frac{2\sqrt{-2x^2+4x+16} - (2x-2)\cdot\frac{-4x+4}{2\cdot\sqrt{-2x^2+4x+16}}}{-2x^2+4x+16} =$$

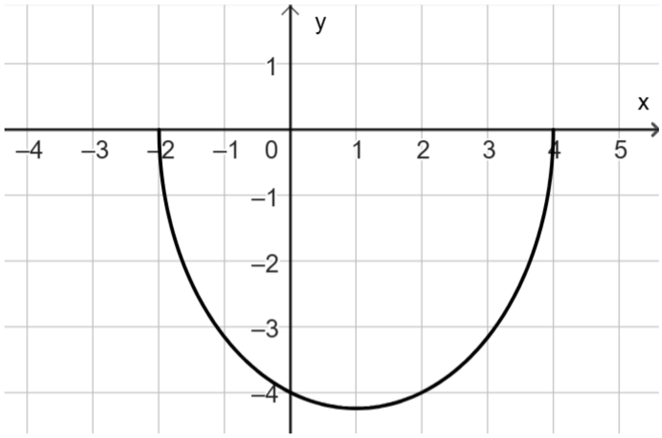
$$= \frac{2\sqrt{-2x^2+4x+16} + \frac{(2x-2)^2}{\sqrt{-2x^2+4x+16}}}{-2x^2+4x+16} = \frac{\frac{-4x^2+8x+32+4x^2-8x+4}{\sqrt{-2x^2+4x+16}}}{-2x^2+4x+16} =$$

$$= \frac{36}{(-2x^2+4x+16)\sqrt{-2x^2+4x+16}} = \frac{18}{(-x^2+2x+8)\sqrt{-2x^2+4x+16}}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje, proto ani inflexní bod funkce f. Druhá derivace nabývá jen kladných funkčních hodnot, jelikož čitatel je kladný a ve jmenovateli se nachází odmocnina násobená kvadratickým trojčlenem, který současně sama obsahuje, ten proto musí být kladný, a tudíž musí být kladný celý jmenovatel. Funkce f má konvexní tvar.

	$(-2; 4)$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$
$f(x)$	$\cup$

Tabulka 18: příklad 6, f konvexní / konkávní



Obrázek 36: graf funkce $f(x) = -\sqrt{-2x^2 + 4x + 16}$

Obor hodnot: $H_f = \langle -3\sqrt{2}; 0 \rangle$

Globální extrémy: Globální minimum v $x = 1$, tzn. v bodě $[1; -3\sqrt{2}]$, globální maximum v $x = -2$ a $x = 4$, tzn. v bodě $[-2; 0]$ a $[4; 0]$.

Symetrie: Graf je symetrický podle osy $x = 1$, platí $f(1 - x) = f(1 + x)$.

$$-\sqrt{-2 \cdot (1-x)^2 + 4(1-x) + 16} = -\sqrt{-2 \cdot (1+x)^2 + 4(1+x) + 16}$$
$$\sqrt{-2 + 4x - 2x^2 + 4 - 4x + 16} = \sqrt{-2 - 4x - 2x^2 + 4 + 4x + 16}$$
$$-2x^2 + 18 = -2x^2 + 18$$
$$0 = 0$$

Analytický popis kuželosečky

I) *Převod rovnice do středového tvaru:* Umocněním funkčního předpisu na druhou se zbavíme odmocniny, poté upravíme na čtverec.

$$y^2 = -2x^2 + 4x + 16$$
$$y^2 = -2(x^2 - 2x) + 16$$
$$y^2 = -2(x-1)^2 - 1 \cdot (-2) + 16$$
$$2(x-1)^2 + y^2 = 18$$
$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$$

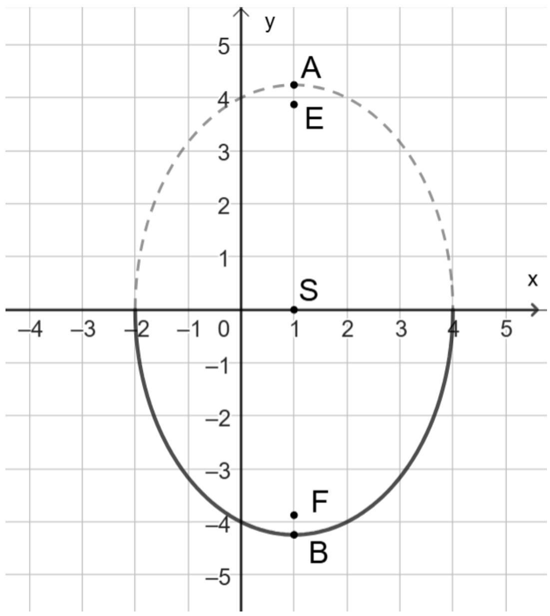
Jedná se o rovnici elipsy.

II) *Určení charakteristických prvků:* Střed $S[1;0]$, délky poloos $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3$. Excentricita $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{18 - 3} = \sqrt{15}$. Hlavní vrcholy $A\left[1;3\sqrt{2}\right]$, $B\left[1;-3\sqrt{2}\right]$, ohniska $E\left[1;\sqrt{15}\right]$, $F\left[1;-\sqrt{15}\right]$.

III) *Ověření ohniskové definice:* Každý bod grafu $\left[x;-\sqrt{-2x^2+4x+16}\right]$ musí splňovat, že $\left||EX|+|FX|\right| = 2a$.

$$\sqrt{(x-1)^2 + \left(-\sqrt{-2x^2+4x+16} - \sqrt{15}\right)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + \left(-\sqrt{-2x^2+4x+16} + \sqrt{15}\right)^2} = 6\sqrt{2}$$

Postup řešení této rovnice z důvodu jeho velkého rozsahu tentokrát neuvádějme.



Obrázek 37: kuželosečka $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x) = 1 - \sqrt{x - \frac{x^2}{4}}$

II) $f(x) = 3\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$

3 Kuželosečky v obecné poloze

Následující úlohy již představují funkce, jejichž grafy tvoří kuželosečky v obecné poloze. Podobně jako v předchozí části se jedná o šest řešených úloh doplněných o několik dalších neřešených sloužících k případnému procvičení. Jelikož je práce s kuželosečkami v obecné poloze náročnější než práce s těmi v poloze základní a charakteristické vlastnosti nejsou na první pohled pomocí středoškolských nástrojů tak jasně čitelné, objeví se průvodní komentáře méně často. Podobně nebude požadováno dohledávání jejich charakteristických prvků (mimo hyperbolu, pro níž určíme vždy střed jako průsečík asymptot) a ověření ohniskové definice. Z grafu pouze určíme, o jaký typ kuželosečky se jedná, což následně analyticky ověříme. K samotné klasifikaci typu kuželosečky využijeme metodu asymptotických směrů popsanou v kapitole 1.5.

Jednotlivé příklady jsou opět doplněny o obrázky grafů zadaných funkcí a jim odpovídajících kuželoseček. V případě, že se graf i kuželosečka shodují, je zařazen obrázek jen jednou.

3.1 Příklad 7: hyperbola s vodorovnou a svislou asymptotou

$$f(x) = \frac{2x - 4}{x - 4}$$

Průběh funkce

Jedná se o lineární lomenou funkci, jejím grafem je rovnoosá hyperbola. Funkční předpis lze upravit do tvaru $f(x) = \frac{4}{x-4} + 2$, z něhož můžeme graf rovnou přibližně načrtnout. Zde ovšem, podobně jako u paraboly v příkladu 1, vyšetřeme průběh této funkce, ať postup poprvé aplikujeme na známý objekt.

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Jmenovatel zlomku nesmí být nulový, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$. Jelikož $f(-x) = \frac{-2x-4}{-x-4} = -\frac{2x+4}{x+4} \neq \pm f(x)$, není funkce f sudá ani lichá.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka kladná / záporná:* Pro průsečík P_y platí:

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0 - 4} = 1 \rightarrow \ P_y\ [0; 1]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$\frac{2x - 4}{x - 4} = 0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

Kořenem je $x = 2$, proto $P_x[2; 0]$. Pomocí průsečíku se definiční obor rozděluje na tři intervaly. Tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$(-\infty; 2)$	$(2; 4)$	$(4; \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Tabulka 19: příklad 7, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* Pro $x \rightarrow \pm\infty$ vypočteme limity pomocí vytknutí nejvyšší mocniny z čitatele i jmenovatele.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4}{x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}=2$$

Pro okolí bodu $x = 4$ řešíme jednostranné limity.

$$\lim_{x\to4^+}\frac{2x-4}{x-4}=\frac{2\cdot4^+-4}{4^+-4}=\infty$$

$$\lim_{x\to4^-}\frac{2x-4}{x-4}=\frac{2\cdot4^--4}{4^--4}=-\infty$$

Dostáváme svislou asymptotu $a_1\colon x = 4$. Současně je z výpočtu limit v obou nekonečnech patrné, že druhá asymptota bude mít tvar $a_2\colon y = 2$.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako podíl.

$$f'(x)=\left(\frac{2x-4}{x-4}\right)'=\frac{2(x-4)-(2x-4)\cdot1}{(x-4)^2}=\frac{2x-8-2x+4}{x^2-8x+16}=\frac{-4}{x^2-8x+16}$$

Nulový bod první derivace neexistuje, tudíž ani lokální extrém funkce f. Monotonii funkce f tak vyšetříme na dvou intervalech.

