MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Vít Peržina

Dynamika poptávky a nabídky na burze

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Dr. Jan Swart
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2017

Na tomto místě bych rád poděkoval svému školiteli Dr. Janu Swartovi za jeho odbornou pomoc, poskytnutý vhled do tématiky a v neposlední řadě také trpělivost, kterou se mnou měl, a čas, který mi věnoval.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 2. 1. 2017 Vít Peržina

Název práce: Dynamika poptávky a nabídky na burze

Autor: Bc. Vít Peržina

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Dr. Jan Swart, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Hlavním úkolem této práce je zlepšení modelu order booku tak, aby se choval realisticky, vycházeje přitom z již vyvinutého modelu, popsaného v diplomové práci J. Plačkové v roce 2011. Uvažujeme tento jednoduchý model vývoje order booku, kde limit ordery jednotkové velikosti přicházejí podle nezávislých Poissonových procesů. Frekvence buy limit orderů pod resp. sell limit orderů nad danou cenovou hladinou je popsána funkcemi poptávky a nabídky. Buy (resp. sell) limit ordery přicházející s cenou nad (resp. pod) současnou cenou ask (resp. bid), jsou převedeny na market ordery a stornování orderů není povoleno. Tento model rozšiřujeme zavedením market makerů, kteří umístí najednou buy i sell limit order se současnými cenami bid a ask. Ukážeme, jak přidání market makerů do modelu zmenší spread, který byl v původním modelu nerealisticky velký a představíme také způsob, jak vypočítat přesnou intenzitu market makerů potřebnou k redukci spreadu až na nulu.

Klíčová slova: order book, limit order, market maker, Markovský proces.

Title: Order book dynamics

Author: Bc. Vít Peržina

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Dr. Jan Swart, Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Main goal of this thesis is improvement of an order book model so that it behaved more realistically, based on a model developed by J. Plačková in her diploma thesis in 2011. We consider this simple model for evolution of order book in which limit orders of unit size arrive according to independent Poisson processes. Frequency of buy limit orders below resp. sell limit orders above a given price level is described by demand and supply functions. Buy (resp. sell) limit orders that arrive with price above (resp. below) the current ask (resp. bid) price are converted into market orders and cancellation of orders is not allowed. We extend this model by introducing market makers who place at the same time one buy and one sell limit order with current bid and ask prices. We show how introducing market makers reduces the spread that in the original model was unrealistically large and also show a method of calculating the precise rate of market makers needed to reduce the spread to zero.

Keywords: order book, limit order, market maker, Markov process.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V dnešní době je tržní nabídka a poptávka často realizována elektronicky, přičemž související informace jsou uchovávány v databázích. Tyto jsou obvykle spravovány burzami, které se místo samotných obchodníků starají o uskutečnění obchodních transakcí. Obchodníci, kteří mají k takovéto databázi přístup, pak své nabídky kotují a souhrnem těchto nabídek vzniká tzv. *limit order book* nebo zkráceně jen *order book*, tedy kniha objednávek. Tento způsob mediace transakcí stojí v protikladu k obchodování na OTC (z angl.*over the counter*) trzích, kde obchodující strany jednají přímo spolu, bez dalšího zprostředkovatele. Těmito trhy se však v této práci zabývat nebudeme, nýbrž se soustředíme pouze na trhy burzovní a především jejich *order booky*.

Určitý model order booku, který později představíme, vyvinula ve své diplomové práci již Jana Plačková, [Pla11] (a jak uvidíme, také někteří další matematici). Model se však nechová realisticky a jeho zlepšení je tak hlavním úkolem této práce.

Pokud již mluvíme o order booku, je třeba říci, co jsou tyto *ordery*, ze kterých se skládá. *Order* je objednávka nebo pokyn týkající se určitého aktiva či služby a vyjadřuje úmysl obchodníka zúčastnit se transakce na daném trhu. Tato objednávka může mít podobu jak psanou tak ústní a v České republice není používán jednotný termín, užívá se jak pojmenování *objednávka*, tak *pokyn*. Z tohoto důvodu budeme v dalším používat anglický termín *order*.

Možností, jak definovat samotný order book je poměrně mnoho, téměř tolik jako autorů, kteří se tomuto tématu věnují. My budeme používat definici, která říká, že *order book* je seznam všech tzv. *limit orderů* s informacemi o jejich velikosti, druhu a ceně v daném časovém okamžiku. Takto definovanému order booku se často říká *limit order book* (zkráceně *LOB*). V následující kapitole, 2.1, definujeme, co tyto jednotlivé termíny označují.

Kapitola 2

Model

2.1 Popis modelu

Cílem práce bude zabývat se jednoduchým matematickým modelem *limit order booku*, používaného např. na akciových trzích. Základní model, na který v této práci navazujeme, byl nezávisle na sobě objeven a popsán nejméně čtyřikrát, a to postupně G. J. Stiglerem [Sti64], H. Luckockem [Luc03], J. Plačkovou [Pla11] a E. Yudovinou [Yud12b]. Nejprve popíšeme model ve větší obecnosti, včetně našeho rozšíření.

Nechť $I = (I_-, I_+) \subset \mathbb{R}$ je neprázdný otevřený interval, který představuje množinu možných cen, kterých mohou nabývat limit ordery, a nechť $\bar{I} = [I_-, I_+] \subset [-\infty, \infty]$ značí jeho uzávěr. Připomeňme definici aritmetické míry:

Definice 1 (Aritmetická míra)**.** *Aritmetická míra na I je taková míra μ, že $\mu(A) \in \mathbb{N}$ pro každou měřitelnou množinu $A \subset I$. Každou konečnou aritmetickou míru lze zapsat jako konečný součet diracových měr.*

Definice 2 (Diracova míra)**.** *Diracova míra je míra δ_x na množině X (s libovolnou σ-algebrou podmnožin x) definovaná pro libovolný prvek $x \in X$ a libovolnou měřitelnou množinu $A \subseteq X$ takto:*

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{, pokud } x \in A \\ 0 & \text{, pokud } x \notin A. \end{cases}$$

V libovolném čase reprezentujeme stav order booku dvojicí $(\mathcal{X}^-, \mathcal{X}^+)$ aritmetických měr na I, kde interpretujeme diracovy míry, ze kterých se $\mathcal{X}^-$ (resp. $\mathcal{X}^+$) skládají jako buy (resp. sell) limit ordery jednotkové velikosti za danou cenu. Předpokládáme dále, že:

(i) neexistují $x, y \in I$ takové, že $x \leq y$ a $\mathcal{X}^+(x) > 0$, $\mathcal{X}^-(y) > 0$,

Podmínka říká, že order book nemůže ve stejnou chvíli obsahovat buy a sell limit order takové, že nabízená cena buy orderu je vyšší nebo rovna požadované ceně sell orderu. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{X}^-$ a $\mathcal{X}^+$ jsou aritmetické míry,

$$M^- := max(\{I_-\} \cup \{x \in I : \mathcal{X}^-(\{x\}) > 0\}), \tag{2.1}$$

$$M^+ := min(\{I_+\} \cup \{x \in I : \mathcal{X}^+(\{x\}) > 0\}), \tag{2.2}$$

jsou dobře definovány. M^- resp. M^+ je možno interpretovat jako současnou hodnotu *ceny bid* (bid price) resp. *ceny ask* (ask price). Pro pořádek uveďme, že rozdíl mezi cenami ask a bid, tzn $M^+ - M^-$ se standardně nazývá *spread*. Všimněme si, že pokud order book neobsahuje žádný limit order příslušného typu, potom $M^\pm := I_\pm$. Často je výhodné reprezentovat order book jako znaménkovou míru $\mathcal{X} := \mathcal{X}^+ - \mathcal{X}^-$. Označme jako $\mathcal{S}_{ord}$ prostor všech znaménkových měr tvaru $\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ - \mathcal{X}^-$, kde $\mathcal{X}^-$ a $\mathcal{X}^+$ splňují výše uvedenou podmínku (i).

Dynamika modelu je popsána dvojicí měr $\mu_\pm$ na I a konstantou $\rho \geq 0$ reprezentující *podíl market makerů*. Předpokládejme, že pro funkce $\lambda_-(x) := \mu_-([x, I_+))$ a $\lambda_+(x) := \mu_+((I_-, x])$, které nazveme *poptávková funkce* a *nabídková funkce* platí:

(A1) λ_- je nerostoucí a λ_+ je neklesající

(A2) $\lambda_\pm$ jsou spojité funkce

(A3) funkce $\lambda_+ - \lambda_-$ je striktně rostoucí

(A4) $\lambda_\pm > 0$ na intervalu I

Uvažujeme Markovský proces se spojitým časem $(\mathcal{X}_t)_{t\geq 0}$, který nabývá hodnoty z prostoru $\mathcal{S}_{ord}$, a jehož dynamika má následující popis .

Definice 3 (Buy limit ordery)**.** *S Poissonovou intenzitou $\mu_-(A)$, nezávislou pro disjunktní množiny A, přichází obchodník s cenou x z měřitelné množiny $A \subset I$, který umístí buy limit order za cenu x nebo vyrovná nejlepší (nejnižší) dostupný sell limit order za cenu nižší nebo rovnou x, pokud takový existuje,*
tzn. $\mathcal{X} \to \mathcal{X} - \delta_{x \wedge M^+}$.

Definice 4 (Sell limit ordery)**.** *S Poissonovou intenzitou $\mu_+(A)$, nezávislou pro disjunktní množiny A, přichází obchodník s cenou x z měřitelné množiny $A \subset I$, který umístí sell limit order za cenu x nebo vyrovná nejlepší (nejvyšší) dostupný buy limit order za cenu vyšší nebo rovnou x, pokud takový existuje,*
tzn. $\mathcal{X} \to \mathcal{X} + \delta_{x \vee M^-}$.

Definice 5 (Market makeři)**.** *S Poissonovou intenzitou ρ přichází market maker, který umístí dvě nabídky, a to buy limit order a sell limit order se současnými cenami bid a ask, pokud tyto leží uvnitř intervalu I,*
tzn. $\mathcal{X} \to \mathcal{X} - 1_{\{M^- > I_-\}}\delta_{M^-} + 1_{\{M^+ < I_+\}}\delta_{M^+}$.

Předpokládáme, že všechny Poissonovy procesy, kterými se řídí různé mechanismy modelu (buy/sell limit ordery a spekulanti), jsou vzájemně nezávislé. Podle Stiglera [Sti64] a Luckocka [Luc03] nazveme Markovský proces $(\mathcal{X}_t)_{t\geq 0}$ jako *Stiglerův-Luckockův model* s poptávkovou funkcí λ_-, nabídkovou funkcí λ_+ a intenzitou market makerů ρ.