	$(-\infty;4)$	$(4;\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	↘	↘

Tabulka 20: příklad 7, f rostoucí / klesající

Monotonie funkce f na jednotlivých intervalech odpovídá jejímu limitnímu chování i hodnotám z tabulky 19. Funkce f se vzdaluje od své vodorovné asymptoty a z kladných funkčních hodnot klesá do záporných, v záporném nekonečnu se blíží ke své svislé asymptotě. Z její druhé strany se od ní z kladného nekonečna vzdaluje a klesá opět k vodorovné asymptotě. Ověřme ještě správnost předchozího výpočtu asymptot, tentokrát nejprve upravme předpis funkce f do součtového tvaru.

$$(2x-4) \div (x-4) = 2 + \frac{4}{x-4}$$

Pro $x \to \pm\infty$ můžeme zanedbat zlomek a vidíme, že v nevlastních bodech se funkce f blíží k hodnotám, kterých zde nabývá přímka $y = 2$. Ta je tedy asymptotou. Ke stejnému výsledku bychom se dostali i pomocí výpočtu limit první derivace v nevlastních krajních bodech jejího definičního oboru. Jelikož $D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{4\}$, tak vypočteme ještě limity pro vlastní krajní bod, pro okolí bodu $x = 4$ platí:

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{-4}{x^2-8x+16} = \frac{-4}{(4^+)^2 - 8\cdot 4^+ + 16} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{-4}{x^2-8x+16} = \frac{-4}{(4^-)^2 - 8\cdot 4^- + 16} = -\infty$$

Funkce f klesá v levém i pravém okolí bodu $x = 4$ nekonečně rychle. Proto se jedná o svislou asymptotu s rovnicí $x = 4$, což se shoduje s předchozími výpočty.

V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme opět jako podíl.

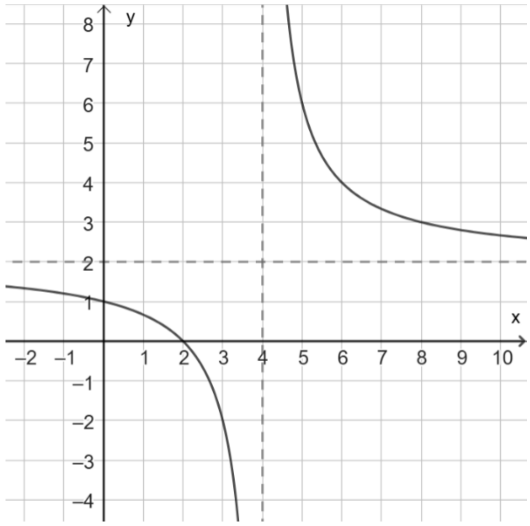
$$f''(x) = \left(\frac{-4}{x^2-8x+16}\right)' = \frac{0\cdot(x^2-8x+16) - (-4)\cdot(2x-8)}{(x^2-8x+16)^2} = \frac{8(x-4)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{8}{(x-4)^3}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje, proto ani inflexní bod funkce f. Chování funkce f tak vyšetříme na dvou intervalech.

	$(-\infty; 4)$	$(4; \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	↘	↗
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Tabulka 21: příklad 7, f konvexní / konkávní



Obrázek 38: graf funkce $f(x) = \frac{2x-4}{x-4}$

Obor hodnot: $H_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

Globální extrémy: Funkce f nemá globální maximum ani globální minimum.

Symetrie: Graf je symetrický podle bodu $[4; 2]$. Pokud funkci f posuneme do počátku, tj. o vektor $\vec{v} = (-4; -2)$, dostaneme nový funkční předpis.

$$g(x) = \frac{2(x+4)-4}{(x+4)-4} - 2 = \frac{2x+4}{x} - 2$$

Tato posunutá funkce potom musí být symetrická dle počátku, proto $f(-x) = -f(x)$.

$$\frac{2(-x)+4}{-x} - 2 = -\left(\frac{2x+4}{x} - 2\right)$$

$$\frac{-2x+4}{-x} - 2 = \frac{-2x-4}{x} + 2$$

$$-2x + 4 + 2x = 2x + 4 - 2x$$

$$0 = 0$$

Analytický popis kuželosečky

Odstraněním zlomku z funkčního předpisu a převedením všech členů na jednu stranu dostáváme rovnici ve tvaru:

$$xy - 2x - 4y + 4 = 0$$

Jedná se o rovnici kuželosečky v obecné poloze. Pro určení jejího konkrétního typu použijeme metodu asymptotických směrů. Dosazením přímky ve tvaru $y = kx + q$ do kuželosečky a následnou úpravou dostáváme:

$$x(kx + q) - 2x - 4(kx + q) + 4 = 0$$

$$kx^2 + qx - 2x - 4kx - 4q + 4 = 0$$

Pro nulovou směrnici k je anulována kvadratická část x^2. Dostáváme první asymptotický směr. Souřadnice x průsečíků svazku přímek daných tímto směrem s kuželosečkou mají tvar:

$$x = \frac{4q - 4}{q - 2}$$

Pro $q = 2$ společný bod neexistuje, proto má první asymptota tvar $a_1 \colon y = 2$. Pro přímku ve tvaru $x = q$ dostáváme druhý asymptotický směr, jelikož se kvadratická část se ve výrazu:

$$qy - 2q - 4y + 4 = 0$$

vzniklém dosazením přímky do kuželosečky neobjevuje. Opět vyjádříme průsečík:

$$y = \frac{2q - 4}{q - 4}$$

Druhá asymptota má rovnici $a_2 \colon x = 4$. Kuželosečka má dva asymptotické směry, dvě asymptoty, grafem příslušné lineární lomené funkce je hyperbola. Její střed leží na průsečíku asymptot, kterým je bod $S[4; 2]$.

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x) = \frac{3x-5}{x-1}$

II) Celkové finanční náklady na výrobu x kusů zboží vyjadřuje vztah $y = 600x + 22\,500.$ (V části „22 50“ jsou zahrnuty např. náklady na strojové vybavení, v části „$600x$“ náklady na suroviny, na mzdy apod.). Zapište funkci vyjadřující závislost výše finančního nákladu potřebného k výrobě jednoho kusu zboží na počtu celkově vyrobených kusů. Detailněji vyšetřete graf této funkce. (Odvárko, 2021, s. 86)

3.2 Příklad 8: hyperbola se šikmou a svislou asymptotou

$$f(x) = \frac{2x^2 + 9x + 9}{2x + 2}$$

Průběh funkce

Funkční předpis je tvořen podílem kvadratické a lineární funkce. Na základě faktů představených v kapitole 1.3 víme, že grafem funkce s takovýmto předpisem je kompletní kuželosečka, konkrétně hyperbola. Funkční předpis můžeme upravit do tvaru:

$$(2x^2 + 9x + 9) \div (2x + 2) = x + \frac{7}{2} + \frac{2}{2x + 2}$$

Z podmínky spojené s nenulovým jmenovatelem plyne existence svislé asymptoty. Pokud bychom současně pracovali s $x \to \pm\infty$, bude zlomek představující zbytek po dělení téměř nulový a hodnoty funkce se budou blížit hodnotám, kterých zde nabývá přímka $y = x + \frac{7}{2}$, tato přímka proto bude druhou asymptotou. Tyto poznatky můžeme ověřit následujícími výpočty.

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Jmenovatel nesmí být nulový, proto $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$. Protože $f(-x) = \frac{2(-x)^2 - 9x + 9}{-2x + 2} = \frac{2x^2 - 9x + 9}{-2x + 2} \neq \pm f(x)$, není funkce f sudá ani lichá.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka kladná / záporná:* Pro P_y platí:

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 + 9}{2 \cdot 0 + 2} = \frac{9}{2} \to P_y \left[0; \frac{9}{2}\right]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$\frac{2x^2 + 9x + 9}{2x + 2} = 0$$

$$2x^2 + 9x + 9 = 0$$

$$2 \cdot (x + 3) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x_1 = -3; x_2 = -\frac{3}{2}$$

Kvadratická rovnice má dva různé kořeny, proto $P_{x_1}[-3;0]$, $P_{x_2}\left[-\frac{3}{2};0\right]$. Průsečíky rozdělují definiční obor na čtyři intervaly, tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$(-\infty;-3)$	$\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2};-1\right)$	$(-1;\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Tabulka 22: příklad 8, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* Limitu v nevlastních krajních bodech definičního oboru vypočteme pomocí vytknutí nejvyšší mocniny z čitatele i jmenovatele.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+9x+9}{2x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{9}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\infty\cdot(2+0+0)}{2+0}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+9x+9}{2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{9}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}=\frac{-\infty\cdot(2+0+0)}{2+0}=-\infty$$

Pro okolí bodu $x=-1$ pracujeme s jednostrannými limitami.

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x^2+9x+9}{2x+2}=\frac{2\cdot((-1)^-)^2+9\cdot(-1)^-+9}{2\cdot(-1)^-+2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x^2+9x+9}{2x+2}=\frac{2\cdot((-1)^+)^2+9\cdot(-1)^++9}{2\cdot(-1)^++2}=\infty$$

Získáváme svislou asymptotu $a_1: x=-1$. Pomocí vzorců vyšetříme existenci šikmé asymptoty.

$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+9x+9}{2x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{9}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{2}{x}\right)}=\frac{2+0+0}{2+0}=1$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+9x+9}{2x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{9}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{2}{x}\right)}=\frac{2+0+0}{2+0}=1$$

Jelikož $k_1 = k_2$, nalezneme pouze jednu asymptotu, určíme její koeficient q.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+9x+9}{2x+2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x+9}{2x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(7+\frac{9}{x}\right)}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}=\frac{7+0}{2+0}=\frac{7}{2}$$

Dostáváme šikmou asymptotu $a_2: y = x + \frac{7}{2}$.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako podíl.

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2+9x+9}{2x+2}\right)'=\frac{(4x+9)(2x+2)-(2x^2+9x+9)\cdot 2}{(2x+2)^2}=$$

$$=\frac{8x^2+8x+18x+18-4x^2-18x-18}{4x^2+8x+4}=\frac{4x^2+8x}{4x^2+8x+4}=\frac{4(x^2+2)}{4(x^2+2x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}=\frac{x(x+2)}{x^2+2x+1}$$

Existují právě dva nulové body první derivace $x_1 = 0$ a $x_2 = -2$. Monotonii funkce f proto vyšetříme na čtyřech intervalech.

	$(-\infty; -2)$	$(-2; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Tabulka 23: příklad 8, f rostoucí / klesající

Funkce f mění v okolí nulových bodů první derivace svou monotonii, existuje lokální maximum se souřadnicemi $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ i lokální minimum se souřadnicemi $\left[0; \frac{9}{2}\right]$. Monotonie funkce f na jednotlivých intervalech odpovídá jejímu limitnímu chování i hodnotám z tabulky 22. Funkce f ze záporného nekonečna roste do svého kladného lokálního extrému a následně klesá zpět a blíží se své asymptotě. Z její druhé strany klesá z kladného nekonečna do lokálního minima a následně z něj zpět roste, zůstává v kladných hodnotách. Ověřme ještě správnost předchozího výpočtů asymptot. Rovnici šikmé asymptoty jsme odvodili již v úvodu příkladu. Její směrnici bychom mohli určit také pomocí limit první derivace v nevlastních krajních bodech jejího definičního oboru.