Předpoklady (A2)-(A4) zavádíme pro technickou jednoduchost. Jak je vysvětleno v Appendixu A.1 [Swa16], tyto předpoklady mohou být učiněny v podstatě bez újmy na obecnosti. Konkrétně, modely, které nesplňují předpoklady (A2) a (A3), mohou být získány jako funkce modelů které tyto předpoklady splňují. Toto se týká kupříkladu diskrétních modelů, ve kterých limit ordery mohou být umisťovány pouze s celočíselnými cenami.

Uvedeme vysvětlení na konkrétním příkladu . Uvažujme model s cenovým intervalem typu $I = (0, 2n)$, kde $n \geq 1$ je celé číslo, a poptávkovou a nabídkovou funkcí, které splňují

$$\mu_- = 1_{\{\lceil x\rceil \text{ je sudé}\}}dx, \qquad \mu_+ = 1_{\{\lceil x\rceil \text{ je liché}\}}dx, \tag{2.3}$$

tedy míra μ_- má hustotu vzhledem k Lebesgueově míře, která je rovna 1 na intervalech (1,2], (3,4], ... a nula jinde, a analogicky, hustota míry μ_+ je 1 na intervalech (0,1], (2,3], ... a nula jinde. Nechť $(\mathcal{X}_t)_{t\geq 0}$ značí nějaký model s funkcemi poptávky a nabídky danými vztahem 2.3 (a tedy splňující i (A1)-(A4)), a nechť $\mathcal{X}_t' := \mathcal{X}_t \circ \psi^{-1}$ značí zobrazení míry $\mathcal{X}_t$, kde

$$\psi(x) := \lceil x/2 \rceil, \qquad \text{pro } x \in I. \tag{2.4}$$

Potom $(\mathcal{X}_t')_{t\geq 0}$ je model, v němž limit ordery mohou být umisťovány pouze s celočíselnými cenami z množiny $\{1, 2, ..., n\}$. Konkrétně buy a sell limit ordery s cenami, které v původním modelu leží v intervalu typu $(2(k-1), 2k)$ jsou umístěny tak, že jsou vždy spárovány, s buy limit ordery napravo od sell limit orderů. Po zobrazení pomocí ψ jsou všechny tyto ordery zobrazeny na cenu k, tedy stále jsou spárované.

2.2 Historie a předpoklady modelu

První zmínka o modelu typu, který jsme právě popsali, pochází od amerického ekonoma George Josepha Stiglera [Sti64], laureáta Nobelovy ceny za ekonomii z roku 1982. Ten popsal a simuloval model bez market makerů, kde rozdělení cen je diskrétní, μ_- a μ_+ jsou rovnoměrná rozdělení na množině deseti cen, $\{1, 2, ..., 10\}$. H. Luckock [Luc03], který podle všeho nevěděl o Stiglerově práci, se zabýval modelem s obecnými funkcemi poptávky a nabídky, ale taktéž bez market makerů. Za předpokladu speciálního typu stacionarity byl schopen najít explicitní výrazy pro rovnovážná rozdělení cen bid a ask jeho modelu. Model byl znovu nezávisle objeven a definován v diplomové práci Jany Plačkové [Pla11], tentokrát s μ_- a μ_+ jako rovnovážná rozdělení na množině 100 cen, $\{1, 2, ..., 100\}$. Mezitím Elena Yudovina [Yud12a], [Yud12b] , jež si nebyla vědoma předchozích výsledků, ve své disertační práci uvažovala model pro obecnou třídu poptávkových a nabídkových funkcí (ačkoliv méně obecných než Luckock) a také představila model s market ordery. Společně s Frankem Kellym, za určitých technických podmínek, byli schopni dokázat, že limes inferior a limes superior cen bid a ask pro čas jdoucí do nekonečna mají určité deterministické hodnoty, které byli schopni explicitně vypočítat. Vycházeje z modelu J. Plačkové a a Luckockovy práce, Jan Swart uvažoval v [Swa16] modely s market ordery (tj. ordery na okamžitý nákup/prodej jednotky zboží za nejlepší dostupnou cenu) a dokázal stanovit přesné kritérium pozitivní rekurence takových modelů.

Charakteristickým znakem Stiglerova-Luckockova modelu je, že buy ordery a sell ordery přicházejí s cenou, která je nezávislá na současné ceně. Oproti tomu množství autorů uvádí modely, kde limit ordery jsou umisťovány s cenami, které se nějakým způsobem odvíjí od stavu, ve kterém se order book nachází. Například je cena přicházejícího limit orderu blízká ceně poslední transakce, [Mas00], nebo nejlepší opačné nabídce, [CST10], [SRR16], někteří autoři také připouštějí stornování orderů.

Na reálných trzích je významná část obchodu realizována obchodníky, kteří spekulují na vývoj ceny, ať už pokles nebo nárůst. S ohledem na toto se může zdát, že model, kde jsou ordery umisťovány s cenou blízkou současné ceně, jsou realitě blíže než náš model. Nicméně, aby bylo nějaké zboží pro obchodníky zajímavé, musí na trhu vždy existovat nějaká reálná poptávka a nabídka bez ohledu na to, nakolik je toto jinými efekty a ději na trhu odsunuto do pozadí. Nerealistickým aspektem našeho modelu je to, že obchodníci, kteří mají opravdu zájem o dané zboží umisťují limit order nezávisle na současné tržní ceně zboží. V reálné situaci takový obchodník nebude obvykle umisťovat limit order s cenou příliš vzdálenou té současné, ale spíše vyčká, až současná cena dosáhne úrovně, která je pro něj akceptovatelná, a až poté svůj order umístí. Proto tedy některé ordery, které jsou v našem order booku viditelně umístěny, nemusí být v realitě vidět, ačkoliv v jistém smyslu stále existují, a to ve formě obchodníků tiše očekávajících pokles či nárůst ceny, kteří nechtějí předčasným umístěním orderu zveřejňovat ostatním účastníkům na trhu informaci o svých preferencích.

Nemožnost stornovat limit order je jistě nerealistický aspekt Stiglerova-Luckockova modelu, který navíc silně ovlivňuje dlouhodobou podobu order booku. Nicméně v okamžitém časovém měřítku (v řádech minut) může zanedbání možnosti stornovat ordery odpovídat realitě. Tedy limitní chování Stiglerova-Luckockova modelu pro čas jdoucí do nekonečna by mělo být vnímáno jako přibližný popis order booku v okamžitém časovém měřítku, když je v order booku již velké množství orderů, ale stornování ještě není podstatným aspektem trhu.

V době předcházející elektronickému obchodování působili market makeři fyzicky v budově burzy, kde párovali buy a sell ordery a v podstatě zajišťovali uskutečňování obchodů pro ostatní obchodníky. Přestože dnes již market makeři nejsou formálně odděleni od jiných obchodníků, co do efektu stále existují. Od dalších obchodníků se liší svou odlišnou motivací k obchodování. Jejich cílem není prodej nebo nákup daného zboží ani spekulace na budoucí vývoj jeho ceny, market makeři umisťují buy i sell ordery s úmyslem vydělat na rozdílu mezi cenami bid a ask (na reálném trhu je tento rozdíl vždy kladný). Obchodní strategie, kterou jsme pro market makery zvolili je velmi jednoduchá. V závislosti na momentální podobě order booku a očekávaném chování dalších obchodníků by mohla být zvolena propracovanější taktika. Uvidíme však, že samotná přítomnost market makerů obrovský vliv na tvar order booku. Vezmeme-li toto v úvahu, může se ukázat, že jejich současná strategie není příliš nerealistická a dodá trhu to, co mu bez market makerů chybělo, totiž likviditu.

Kapitola 3

Světové burzy

V této kapitole přiblížíme výskyt některých právě definovaných pojmů v praxi. Konkrétně popíšeme každodenní fungování několika z největších světových burz během různých obchodovacích období.

Oproti Stiglerovu-Luckockovu modelu je obchodování na světových burzách rozhodně komplexnější. První odlišností je, že obchodování na burze neprobíhá celý obchodní podle stejného scénáře, naopak se dělí do několika období, a pro každé z nich platí specifická pravidla obchodu. Kromě toho během obchodního dne probíhá také několik aukcí (jmenujme především otevírací a uzavírací), které významně ovlivňují obchodování během ostatních období dne. Pomocí Stiglerova-Luckockova modelu simulujeme a zkoumáme vývoj order booku pouze během tzv. běžného nebo hlavního obchodovacího období, jak ho některé burzy nazývají.

Na první pohled asi nejmarkantnějším rozdílem je výrazně bohatší seznam orderů, který jednotlivé burzy přijímají. Mezi ty další patří kromě market orderů (které používá Swart [Swa16] i Yudovina [Yud12b]) především ordery, které jsou od těchto dvou základních typů, limit a market orderů, odvozené. Uvedu například ordery určené pouze do některé aukce, *Limit-on-Open order je určen pouze do otevírací aukce*, ordery s časovým omezením (třeba na konkrétní obchodní den, takový order, není-li během daného dne vyrovnán, je automaticky stornován) nebo ordery s jinými podmínkami (kupříkladu *stop limit order* je limit order, který je do order booku umístěn až tehdy, dosáhne-li současná cena stanovené hranice).

Také spojitost množiny cen I není v realitě naplněna, neboť existuje minimální rozdíl dvou cen zvaný *tick size*, který značí minimální možný nárůst ceny. Pokud má tedy stanovenou velikost např. jako $\$0,50$, současná cena $\$20$ se může pohnout na $\$20,50$, ale ne na $\$20,25$. Tick size může být velikosti, která v reálné měně neexistuje. Například Newyorská burza (NYSE) měla v roce 1997 daný tick size jako $\$0,0625$. Tento nesoulad s naším modelem je však zanedbatelný, jak můžeme vidět právě z příkladu velikosti tick size z NYSE roku 1997, množina možných cen je totiž tak hustá, že ji lze v podstatě považovat za spojitou. Navíc i trhy s kladnou hodnotou tick size je možné simulovat pomocí modelů splňujících

(A1)-(A4), jak je vysvětleno na příkladu 2.3.

3.1 London Stock Exchange

London Stock Exchange [LSE] (LSE, Londýnská burza) je největší evropská burza akcií a derivátů, založená roku 1801, se sídlem na náměstí Paternoster Square v Londýně. V prosinci roku 2014 měla burza tržní kapitalizaci (tj. souhrn tržních hodnot všech obchodovaných akcií) zhruba 6,06 bilionů amerických dolarů denně, což ji řadí na třetí místo mezi největšími světovými burzami. Vlajkovou lodí mezi elektronickými obchodními systémy LSE je orderbook SETS (Stock Exchange electronic Trading Service). Obchodují se v něm indexy FTSE100, FTSE250, FTSE Small Cap Index, cenné papíry vázané např. na index, akcie nebo komodity, stejně tak jako další likvidní irské a londýnské kótované cenné papíry.