Jelikož $D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, tak vypočtěme ještě limity ve vlastním krajním bodě. Pro okolí bodu $x = -1$ platí:

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1} = \frac{((-1)^+)^2 + 2\cdot(-1)^+}{((-1)^+)^2 + 2\cdot(-1)^+ \ + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1} = \frac{((-1)^-)^2 + 2\cdot(-1)^-}{((-1)^-)^2 + 2\cdot(-1)^- + 1} = -\ \infty$$

Funkce f v okolí bodu $x = -1$ klesá nekonečně rychle. Proto je přímka $x = -1$ svislou asymptotou.

V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako podíl.

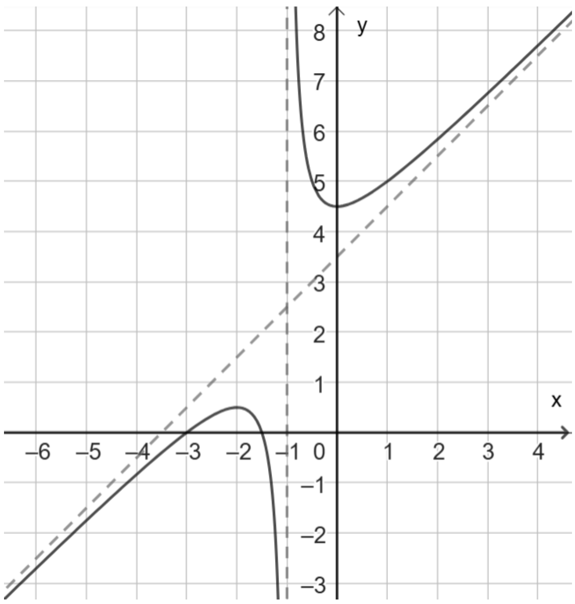
$$f''(x) = \left(\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}\right)' = \frac{(2x+2)(x^2+2x+1) - (x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+4x^2+2x+2x^2+4x+2-2x^3-2x^2-4x^2-4x}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje, proto ani inflexní bod funkce f. Monotonii funkce f tak vyšetříme na dvou intervalech.

	$(-\infty;-1)$	$(-1;\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	↘	↗
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Tabulka 24: příklad 8, f konvexní / konkávní



Obrázek 39: graf funkce $f(x) = \frac{2x^2+9x+9}{2x+2}$

Obor hodnot: $H_f = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{2}; \infty\right)$

Globální extrémy: Funkce f nemá globální maximum ani globální minimum.

Symetrie: Graf je symetrický podle středu $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$. Funkci posuneme do počátku o vektor $\vec{v} = \left(1; -\frac{5}{2}\right)$, dostáváme nový funkční předpis.

$$g(x) = \frac{2(x-1)^2 + 9(x-1) + 9}{2(x-1)+2} - \frac{5}{2} = \frac{2x^2 - 4x + 2 + 9x - 9 + 9}{2x - 2 + 2} - \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x} - \frac{5}{2} = \frac{2x^2 + 5x + 2 - 5x}{2x} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Posunutá funkce musí být souměrná podle počátku, platí $f(-x) = -f(x)$.

$$\frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x}$$

$$-\frac{x^2 + 1}{x} = -\frac{x^2 + 1}{x}$$

$$0 = 0$$

Analytický popis kuželosečky

Z funkčního předpisu odstraníme zlomek, tím dostáváme rovnici:

$$2x^2 - 2xy + 9x - 2y + 9 = 0$$

Jedná se o rovnici kuželosečky v obecné poloze. Její typ určíme metodou asymptotických směrů. Pro vzájemnou polohu kuželosečky a přímky ve tvaru $y = kx + q$ platí:

$$2x^2 - 2x(kx + q) + 9x - 2(kx + q) + 9 = 0$$

$$x^2(2 - 2k) - 2qx + 9x - 2kx - 2q + 9 = 0$$

Směrnice $k = 1$ určuje první asymptotický směr. Průsečíky jím určeného svazku přímek s kuželosečkou mají souřadnici x rovnu:

$$x = \frac{2q - 9}{7 - 2q}$$

Pro $q = \frac{7}{2}$ společný bod neexistuje, proto má první asymptota tvar $a_1 : y = x + \frac{7}{2}$. Pro přímku ve tvaru $x = q$ také dochází k anulaci kvadratické části.

$$2q^2 - 2qy + 9q - 2y + 9 = 0$$

Dostáváme tak i druhý asymptotický směr. Průsečíky svazku jím určených přímek s kuželosečkou mají souřadnici y rovnu:

$$y = \frac{2q^2 + 9q + 9}{2q + 2}$$

Společný bod pro $q = -1$ neexistuje, dostáváme druhou asymptotu $a_2 : x = -1$. Existence dvou asymptotických směrů ukazuje, že se jedná o hyperbolu. Na průsečíku asymptot se nachází její střed $S\left[\frac{5}{2}; -1\right]$.

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x) = \frac{x^2+7x+10}{x+1}$

II) $f(x) = \frac{x^2-9x+18}{x-2}$

3.3 Příklad 9: větev hyperboly

$$f(x) = -x - 2 + 2\sqrt{x^2 - 8x + 25}$$

Průběh funkce

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Kvadratický trojčlen pod odmocninou nabývá pouze kladných hodnot, existenční podmínka spojená s odmocninou je splněna, $D_f = \mathbb{R}$. Platí $f(-x) = -(-x) - 2 + 2\sqrt{(-x)^2 - 8(-x) + 25} = x - 2 + 2\sqrt{x^2 + 8x + 25} \neq \pm f(x)$, proto funkce f není sudá ani lichá.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka kladná / záporná:* Pro P_y platí:

$$f(0) = -0 - 2 + 2\sqrt{0^2 - 8 \cdot 0 + 25} = -2 + 2\sqrt{25} = -2 + 2 \cdot 5 = 8 \rightarrow P_y[0; 8]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$-x - 2 + 2\sqrt{x^2 - 8x + 25} = 0$$
$$2\sqrt{x^2 - 8x + 25} = x + 2$$
$$4x^2 - 32x + 100 = x^2 + 4x + 4$$
$$3x^2 - 36x + 96 = 0$$
$$x^2 - 12x + 32 = 0$$
$$(x - 4)(x - 8) = 0$$
$$x_1 = 4; x_2 = 8$$

Provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění, je třeba provést zkoušku.

$$-4 - 2 + 2\sqrt{4^2 - 8 \cdot 4 + 25} = -6 + 2\sqrt{16 - 32 + 25} = -6 + 2\sqrt{9} = 0$$
$$-8 - 2 + 2\sqrt{8^2 - 8 \cdot 8 + 25} = -10 + 2\sqrt{64 - 64 + 25} = -10 + 2\sqrt{25} = 0$$

Obě hodnoty jsou opravdu kořeny rovnice, proto $P_{x_1}[4; 0]$, $P_{x_2}[8; 0]$. Průsečíky rozdělují definiční obor na tři intervaly. Tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$(-\infty; 4)$	$(4; 8)$	$(8; \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Tabulka 25: příklad 9, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru:* Při výpočtu pravého krajního bodu rozšíříme výraz v limitě zlomkem $\frac{-x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}}{-x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}}$ a následně při úpravách v čitateli využijeme vzorec $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Dále vytkneme nejvyšší mocninu z čitatele i jmenovatele, s absolutní hodnotou pracujeme tak, jak je popsáno v kapitole 1.4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(-x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}\right)\left(-x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}\right)}{-x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x-2)^2-4(x^2-8x+25)}{-x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4-4x^2+32x-100}{-x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+36x-96}{-x-2-2|x|\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{36}{x}-\frac{96}{x^2}\right)}{x\left(-1-\frac{2}{x}-2\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}\right)}=\frac{\infty\cdot(-3+0-0)}{\left(-1-0-2\sqrt{1-0+0}\right)}=\infty$$

Při výpočtu levého krajního bodu využijeme tvrzení, že součet a rozdíl limit se rovná limitě součtu a rozdílu a vytkneme před limity konstanty.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}\right)=-\lim_{x\to-\infty}x-\lim_{x\to-\infty}2+2\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-8x+25}=$$

$$=-(-\infty)-2+2\cdot\sqrt{(-\infty)^2-8\cdot(-\infty)+25}=\infty-2+2\cdot\sqrt{\infty+8\cdot\infty+25}=$$

$$=\infty-2+2\cdot\infty=\infty$$

Z výpočtu limit neplyne existence vodorovných ani svislých asymptot. Pro šikmé asymptoty dosadíme do vzorců.