- Mezi 7:50 a 8:00 místního času probíhá umisťování orderů pro tzv. *zahajovací aukci*. Během této doby obchodníci umisťují své ordery, rozdílem ovšem je, že market ordery nejsou ihned vyrovnány, vyrovnání přítomných orderů proběhne až během aukce v 8:00. Jednotná vyrovnávací cena je určena tak, aby byl vyrovnán maximální objem orderů. Limit ordery, které nejsou v aukci vyrovnány, vstupují v order booku do hlavního obchodovacího období.
- Od 8:00 do 12:00 místního času se obchoduje běžně v *hlavním obchodovacím období*. Obchodníci umisťují do order booku market ordery, které vyúští v okamžitý obchod, a limit ordery, které v order booku zůsávají, dokud nejsou vyrovnány nebo zrušeny vlastníkem.
- Mezi 12:00 a 12:05 probíhá speciální *polední aukce* specifická tím, že během tohoto období není zveřejňováno obvyklé množství informací o stavu order booku (tak jako během ostatních období), ale pouze v omezeném rozsahu (jako aktuální výše cen bid a ask, objem obchodu, apod.), především jsou tak obchodníkům skryty detailní informace o výši a ceně ostatních orderů. Ačkoliv nejsou vidět, zůstávají ordery platné pro tuto aukci aktivní. Smysl této aukce je poskytnout obchodníkům, uprostřed dne, příležitost k uskutečnění větších orderů bez obav o únik informací do zbytku obchodního dne v případě, že nedojde k vyrovnání.
- Od 12:05 až do 16:30 pokračuje běžné obchodovací období.
- V čase 16:30 až 16:35 místního času probíhá tzv. *uzavírací aukce* se stejnými pravidly jako otevírací aukce.
- Krátce po uzavírací aukci, konkrétně mezi 16:35 a 16:40 místního času se ještě obchoduje za tzv. uzavírací cenu, tedy cenu, která byla stanovena v uzavírací aukci. Vyrovnání orderů za jinou cenu již není možné.

3.2 NYSE Arca

NYSE Arca [NYSEA] (New York Stock Exchange Arca), dříve známá pod názvem ArcaEx, je plně elektronická americká burza akcií a opcí se sídlem v Chicagu. Jejím vlastníkem je od roku 2006 Intercontinental Exchange, americká síť burz, která vlastní také například newyorskou burzu. V roce 2007 byla NYSE Arca druhou největší elektronickou komunikační sítí co do objemu obchodovaných akcií. V NYSE Arca se obchodní den (jimiž jsou všechny pracovní dny kromě předem oznámených) dělí na 4 období.

- Od 3:30 do 4:00 místního času jsou přijímány ordery do tzv. *otevírací limit order aukce*. Její jednotná uzavírací cena se stanoví tak, aby byl v čase aukce, tedy ve 4:00, vyrovnán maximální objem orderů. Je-li takových cen více, použije se ta nejbližší uzavírací ceně předchozího dne. Do aukce se zapojí pouze limitní ordery, ty nejsou párovány ani vyrovnávány až do proběhnutí otevírací aukce. Během jedné minuty před proběhnutím aukce (tedy od 3:59 do 4:00) není možno ordery stornovat. Tato aukce je vlastně jediným uzavřeným obchodem před hlavním obchodovacím obdobím. Ordery, které nejsou během otevírací aukce vyrovnány, vstupují do zahajovacího obchodovacího období.

- V čase 4:00 až 9:30 místního času probíhá *zahajovací obchodovací období*, během něhož probíhá poněkud upravený mechanismus order booku. Příchozí market ordery nejsou párovány a vyrovnávány až do *market order aukce*. Během tohoto období mohou být vyrovnávány zvláštní ordery, jako například NOW ordery neb PNP ordery. Na konci této doby, v 9:30, proběhne tzv. *market order aukce*, která je vlastně prvním uzavřeným obchodem hlavní obchodovací doby. Uzavírací cena je stanovena stejným způsobem jako pro otevírací aukci. Během poslední minuty předcházející aukci (tedy mezi 9:29 a 9:30) není možné stornovat ordery účastnící se aukce, je ovšem možno stornovat limit ordery určené speciálně pro zahajovací obchodovací období, protože tyto se následující aukce neúčastní. Do *market order aukce* vstupují market ordery, limit ordery vhodné pro hlavní obchodovací období a ordery určené speciálně pro tuto aukci.

- Mezi 9:30 a 16:00 místního času probíhá *hlavní obchodovací období*. Do order booku obchodníci zadávají limit ordery, které zde zůstávají, dokud nejsou vyrovnány, a market ordery, které jsou vyrovnány okamžitě.

- V 16:00 místního času proběhne tzv. *uzavírací aukce*, jejíž pravidla jsou stejná jako otevírací aukce, tedy uzavírací cena je stanovena tak, aby byl vyrovnán maximální objem orderů. Pokud je takových cen více, je použita ta nejbližší poslednímu uzavřenému obchodu. Během poslední minuty předcházející aukci (tedy mezi 15:59 a 16:00) není možné stornovat ordery určené pro tuto aukci, je ovšem možno stornovat ordery nevyrovnané během hlavní obchodovací doby. Do uzavírací aukce vstupují limit ordery nevyrovnané během hlavního obchodovacího období a ordery určené speciálně pro tuto aukci.

3.3 Tokyo Stock Exchange

Tokyo Stock Exchange [TSE] (TSE, Tokijská burza), založená v roce 1949, je s tržní kapitalizací z dubna 2015 zhruba 4,09 bilionů amerických dolarů čtvrtou největší burzou. V tu dobu bylo TSE obchodováno 2 292 společností. Obchodují se zde indexy jako například Nikkei 225 nebo TOPIX.

- V 9:00 místního času probíhá tzv. *otevírací aukce*. Vyrovnávací cena se stanovuje metodou Itayose, která maximalizuje objem vyrovnaných orderů na základě cenových a časových priorit. V extrémních případech se může stát, že některé market ordery nejsou vyrovnány. Ordery, které nejsou v aukci vyrovnány, vstupují v order booku do dopoledního období.
- Od 9:00 do 11:30 místního času probíhá *dopolední období*. Během něho se obchoduje podle obvyklého scénáře, obchodníci umisťují do order booku limit ordery, čekající na vyrovnání, a market ordery, které jsou ihned vyrovnány.
- V 11:35 místního času probíhá *uzavírací aukce*, která se podobně jako otevírací aukce řídí metodou Itayose.
- Ve 12:30 místního času, po polední přestávce, opět probíhá *otevírací aukce*, a to podle stejných pravidel jako ráno. Do aukce vstupují ordery, které nebyly během dopoledního období vyrovnány, stejně jako ordery určené speciálně pro tuto aukci.
- Od 12:30 do 15:10 místního času probíhá *odpolední období*, ve kterém se obchoduje standardně, stejně jako během dopoledního období.
- V 15:15 místního času probíhá *uzavírací aukce*(opět metodou Itayose).

3.4 New York Stock Exchange

New York Stock Exchange [NYSE] (NYSE, Newyorská burza) je americká akciová burza, založená roku 1817 a vlastněná společností Intercontinental Exchange. Burza sídlí v budově na slavné adrese 11 Wall Street v New Yorku, která byla postavena roku 1903. S tržní kapitalizací zhruba 19,69 bilionů amerických dolarů z května 2015 je NYSE největší burzou na světě. Obchodují se zde indexy jako Dow Jones Industrial Average, S&P 100, S&P 500, NYSE Composite a jiné cenné papíry. Od roku 2007, jako jedna z posledních velkých světových burz, přešla NYSE k elektronickému obchodování, oproti předchozímu systému fyzických ("z očí do očí") aukcí.

- Od 7:30 do 9:30 místního času probíhá umisťování orderů do *otevírací aukce*, kromě market a limit orderů lze zadávat i *Market on Open* a *Limit on Open ordery*, určené pro vyrovnání za otevírací cenu, stanovenou v aukci. Ordery je možno během tohoto období také stornovat, ale až do otevírací aukce nejsou párovány ani vyrovnávány. Vyrovnávací cena je určena tak, aby byl vyrovnán maximální objem orderů. Je-li takových možných cen více, použije se ta nejbližší poslednímu uskutečněnému obchodu.

- Mezi 9:30 a 16:00 místního času probíhá *hlavní obchodovací období*, během kterého obchodníci do order booku zadávají objednávky, které buď jako limit ordery zůstávající až do jejich vyrovnání nebo jsou jako market ordery ihned vyrovnávány.

- V čase 16:00 místního času probíhá *uzavírací aukce*, do které vstupují kromě nevyrovnaných limit orderů také *Market on Close* a *Limit on Close ordery*, určené pro vyrovnání za uzavírací cenu, a *Closing Offset Ordery*, určené ke kompenzaci nerovnováhy uzavírací ceny. Tyto ordery mohou být zadávány do 15:45 a stornovány do 15:58.

Kapitola 4

Model bez market makerů

Nyní představíme model, který vyvinula v její diplomové práci Jana Plačková, a jehož další rozvinutí a vylepšení za účelem lepšího vystižení reality je hlavním smyslem této práce. Protože naším zájmem je sledovat vývoj podoby order booku, nikoliv časy, ve kterých jednotliví obchodníci na trh přicházejí, sledujeme vlastně vývoj vnořeného Markovského řetězce, označme ho jako $(\hat{\mathcal{X}}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$, tedy řetězce s diskrétním časem.

4.1 Diskrétní model

Uvažujme diskrétní model představený jako příklad transformace Stiglerova-Luckockova modelu 2.1, konrétně pro $n = 100$, a to bez market makerů (tzn. $\rho = 0$).
Pro připomenutí: interval původního modelu je tedy $I = (0, 200)$, pro poptávkovou a nabídkovou funkci platí

$$\mu_- = 1_{\{\lceil x\rceil \text{ je sudé}\}}dx, \qquad \mu_+ = 1_{\{\lceil x\rceil \text{ je liché}\}}dx.$$

Po transformaci zobrazením

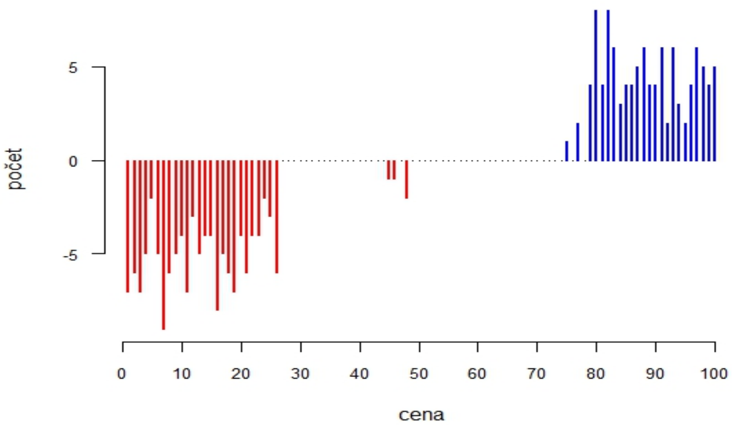
$$\psi(x) := \lceil x/2\rceil, \qquad \text{pro} x \in I.$$

vzniká z původního modelu model $(\mathcal{X}_t')_{t\geq 0}$ (vnořený řetězec budeme značit $(\hat{\mathcal{X}}_t')_{t\in\mathbb{N}_0}$), v němž limit ordery mohou být umisťovány pouze s celočíselnými cenami z množiny $\{1, 2, ..., 100\}$.