$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-2+2|x|\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}}{x}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-1-\frac{2}{x}+2\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}\right)}{x} = -1-0+2\sqrt{1-0+0} = 1$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-2+2|x|\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-2-2x\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-1-\frac{2}{x}-2\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}\right)}{x} =$$

$$= -1-0-2\sqrt{1-0+0} = -3$$

Podobně pro koeficient q_1:

$$q_1 = \lim_{x\to\infty}(-x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}-x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-2x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}\right)\left(-2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}\right)}{-2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(-2x-2)^2-(2\sqrt{x^2-8x+25})^2}{-2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+8x+4-4x^2+32x-100}{-2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{40x-96}{-2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(40-\frac{96}{x}\right)}{-2x-2-2|x|\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(40-\frac{96}{x}\right)}{x\left(-2-\frac{2}{x}-2\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}\right)} = \frac{40-0}{-2-0-2\sqrt{1-0+0}} = -10$$

Při výpočtu q_2 postupujeme analogicky:

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty}(-x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}+3x) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(2x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}\right)\left(2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}\right)}{2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-2)^2-\left(2\sqrt{x^2-8x+25}\right)^2}{2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-8x+4-4x^2+32x-100}{2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{24x-96}{2x-2-2\sqrt{x^2-8x+25}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(24-\frac{96}{x}\right)}{2x-2-2|x|\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(24-\frac{96}{x}\right)}{2x-2+2x\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(24-\frac{96}{x}\right)}{x\left(2-\frac{2}{x}+2\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}\right)} =$$

$$= \frac{24-0}{2-0+2\sqrt{1-0+0}} = 6$$

Existují tak dvě asymptoty $a_1: y = x - 10$, $a_2: y = -3x + 6$.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako složenou funkci.

$$f'(x) = \left(-x-2+2\sqrt{x^2-8x+25}\right)' = \left(-x-2+2(x^2-8x+25)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -1 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2-8x+25)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-8) = -1 + \frac{2x-8}{\sqrt{x^2-8x+25}} =$$

$$= \frac{-\sqrt{x^2-8x+25}+2x-8}{\sqrt{x^2-8x+25}}$$

Pro nulový bod platí:

$$\sqrt{x^2-8x+25} = 2x-8$$
$$x^2-8x+25 = 4x^2-32x+64$$
$$x^2-8x+13 = 0$$
$$x_{1;2} = 4 \pm \sqrt{3}$$

Provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění, je třeba provést zkoušku.

$$\sqrt{\left(4+\sqrt{3}\right)^2 - 8\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)+25} = 2\left(4+\sqrt{3}\right)-8$$

$$\sqrt{16+8\sqrt{3}+3-32-8\sqrt{3}+25} = 8+2\sqrt{3}-8$$

$$2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Hodnota $x = 4 + \sqrt{3}$ zkoušku splňuje, nicméně pro hodnotu $x = 4 - \sqrt{3}$ dostáváme:

$$\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(4-\sqrt{3}\right) + 25} = 2\left(4-\sqrt{3}\right) - 8$$

$$\sqrt{16 - 8\sqrt{3} + 3 - 32 + 8\sqrt{3} + 25} = 8 - 2\sqrt{3} - 8$$

$$2\sqrt{3} \neq -2\sqrt{3}$$

Existuje tedy právě jeden nulový bod první derivace. Monotonii funkce f tak vyšetříme na dvou intervalech.

	$(-\infty; 4+\sqrt{3})$	$(4+\sqrt{3}; \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

Tabulka 26: příklad 9, f rostoucí / klesající

Funkce f v okolí nulového bodu první derivace mění svou monotonii, nachází se zde její lokální minimum, z hodnoty $f(4+\sqrt{3})$ plynou jeho souřadnice $\left[4+\sqrt{3}; -6+3\sqrt{3}\right]$. Monotonie funkce f na jednotlivých intervalech odpovídá i jejímu limitnímu chování a hodnotám z tabulky 25. Funkce f nejprve klesá z kladného nekonečna do záporného lokálního minima a následně roste zpět do kladného nekonečna. Ověřme ještě pomocí limit první derivace v nevlastních krajních bodech jejího definičního oboru správnost předchozího výpočtu šikmých asymptot. $D_{f'} = \mathbb{R}$, tedy:

$$\lim_{x\to\infty}\left(-1 + \frac{2x-8}{\sqrt{x^2-8x+25}}\right) = -1 + \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{8}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}} =$$

$$= -1 + \frac{2-0}{\sqrt{1-0+0}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-1 + \frac{2x-8}{\sqrt{x^2-8x+25}}\right) = -1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{8}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}} =$$

$$= -1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{8}{x}\right)}{-x \cdot \sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}} = -1 + \frac{2-0}{-\sqrt{1-0+0}} = -3$$

Dostáváme stejné směrnice jako při výpočtu pomocí vzorců.

V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako podíl a jako složenou funkci.

$$f''(x) = \left(-1 + \frac{2x-8}{\sqrt{x^2-8x+25}}\right)' = \frac{2\sqrt{x^2-8x+25} - (2x-8)\cdot\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+25}}}{x^2-8x+25} =$$

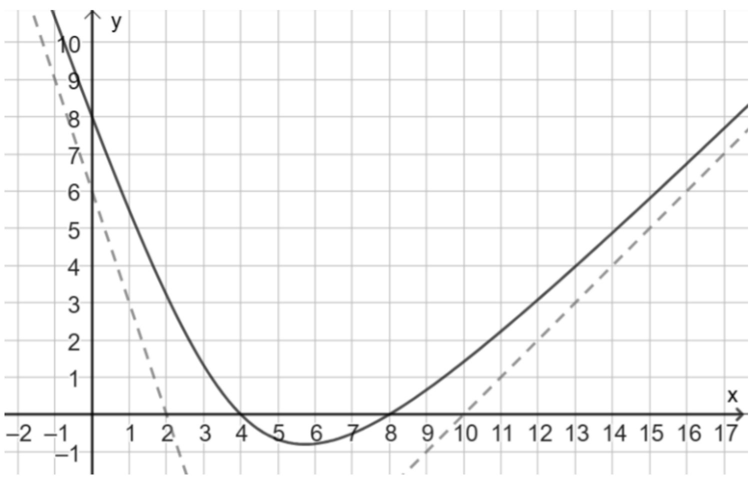
$$= \frac{2\sqrt{x^2-8x+25} - \frac{(2x-8)^2}{2\sqrt{x^2-8x+25}}}{x^2-8x+25} = \frac{\frac{4x^2-32x+100-4x^2+32x-64}{2\sqrt{x^2-8x+25}}}{x^2-8x+25} =$$

$$= \frac{18}{(x^2-8x+25)\cdot\sqrt{x^2-8x+25}}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje, tedy ani inflexní bod funkce f. Druhá derivace nabývá jen kladných funkčních hodnot, jelikož čitatel je kladný a ve jmenovateli se nachází odmocnina obsahující kvadratický trojčlen, kterým je sama násobena, tedy jmenovatel musí být také kladný. Funkce f je na celém svém definičním oboru konvexní.

	$(-\infty;\infty)$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$
$f(x)$	$\cup$

Tabulka 27: příklad 9, f konvexní / konkávní



Obrázek 40: graf funkce $f(x) = -x - 2 + 2\sqrt{x^2-8x+25}$

Obor hodnot: $H_f = \langle -6 + 3\sqrt{3}; \infty)$

Globální extrémy: Globální minimum v $x = 4 + \sqrt{3}$, tzn. bodě $[4 + \sqrt{3}; -6 + 3\sqrt{3}]$.

Symetrie: Funkce f je symetrická podle osy úhlu, který svírají obě asymptoty. Početní ověření tentokrát vynecháme.

Analytický popis kuželosečky

Funkční předpis umocníme na druhou, dostáváme rovnici kuželosečky v obecné poloze:

$$-3x^2 + 2xy + y^2 + 36x + 4y - 96 = 0$$

Její typ určíme metodou asymptotických směrů. Přímka $x = q$ neanuluje veškeré kvadratické členy, využijeme přímku ve tvaru $y = kx + q$. Pro její společné body s kuželosečkou platí:

$$-3x^2 + 2x(kx + q) + (kx + q)^2 + 36x + 4(kx + q) - 96 = 0$$

$$x^2(k^2 + 2k - 3) + 2qx + 2qkx + q^2 + 36x + 4kx + 4q - 96 = 0$$

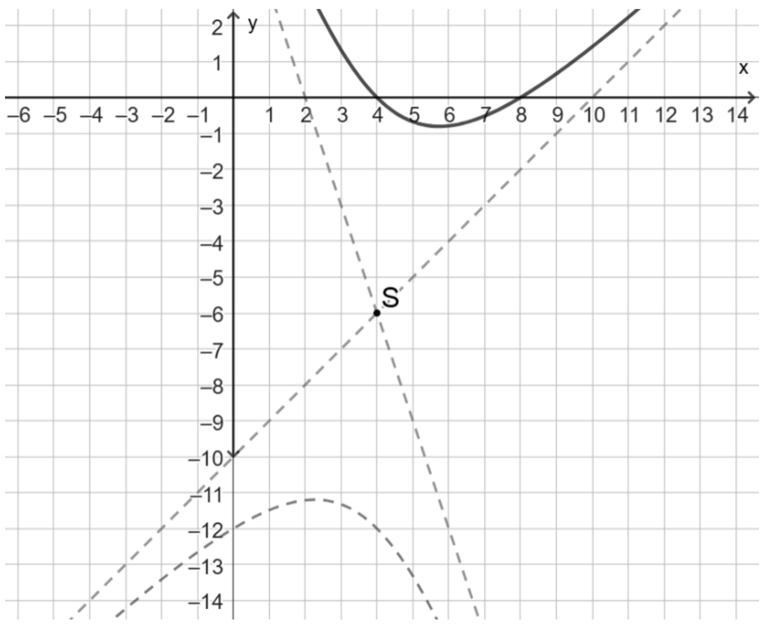
Kvadratický trojčlen v závorce je nulový pro $k = 1$ a pro $k = -3$. Dostáváme tak rovnou dva asymptotické směry. Průsečíky přímek se směrem prvního z nich s kuželosečkou mají souřadnici x:

$$x = \frac{-q^2 - 4q + 96}{4q + 40}$$

Pro $q = -10$ bude přímka asymptotou. Z druhého asymptotického směru pro souřadnici x průsečíků platí:

$$x = \frac{-q^2 - 4q + 96}{24 - 4q}$$

Pro $q = 6$ se jedná o druhou asymptotu. Existují dva asymptotické směry, dvě asymptoty, jedná se o hyperbolu, graf funkce f tvoří její část. Na průsečíku asymptot se nachází její střed $S[4; -6]$.



Obrázek 41: kuželosečka $-3x^2 + 2xy + y^2 + 36x + 4y - 96 = 0$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x) = -x - 6 + 2\sqrt{x^2 + 9}$.