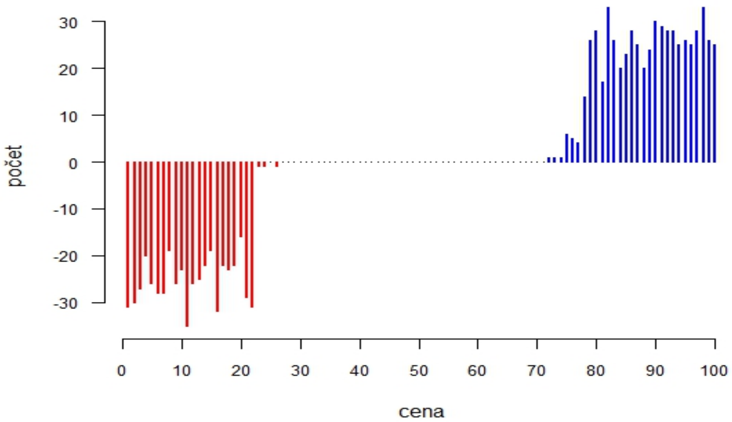
Tedy je-li v čase t_0 model ve stavu $\hat{\mathcal{X}}_{t_0}'$, potom další příchozí obchodník je se stejnou pravděpodobností $1/2$ prodávající nebo nakupující. Tento obchodník přichází se svou náhodnou cenou x (jejíž rozdělení je rovnoměrné na množině

$\{1, 2, ..., 100\}$) a zachová se podle aktuální výše ceny bid (resp. ask) dvěma možnými způsoby. Pro prodávajícího je klíčovou informací aktuální výše ceny bid, M^-. Pokud je $x \geq M^-$ (tedy existuje buy order, který prodejce uspokojuje), obchodník uskuteční sell market order, tedy $\mathcal{X} \to \mathcal{X} + \delta_{M^-}$, jinak obchodník umístí sell limit order s cenou x, tedy $\mathcal{X} \to \mathcal{X} + \delta_x$. Analogicky nakupující se se rozhoduje podle aktuální výše ceny ask, M_+. Pokud je $M^+ \geq x$, obchodník uskuteční buy market order, $\mathcal{X} \to \mathcal{X} - \delta_x$, jinak umístí sell limit order, $\mathcal{X} \to \mathcal{X} - \delta_{M^+}$.

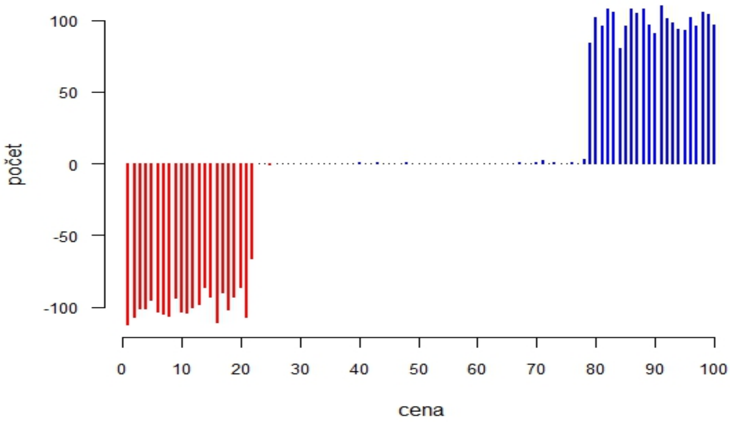
Na histogramech 4.1 - 4.4 je znázorněn stav modelového order booku, který začínal z prázdného stavu, po příchodu různého počtu obchodníků. Červenou barvou a v záporných hodnotách jsou znázorněny buy limit ordery a modrou barvou v kladných hodnotách potom sell limit ordery.



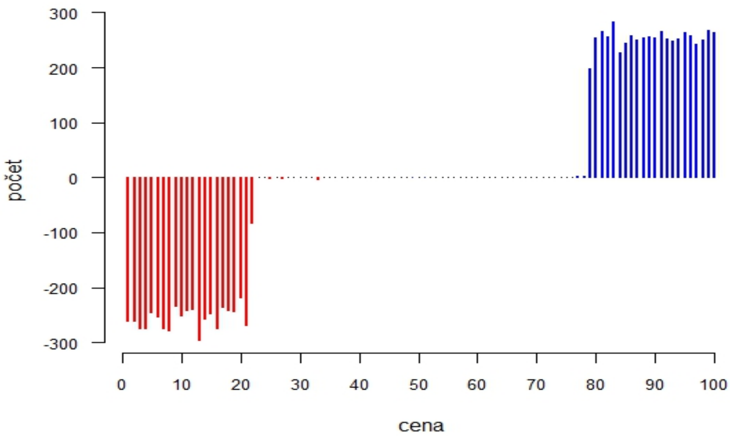
Obrázek 4.1: Diskrétní model bez market makerů: Stav modelového order booku po příchodu 1 000 obchodníků.



Obrázek 4.2: Diskrétní model bez market makerů: Stav modelového order booku po příchodu 5 000 obchodníků.