II) $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 16}$

3.4 Příklad 10: části větví hyperboly

$$f(x) = x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

Průběh funkce

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Výraz pod odmocninou nesmí být záporný, proto:

$$x^2 - 5x + 4 \geq 0$$
$$(x - 1) \cdot (x - 4) \geq 0$$

Ze součinu na levé straně rovnice plyne, že $D_f = (-\infty; 1\rangle \cup \langle 4; \infty)$. Současně jelikož $f(-x) = -x - 7 + \sqrt{(-x)^2 + 5x + 4} = -x - 7 + \sqrt{x^2 + 5x + 4} \neq \pm f(x)$, tak není funkce f sudá ani lichá.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka kladná / záporná:* Pro průsečík P_y platí:

$$f(0) = 0 - 7 + \sqrt{0^2 - 5 \cdot 0 + 4} = 0 - 7 + \sqrt{4} = -7 + 2 = -5 \rightarrow P_y[0; -5]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 0$$
$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 7 - x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 49 - 14x + x^2$$
$$9x = 45$$
$$x = 5$$

Provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění, proto je třeba provést zkoušku.

$$5 - 7 + \sqrt{5^2 - 5 \cdot 5 + 4} = -2 + \sqrt{25 - 25 + 4} = -2 + \sqrt{4} = 0$$

Hodnota $x = 5$ zkoušku splňuje, rovnice má jedno řešení, tedy $P_x[5; 0]$. Průsečík rozděluje definiční obor na tři intervaly. Tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$(-\infty; 1)$	$(4; 5)$	$(5; \infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

Tabulka 28: příklad 10, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru:* Pro $x \to \infty$ využijeme tvrzení, že součet a rozdíl limit se rovná limitě součtu a rozdílu.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-7+\sqrt{x^2-5x+4}\right)= \lim_{x\to\infty}(x-7)+\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-5x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x-7)+\lim_{x\to\infty}|x|\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}= \infty-7+\infty\cdot\sqrt{1-0+0}=\infty$$

Při výpočtu levého krajního bodu rozšíříme výraz v limitě zlomkem $\frac{x-7-\sqrt{x^2-5x+4}}{x-7-\sqrt{x^2-5x+4}}$ a pro úpravu čitatele použijeme vzorec $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. V závěru výpočtu nezapomeňme, že $\sqrt{x^2}=|x|$, jak je popsáno v kapitole 1.4.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-7+\sqrt{x^2-5x+4}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-7+\sqrt{x^2-5x+4}\right)\left(x-7-\sqrt{x^2-5x+4}\right)}{x-7-\sqrt{x^2-5x+4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-7)^2-(x^2-5x+4)}{x-7-\sqrt{x^2-5x+4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-14x+49-x^2+5x-4}{x-7-\sqrt{x^2-5x+4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-9x+45}{x-7-|x|\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-9x+45}{x-7+x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-9+\frac{45}{x}\right)}{x\left(1-\frac{7}{x}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)}=\frac{-9+0}{1-0+\sqrt{1-0+0}}=-\frac{9}{2}$$

Pro zbylé dva krajní body vyřešíme limity přímým dosazením.

$$\lim_{x\to1}\left(x-7+\sqrt{x^2-5x+4}\right)=1-7+\sqrt{1-5+4}=-6$$

$$\lim_{x\to4}\left(x-7+\sqrt{x^2-5x+4}\right)=4-7+\sqrt{16-20+4}=-3$$

Z výpočtů výše plyne existence vodorovné asymptoty $a_1\colon y=-\frac{9}{2}$. Pro šikmé asymptoty dosadíme do vzorce.

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 7 + |x|\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(1 - \frac{7}{x} + \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}})}{x} = 1 - 0 + \sqrt{1 - 0 + 0} = 2$$

Při výpočtu k_2 využijeme znalosti, že výraz v čitateli jde pro $x \to -\infty$ k hodnotě $-\frac{9}{2}$, což jsme určili v předchozích výpočtech. Potom jednoduchým dosazením dostáváme:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}}{x} = \frac{-\frac{9}{2}}{-\infty} = 0$$

Získáváme tak směrnici asymptoty, kterou jsme již určili výše. Vypočtěme koeficienty q, u výpočtu prvního z nich postupujeme analogicky jako při hledání limity v levém krajním bodě definičního oboru.

$$q_1 = \lim_{x\to\infty}(x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4} - 2x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}\right)\left(-x - 7 - \sqrt{x^2 - 5x + 4}\right)}{-x - 7 - \sqrt{x^2 - 5x + 4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(-x - 7)^2 - (x^2 - 5x + 4)}{-x - 7 - \sqrt{x^2 - 5x + 4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 14x + 49 - x^2 + 5x - 4}{-x - 7 - \sqrt{x^2 - 5x + 4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{19x + 45}{-x - 7 - |x|\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(19 - \frac{45}{x}\right)}{x\left(-1 - \frac{7}{x} - \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}\right)} =$$

$$= \frac{19 - 0}{-1 - 0 - \sqrt{1 - 0 + 0}} = -\frac{19}{2}$$

Pro druhý koeficient opět využijeme výpočtů výše, kde jsme zcela stejnou limitu již řešili a existenci asymptoty jsme z ní již odvodili, tedy rovnou můžeme říci, že:

$$q_2 = \lim_{x\to\infty}(x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4} - 0x) = -\frac{9}{2}$$

Existují tak dvě asymptoty $a_1\colon y = -\frac{9}{2}$, $a_2\colon y = 2x - \frac{19}{2}$.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako složenou funkci.

$$f'(x) = \left(x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}\right)' = \left(x - 7 + (x^2 - 5x + 4)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 1 - 0 + \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 5x + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 5) = 1 + \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 4}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 2x - 5}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 5x + 4}}$$

Pro nulový bod musí platit:

$$2\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 2x - 5 = 0$$

$$2\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 5 - 2x$$

$$4x^2 - 20x + 16 = 25 - 20x + 4x^2$$

$$-9 \neq 0$$

Rovnice nemá řešení, nulový bod první derivace ani lokální extrém funkce f tak neexistuje. Monotonii funkce f vyšetříme na dvou intervalech.

	$(-\infty; 1)$	$(4; \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

Tabulka 29: příklad 10, f rostoucí / klesající

Monotonie funkce f na jednotlivých intervalech odpovídá jejímu limitnímu chování i hodnotám z tabulky 28. Funkce f se nejprve vzdaluje od vodorovné asymptoty ke krajnímu bodu svého definičního oboru, poté roste ze záporných hodnot k šikmé asymptotě v kladném nekonečnu. Vypočtěme ještě limity první derivace v krajních bodech jejího definičního oboru a zkontrolujme tak mimo jiné správnost výpočtu směrnic šikmých asymptot. $D_{f'} = (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$, pro nevlastní krajní body platí:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2x - 5}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 5x + 4}}\right) = 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(2 - \frac{5}{x}\right)}{2|x|\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}} = 1 + \frac{2 - 0}{2\sqrt{1 - 0 + 0}} = 2$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{2x-5}{2\cdot\sqrt{x^2-5x+4}}\right)=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{2|x|\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=$$

$$=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{-2x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=1+\frac{2-0}{-2\sqrt{1-0+0}}=0$$

Dostáváme směrnice odpovídající hodnotám získaným pomocí vzorců. Pomocí limit první derivace ve vlastních krajních bodech jejího definičního oboru určeme také směrnice funkce f v okolí bodů $x=1$ a $x=4$.

$$\lim_{x\to 1^-}\left(1+\frac{2x-5}{2\cdot\sqrt{x^2-5x+4}}\right)=1+\frac{2\cdot 1^- -5}{2\cdot\sqrt{(1^-)^2-5\cdot 1^-+4}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+}\left(1+\frac{2x-5}{2\cdot\sqrt{x^2-5x+4}}\right)=1+\frac{2\cdot 4^+ -5}{2\cdot\sqrt{(4^+)^2-5\cdot 4^++4}}=\infty$$

Funkce f v okolí svých vlastních krajních bodů roste a klesá nekonečně rychle.

V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako podíl a jako složenou funkci.

$$f''(x)=\left(1+\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}\right)'=\frac{(2\cdot 2\sqrt{x^2-5x+4}-(2x-5)\cdot 2\cdot\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}}{4(x^2-5x+4)}=$$

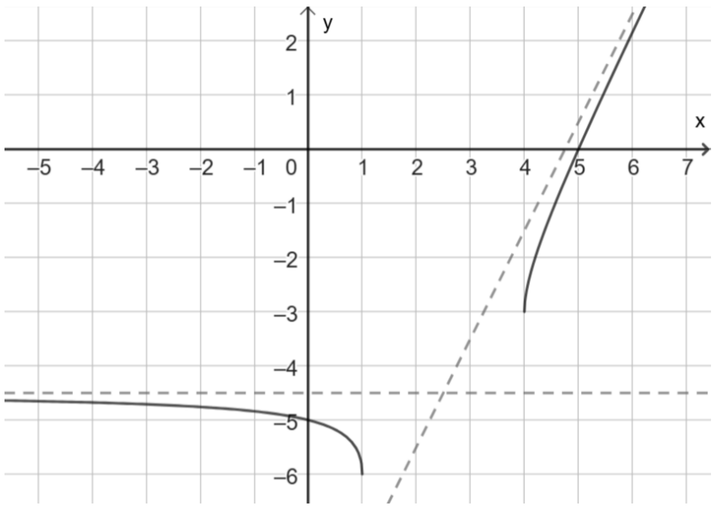
$$=\frac{4\sqrt{x^2-5x+4}-\frac{(2x-5)^2}{\sqrt{x^2-5x+4}}}{4x^2-20x+16}=\frac{\frac{4x^2-20x+16-4x^2+20x-25}{\sqrt{x^2-5x+4}}}{4x^2-20x+16}=$$

$$=\frac{-9}{4\cdot(x^2-5x+4)\cdot\sqrt{x^2-5x+4}}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje. Ta současně nabývá jen záporných funkčních hodnot. Čitatel je záporný a ve jmenovateli se nachází odmocnina obsahující kvadratický trojčlen, kterým je sama násobena, jmenovatel musí být proto kladný. Funkce f nemá inflexní body a je na celém svém definičním oboru konkávní.

	$(-\infty; 1)$	$(4; \infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$
$f'(x)$	$\searrow$	$\searrow$
$f(x)$	$\cap$	$\cap$

Tabulka 30: příklad 10, f konvexní / konkávní



Obrázek 42: graf funkce $f(x) = x - 7 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

Obor hodnot: $H_f = \left\langle -6; -\frac{9}{2} \right) \cup \langle -3; \infty)$

Globální extrémy: Globální minimum v $x = 1$, tzn. v bodě $[1; -6]$.

Symetrie: Žádné celkové symetrie grafu příslušné funkce f neexistují.

Analytický popis kuželosečky

Funkční předpis umocníme, abychom se zbavili odmocniny. Dostáváme rovnici kuželosečky v obecné poloze:

$$-2xy + y^2 - 9x + 14y + 45 = 0$$

Její konkrétní typ určíme metodou asymptotických směrů. Kvadratická část není dosazením přímky ve tvaru $x = q$ zcela anulována, proto využijeme přímku ve tvaru $y = kx + q$.

$$-2x(kx + q) + (kx + q)^2 - 9x + 14(kx + q) + 45 = 0$$

$$x^2(k^2-2k)-2qx+2qkx+q^2-9x+14kx+14q+45=0.$$

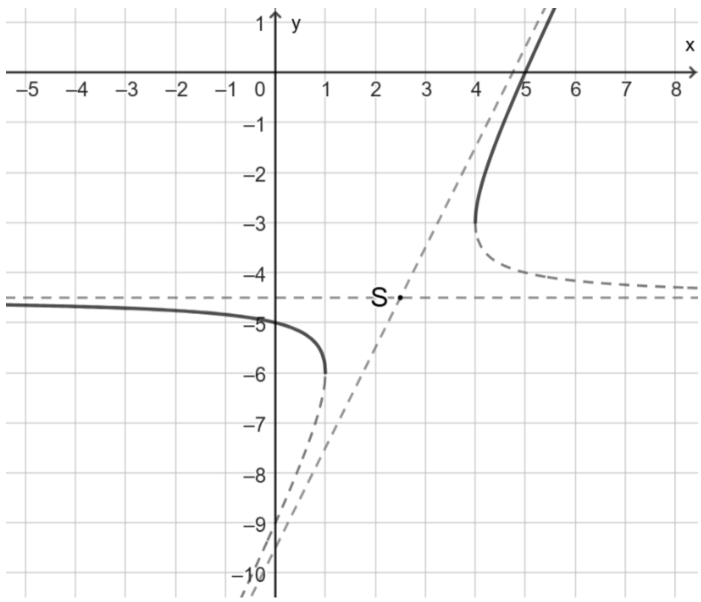
Směrnice $k=0$ a $k=2$ určují dva asymptotické směry. Pro první z nich lze vyjádřit souřadnice x průsečíků jím určeného svazku přímek s kuželosečkou jako:

$$x=\frac{q^2+14q+45}{2q+9}.$$

Pro $q=-\frac{9}{2}$ dostáváme asymptotu $a_1: y=-\frac{9}{2}$. Podobně pro druhý asymptotický směr a společné body s kuželosečkou platí:

$$x=-\frac{q^2+14q+45}{2q+19}$$

Pro $q=-\frac{19}{2}$ dostáváme druhou asymptotu $a_2: y=2x-\frac{19}{2}$. Kuželosečka má dva asymptotické směry, dvě asymptoty. Graf funkce f je proto částí této hyperboly. Na průsečíku asymptot leží její střed $S\left[\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right]$.



Obrázek 43: kuželosečka $-2xy+y^2-9x+14y+45=0$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x)=-x+2\sqrt{x^2-4}$.

II) $f(x)=-x+8-\sqrt{x^2-10x+16}$

3.5 Příklad 11: část elipsy

$$f(x) = x + \sqrt{25 - x^2}$$

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Výraz pod odmocninou nesmí nabývat záporných hodnot, musí platit:

$$25 - x^2 \geq 0$$
$$(5 - x) \cdot (5 + x) \geq 0$$

a $D_f = \langle -5; 5 \rangle$. Neboť $f(-x) = -x + \sqrt{25 - (-x)^2} = -x + \sqrt{25 - x^2} \neq \pm f(x)$, není funkce f ani sudá ani lichá.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka hodnot:* Pro P_y platí:

$$f(0) = 0 + \sqrt{25 - 0^2} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow P_y[0; 5]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$x + \sqrt{25 - x^2} = 0$$
$$\sqrt{25 - x^2} = -x$$
$$25 - x^2 = x^2$$
$$2x^2 - 25 = 0$$
$$\left(\sqrt{2}x - 5\right) \cdot \left(\sqrt{2}x + 5\right) = 0$$
$$x_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2};\ x_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění, proto je třeba provést zkoušku.

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{25 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \neq 0$$

$$-\frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{25 - \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{25}{2}} =$$

$$= -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0$$

Zkouška není pro $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ splněna, rovnice má proto jeden kořen, tedy $P_x\left[-\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right]$. Průsečík rozděluje definiční obor na dva intervaly. Tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$\left\langle -5; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\right\rangle$
$f(x)$	$-$	$+$

Tabulka 31: příklad 11, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* Limity řešíme přímým dosazením krajních bodů definičního oboru do funkčního předpisu.

$$\lim_{x \to -5}\left(x + \sqrt{25 - x^2}\right) = -5 + \sqrt{25 - (-5)^2} = -5$$

$$\lim_{x \to 5}\left(x + \sqrt{25 - x^2}\right) = 5 + \sqrt{25 - 5^2} = 5$$

Funkce f je definována na uzavřeném intervalu a je zde spojitá, vodorovné ani svislé asymptoty neexistují. Vzorce pro výpočet šikmých asymptot nemůžeme použít, protože pracují s $x \to \pm\infty$, kde ale funkce f není definována. Neexistují proto žádné asymptoty.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako složenou funkci.

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{25 - x^2}\right)' = \left(x + (25 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = 1 + \frac{1}{2} \cdot (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) =$$

$$= 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{\sqrt{25 - x^2} - x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Nulový bod první derivace musí splňovat:

$$\sqrt{25 - x^2} - x = 0$$

$$\sqrt{25 - x^2} = x$$

$$25 - x^2 = x^2$$
$$25 - 2x^2 = 0$$
$$\left(5 - \sqrt{2}x\right)\left(5 + \sqrt{2}x\right) = 0$$
$$x_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2};\ x_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění, proto je třeba provést zkoušku.

$$\sqrt{25 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{25}{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{2} =$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$\sqrt{25 - \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{25}{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} =$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \neq 0$$

Záporná hodnota zkoušku nesplňuje, nulovým bodem první derivace je pouze $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Monotonii funkce f vyšetříme na dvou intervalech.

	$\left(-5; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

Tabulka 32, příklad 11, f rostoucí / klesající

Pro $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ dostáváme lokální maximum. Z hodnoty $f\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}$ plynou jeho souřadnice $\left[\frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\sqrt{2}\right]$. Monotonie funkce f na jednotlivých intervalech odpovídá jejímu limitnímu chování i hodnotám z tabulky 31. Funkce f nejprve ze záporných funkčních hodnot roste, dosahuje kladného lokálního maxima, následně klesá, zůstává ale kladná. Vypočtěme ještě limity první derivace v krajních bodech jejího definičního oboru, jelikož $D_{f'} = (-5; 5)$, tak:

$$\lim_{x\to(-5)^+}\frac{\sqrt{25-x^2}-x}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{\sqrt{25-((-5)^+)^2}-(-5)^+}{\sqrt{25-((-5)^+)^2}}=\infty$$

$$\lim_{x\to5^-}\frac{\sqrt{25-x^2}-x}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{\sqrt{25-(5^-)^2}-5^-}{\sqrt{25-(5^-)^2}}=-\infty$$

V okolí levého krajního bodu roste funkce f nekonečně rychle. Pro okolí pravého krajního bodu nekonečně rychle klesá.

V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako složenou funkci a jako podíl.

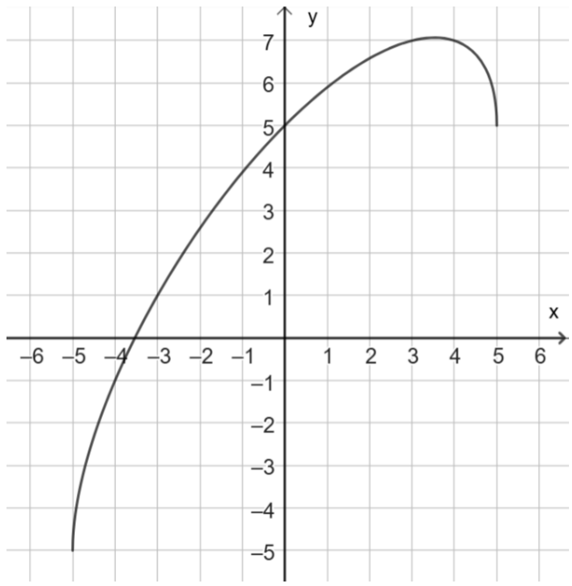
$$f''(x)=\left(1-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)'=-\frac{1\cdot\sqrt{25-x^2}-x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}}{25-x^2}=-\frac{\sqrt{25-x^2}+\frac{2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}}{25-x^2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{25-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}}{25-x^2}=-\frac{\frac{25-x^2+x^2}{\sqrt{25-x^2}}}{25-x^2}=\frac{-25}{(25-x^2)\cdot\sqrt{25-x^2}}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje. Ta nabývá jen záporných funkčních hodnot, jelikož čitatel je záporný a jmenovatel obsahuje součin odmocniny a výrazu, který je v ní sám obsažen, jmenovatel tak musí být kladný. Funkce f je na celém svém definičním oboru konkávní.

	$(-5;5)$
$f''(x)$	$-$
$f'(x)$	$\searrow$
$f(x)$	$\cap$

Tabulka 33: příklad 11, f konvexní / konkávní



Obrázek 44: graf funkce $f(x) = x + \sqrt{25 - x^2}$

Obor hodnot: $H_f = \langle -5; 5\sqrt{2} \rangle$

Globální extrémy: Globální maximum v $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, tzn. v bodě $\left[\frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\sqrt{2}\right]$, globální minimum v $x = -5$, tzn. v bodě $[-5; -5]$.

Symetrie: Žádné celkové symetrie příslušného grafu funkce f neexistují.

Analytický popis kuželosečky

Umocněním funkčního předpisu na druhou se zbavíme odmocniny a dostáváme rovnici kuželosečky v obecné poloze:

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 25 = 0$$

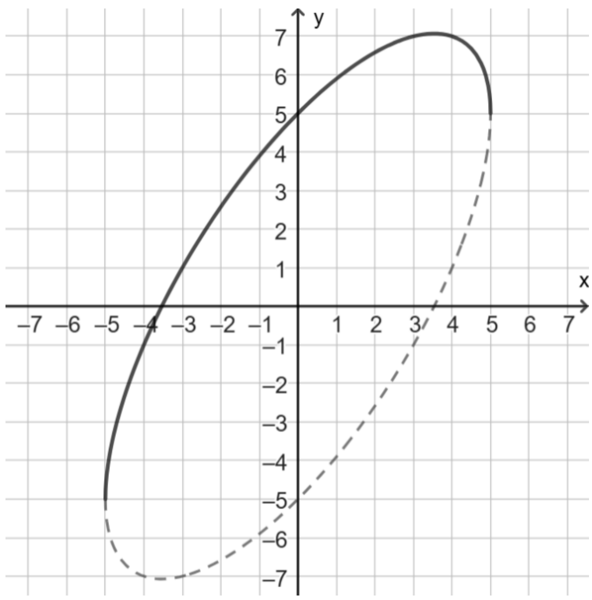
Její konkrétní typ určíme metodou asymptotických směrů. Pro vzájemnou polohu s přímkou ve tvaru $y = kx + q$ platí:

$$2x^2 - 2x(kx + q) + (kx + q)^2 - 25 = 0$$
$$x^2(k^2 - 2k + 2) - 2qx + 2qkx + q^2 - 25 = 0$$

Součin $x^2(k^2 - 2k + 2)$ ale není pro žádné k nulový – diskriminant výrazu v závorce je záporný. Pokusíme se nalézt asymptotický směr znovu pomocí přímky ve tvaru $x = q$.

$$q^2 - 2qy + y^2 - 25 = 0$$

I přes úspěšné anulování kvadratického členu x^2 v rovnici zůstal kvadratický člen y^2. Ani dosazení této přímky nevede ke kompletní anulaci kvadratické části. Neexistuje žádný asymptotický směr, daná kuželosečka je elipsa, grafem funkce f je pak její část.



Obrázek 45: kuželosečka $2x^2 - 2xy + y^2 - 25 = 0$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x) = -x - \sqrt{16 - x^2}$

II) $f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$

3.6 Příklad 12: část paraboly

$$f(x) = -x + 7 - 4\sqrt{4 - x}$$

Průběh funkce

I) *Definiční obor, sudost, lichost:* Výraz pod odmocninou nesmí nabývat záporných hodnot, musí platit, že $4 - x \geq 0$, proto $D_f = (-\infty; 4\rangle$. Funkce f není sudá ani lichá, neboť $f(-x) = -(-x) + 7 - 4\sqrt{4 - (-x)} = x + 7 - 4\sqrt{4 + x} \neq \pm f(x)$.

II) *Průsečíky se souřadnicovými osami, tabulka kladná / záporná:* Pro P_y platí:

$$f(0) = -0 + 7 - 4\sqrt{4 - 0} = 7 - 8 = -1 \rightarrow P_y[0; -1]$$

Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$.

$$-x + 7 - 4\sqrt{4 - x} = 0$$
$$7 - x = 4\sqrt{4 - x}$$
$$49 - 14x + x^2 = 64 - 16x$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$(x + 5)(x - 3) = 0$$
$$x_1 = -5; x_2 = 3$$

Jelikož jsme provedli neekvivalentní úpravu umocnění, je třeba provést zkoušku.

$$-(-5) + 7 - 4\sqrt{4 - (-5)} = 5 + 7 - 4\sqrt{9} = 12 - 12 = 0$$
$$-3 + 7 - 4\sqrt{4 - 3} = 4 - 4\sqrt{1} = 0$$

Obě hodnoty jsou opravdu kořeny rovnice, proto $P_{x_1}[-5; 0]$, $P_{x_2}[3; 0]$. Průsečíky rozdělují definiční obor na tři intervaly. Tabulka popisuje, jakých funkčních hodnot na nich funkce f nabývá.

	$(-\infty; -5)$	$(-5; 3)$	$(3; 4\rangle$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Tabulka 34: příklad 12, f kladná / záporná

III) *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty:* V pravém krajním bodě vypočteme limitu přímým dosazením do funkčního předpisu.

$$\lim_{x\to 4}\left(-x+7-4\sqrt{4-x}\right) = -4+7-4\sqrt{4-4} = 3$$

Při výpočtu levého krajního bodu rozšíříme výraz v limitě zlomkem $\frac{-x+7+4\sqrt{4-x}}{-x+7+4\sqrt{4-x}}$ a při úpravě čitatele využijeme vzorec $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. V závěru výpočtu vhodně vytkneme mocniny z čitatele i jmenovatele, při vytýkání před odmocninu nezapomeňme, že platí $\sqrt{x^2}=|x|$, jak je pospáno v kapitole 1.4.

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-x+7-4\sqrt{4-x}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{\left(-x+7-4\sqrt{4-x}\right)\left(-x+7+4\sqrt{4-x}\right)}{-x+7+4\sqrt{4-x}} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{(-x+7)^2-\left(4\sqrt{4-x}\right)^2}{-x+7+4\sqrt{4-x}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-14x+49-64+16x}{-x+7+4\sqrt{4-x}} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2x-15}{-x+7+4|x|\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2x-15}{-x+7-4x\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{15}{x^2})}{x\left(-1+\frac{7}{x}-4\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{-\infty\cdot(1+0+0)}{(-1+0-4\cdot 0)} = \infty$$

Z výpočtů limit nevyplývá existence vodorovných ani svislých asymptot. Pro šikmé asymptoty můžeme použít jen vzorec pro $x\to-\infty$, jelikož pro $x\to\infty$ není funkce f definována.

$$k = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x+7-4\sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x+7-4|x|\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x+7+4x\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(-1+\frac{7}{x}+4\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)}{x} = -1+0+4\sqrt{0-0} = -1$$

$$q = \lim_{x\to -\infty}\left(-x+7-4\sqrt{4-x}+x\right) = \lim_{x\to -\infty}7-4\cdot\lim_{x\to -\infty}\sqrt{4-x} = 7-4\sqrt{4+\infty} = -\infty$$

Koeficient q ale není reálné číslo, ani tato asymptota proto neexistuje.

IV) *První derivace: lokální extrémy, tabulka rostoucí / klesající:* Derivujeme jako složenou funkci.

$$f'(x) = \left(-x + 7 - 4\sqrt{4-x}\right)' = \left(-x + 7 - 4(4-x)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -1 - 4 \cdot \frac{1}{2}(4-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -1 + \frac{2}{\sqrt{4-x}} = \frac{-\sqrt{4-x}+2}{\sqrt{4-x}}$$

Pro nulový bod platí:

$$-\sqrt{4-x} + 2 = 0$$

$$\sqrt{4-x} = 2$$

$$4 - x = 4$$

$$x = 0$$

Provedli jsme neekvivalentní úpravu umocnění, je třeba provést zkoušku.

$$-\sqrt{4-0} + 2 = -\sqrt{4} + 2 = -2 + 2 = 0$$

Hodnota $x = 0$ je opravdu nulovým bodem první derivace. Monotonii funkce f tak vyšetříme na dvou intervalech.

	$(-\infty; 0)$	$(0; 4)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Tabulka 35: příklad 12, f rostoucí / klesající

V okolí nulového bodu první derivace se monotonie funkce f mění z klesající na rostoucí, jedná se o lokální minimum. Z hodnoty $f(0) = -1$ plynou jeho souřadnice $[0; -1]$. Růst a klesání funkce f na jednotlivých intervalech odpovídá i jejímu limitnímu chování a hodnotám z tabulky 34. Funkce f z kladného nekonečna klesá ke svému zápornému lokálnímu minimu a následně roste zpět do kladných hodnot. Vypočtěme ještě limity první derivace v krajních bodech jejího definičního oboru a zkontrolujme tak mimo jiné správnost předchozího výpočtu směrnic šikmých asymptot. Neboť $D_{f'} = (-\infty; 4)$, tak pro nevlastní krajní bod máme:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{4-x}}\right) = \lim_{x \to -\infty}(-1) + \lim_{x \to -\infty}\frac{2}{\sqrt{4-x}} = -1 + \frac{2}{\sqrt{4-(-\infty)}} = -1$$

Dostáváme stejnou hodnotu, jako při použití vzorce. Určeme ještě směrnici funkce f v okolí bodu $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4^-}\left(-1+\frac{2}{\sqrt{4-x}}\right) = -1+\frac{2}{\sqrt{4-4^-}} = \infty$$

V okolí daného bodu funkce f roste nekonečně rychle.

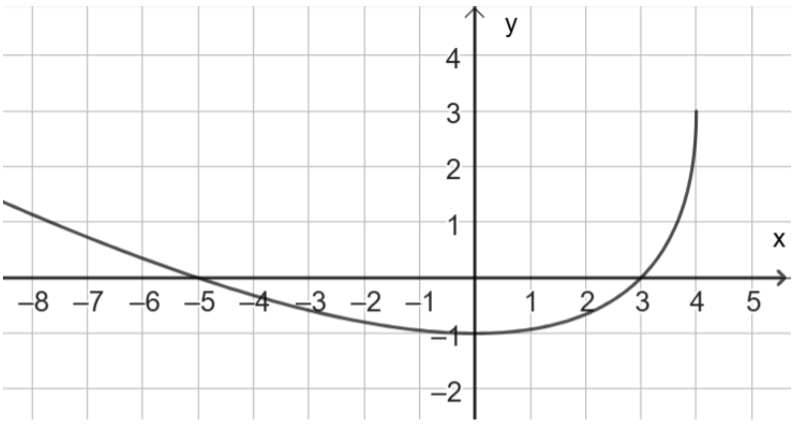
V) *Druhá derivace: inflexní body, tabulka konvexní / konkávní:* Derivujeme jako složenou funkci a jako podíl.

$$f''(x) = \left(-1+\frac{2}{\sqrt{4-x}}\right)' = \frac{0\cdot\sqrt{4-x}-2\cdot\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{4-x} = \frac{1}{(4-x)\cdot\sqrt{4-x}}$$

Nulový bod druhé derivace neexistuje. Ta nabývá jen kladných funkčních hodnot, jelikož čitatel je kladný a ve jmenovateli se nachází odmocnina obsahující kvadratický trojčlen, kterým je sama násobena, tedy jmenovatel musí být také kladný. Funkce f je na celém svém definičním oboru konvexní.

	$(-\infty; 4)$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$
$f(x)$	$\cup$

Tabulka 36: příklad 12, f konvexní / konkávní



Obrázek 26: graf funkce $f(x) = -x + 7 - 4\sqrt{4-x}$

Obor hodnot: $H_f = \langle -1; \infty)$

Globální extrémy: Globální minimum v $x = 0$, tzn. v bodě $[0;\ -1]$.

Symetrie: Žádné celkové symetrie grafu příslušné funkce f neexistují.

Analytický popis kuželosečky

Funkční předpis umocníme, abychom se zbavili odmocniny. Dostáváme rovnici kuželosečky v obecné poloze:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 14y - 15 = 0$$

Pomocí metody asymptotických směrů určíme její typ. Přímka s rovnicí $x = q$ neanuluje kvadratické členy kompletně, její směr není asymptotický. Pomocí přímky $y = kx + q$ dostáváme:

$$x^2 + 2x(kx + q) + (kx + q)^2 + 2x - 14(kx + q) - 15 = 0$$

$$x^2(k^2 + 2k + 1) + 2qx + 2qkx + q^2 + 2x - 14kx - 14q - 15 = 0$$

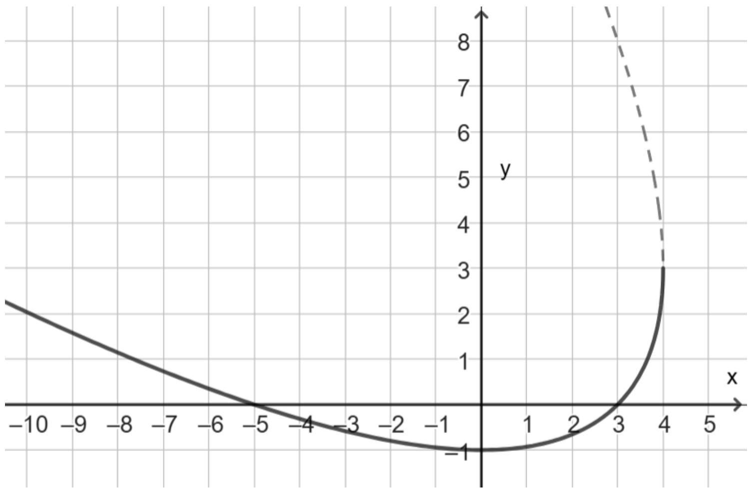
Kvadratická část je anulována pro $k = -1$, dostáváme asymptotický směr. Určíme souřadnice x společných bodů jím určeného svazku přímek s kuželosečkou:

$$16x + q^2 - 14q - 15 = 0$$

$$x = \frac{-q^2 + 14q + 15}{16}$$

Pro každé q mají dané přímky s kuželosečkou právě jeden průsečík. Existuje jeden asymptotický směr, jedná se o parabolu, na základě předchozích výpočtů víme, že grafem funkce f je její část. Směrnice *k* asymptotického směru udává směrnici osy této paraboly.

Pozn.: Během vyšetřování průběhu funkce f jsme nalezli přímku a: $y = -x + \infty$, kterou jsme nepovažovali za asymptotu. Směrnici přímky a jsme určili také pomocí limity první derivace pro $x \to -\infty$. Můžeme si všimnou, že ona směrnice $k = -1$ udává asymptotický směr. Pokud bychom přímku $y = -x$ pomyslně posunuli do nekonečna na ose y, stala by se asymptotou, což nám přesně říká daná limita. Tzn., že se parabola postupně „zrovnoběžňuje“ se svou osou.



Obrázek 47: kuželosečka $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 14y - 15 = 0$

Obdobné úlohy k procvičení

I) $f(x) = -x + 7 - 4\sqrt{4 - x}$

II) $f(x) = x - 4 + \sqrt{4 - x}$

Závěr

Cílem této práce bylo představit možnost zadání kuželoseček funkčními předpisy a vytvořit sbírku úloh využitelnou na gymnáziích, které tento vztah ilustrují, konkrétně se soustředí na vyšetření průběhu funkce. Cílem též bylo vždy souvislost mezi grafem funkce a kuželosečkou ukázat skrze analytický popis kuželosečky, tedy ten žákům gymnázií nejbližší. Domnívám se, že se mi cíl podařilo naplnit.

Po úvodní části první kapitoly připomínající klasické definice kuželoseček se druhá podkapitola věnuje výskytu tématu kuželoseček ve školách. Shrnujeme, že se s kuželosečkami (opomeneme-li kružnici) setkávají žáci poprvé právě v souvislosti s funkcemi (konkrétně funkcí nepřímé úměrnosti), později na gymnáziích se daná spojitost již nutně nerozebírá, připomíná se pouze v souvislosti s kvadratickou funkcí a parabolou a lineární lomenou funkcí a rovnoosou hyperbolou. Tyto informace nás přivádí k myšlence, že funkci může odpovídat graf s tvarem kuželosečky, přičemž následně je tento vztah hlouběji rozebrán. Sbírka pak postupně prochází různé možnosti podob kuželoseček zadaných funkčními předpisy, po vyšetření průběhu funkce navíc dává danou křivku do souvislosti s analytickou interpretací konkrétní kuželosečky.

Práci by bylo možné rozšířit např. v souvislosti s tématem výuky kuželoseček ve školách, kdy bychom se mohli zabývat také tím, jakým způsobem je k výuce kuželoseček přistupováno v zahraničí a zda je např. v tamějších školách souvislost s funkcemi do výuky zařazena. Podobně by bylo možné do práce doplnit popis konkrétních závislostí, např. chemických či fyzikálních, jejichž grafy tvoří právě kuželosečky.

Seznam použitých informačních zdrojů

Monografie a učebnice

Boček, L. (1987). *Analytická geometrie kuželoseček pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku* (3. vyd.). SPN.

Boček, L., & Kočandrle, M. (2020). *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie* (dotisk 3. vyd.). Prometheus.

Dvořáková, J., Fuchs, E., Pažoutová, M., Pohořelý, S., Řídká, Ř., Topičková, J., & Zelendová, E. (2013). *Standardy pro základní vzdělávání: Matematika a její aplikace*. https://archiv-nuv.npi.cz/t/zarazeni-standardu-do-rvp-zv.html.

Glaeser, G., Odehnal, B., & Stachel, H. (2016). *The universe of conics: From the ancient Greeks to 21st century developments*. Springer Spektrum. https://doi.or g/10.1007/978-3-662-45450-3.

Hrubý, D., & Kubát, J. (2014). *Matematika pro gymnázia*: *Diferenciální a integrální počet* (dotisk 3. vyd.). Prometheus.

Kuřina, F. (1996). *Deset pohledů na geometrii*. Matematický ústav AV ČR. https://kramerius.lib.cas.cz/view/uuid:3bed474a-24e6-11e2-83d0-005056a60003?page=uuid:3bed6e5b-24e6-11e2-83d0-005056a60003.

Lávička, M. (2002). *Geometrie 1: Základy geometrie v rovině*. Západočeská univerzita.

Macálková, L., Zemková, K., & Zemek, V. (2019). *Matematika pro střední školy – 10 díl: Komplexní čísla, polynomy, matice, základy diferenciálního a integrálního počtu – Učebnice*. Didaktis.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2023). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2022). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/.

Odvárko, O. (2021). *Matematika pro gymnázia: Funkce* (dotisk 4. vyd.). Prometheus.

Otruba, K. (2010). Kuželosečky (zdánlivě) nestředoškolsky. In *Sborník ze XIV. semináře o filosofických otázkách matematiky a fyziky* (s. 84–92). Komise pro vzdělávání učitelů matematiky a fyziky JČMF ve spolupráci s Gymnáziem Velké Meziříčí. https://www.gvm.cz/images/stories/o-studiu/seminare/15-seminar/sbornik2008.pdf.

Pech, P. (2004). *Kuželosečky*. Jihočeská univerzita. https://katedry.pf.jcu.cz/kma/wp-content/uploads/2018/08/Kuzelosecky.pdf.

Weiss, Y. (2018). Kegelschnitte im Mathematikunterricht der letzten 150 Jahre. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (s. 1943–1946). WTM-Verlag. https://eldorado.tu-dortmund.de/browse/author?scope=a0cdf319-d5bf-4b50-aea7-1e024d0d2199&value= Weiss, %20Ysette&bbm.return=1.

Kvalifikační práce

Jandová, S. (2020). *Analytický a syntetický pohled na kuželosečky* [Bakalářská práce, Univerzita Karlova]. https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/117629.

Křížová, K. (2015). *Hyperbola* [Bakalářská práce, Masarykova Univerzita]. https://is.muni.cz/th/l1y52/Bakalarska_prace.pdf.

Patloková, L. (2014). *Kuželosečky. Sbírka řešených úloh* [Diplomová práce, Masarykova Univerzita]. https://is.muni.cz/th/lo7ps/Kuzelosecky_-_sbirka_resenych_uloh.pdf.

Stránská, A. (2024). *Parabola jako hranice mezi elipsou a hyperbolou* [Bakalářská práce, Univerzita Karlova]. https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/192719.

Vyjádření k využití nástrojů umělé inteligence

Při tvorbě bakalářské práce jsem využila nástrojů umělé inteligence pouze v rámci překladů z českého do cizího jazyka a naopak. Konktrétně především při předkladu Abstraktu do anglického jazyka. Okrajově byla umělá inteligence využita při studiu zahraniční literatury k překladům několika odstavců, sloužily pouze k mému porozumění textu, doslovně v práci využity nebyly.