Obrázek 4.3: Diskrétní model bez market makerů: Stav modelového order booku po příchodu 20 000 obchodníků.



Obrázek 4.4: Diskrétní model bez market makerů: Stav modelového order booku po příchodu 50 000 obchodníků.

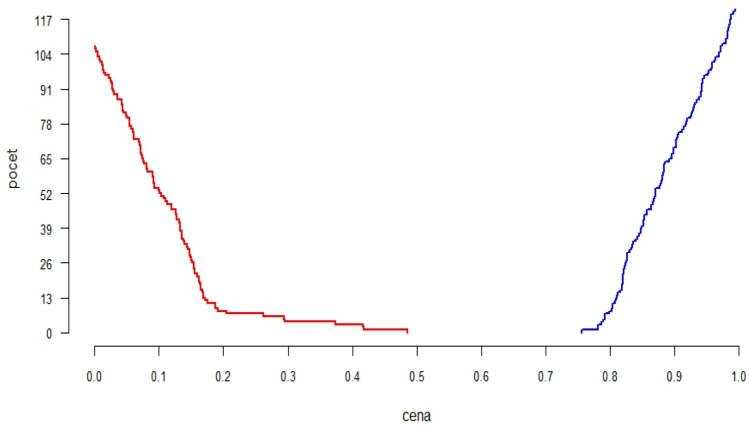
Z obrázků je vidět, že počet limit orderů v modelovém order booku postupem času stále narůstá, naprostá většina limit orderů se potom nachází v cenových intervalech shruba $[1; 22]$ a $[79; 100]$. Tyto hodnoty, jak uvidíme v následující části, korespondují s teoretickými výsledky spojitého modelu.

Podle jedné ze základních teorií mikroekonomie [Wal74], teorie nabídky a poptávky, by měla na trhu, reprezentovaném naším order bookem, vzniknout rovnovážná cena, a to taková, že pro ni nabývá poptávková i nabídková funkce stejnou hodnotu. Tato cena je při splnění předpokladů (A2) a (A3) jednoznačná. Pro tento model však (A2) splněno není a tato rovnovážná cena by se tak měla nacházet mezi 50 a 51 (neboť $\lambda_-(50) = 0,51$, $\lambda_-(51) = 0,50$, $\lambda_+(50) = 0,50$, a $\lambda_+(51) = 0,51$). Nicméně z výše ilustrovaných simulací (viz obrázky 4.1 - 4.4) vidíme, že pro náš model tato situace zdaleka nenastává, a to ani pro počet obchodníků blížících se limitně nekonečnu. Pravdou je, že empirické poznatky ze světových burz také neodpovídají teorii nabídky a poptávky zcela přesně a rovnováha, která se na trhu časem vytvoří se stále vyznačuje spreadem kladné velikosti, nicméně je to velikost zanedbatelná vzhledem k ceně obchodovaného aktiva. Z tohoto pohledu můžeme říci, že představený model se nechová realisticky.

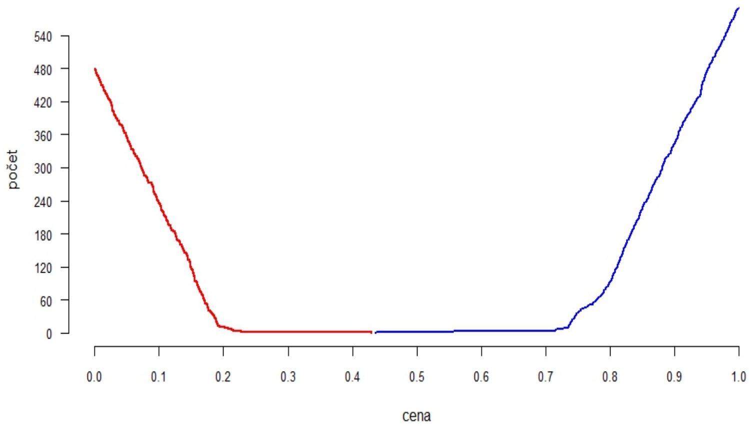
4.2 Spojitý model

Uvažujme Stiglerův-Luckockův model bez market makerů (tzn. $\rho = 0$). Z předpokladů (A1)-(A4) vyplývá existence unikátní ceny $x_W \in I$ a konstanty $V_W > 0$ takové, že platí

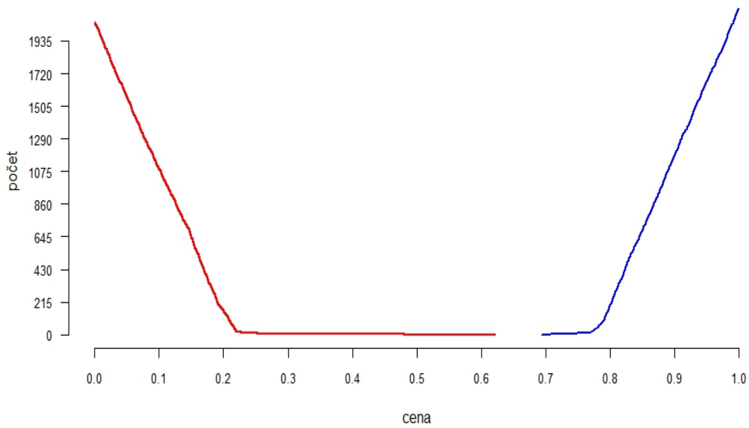
$$\lambda_-(x_W) = \lambda_+(x_W) =: V_W. \tag{4.1}$$



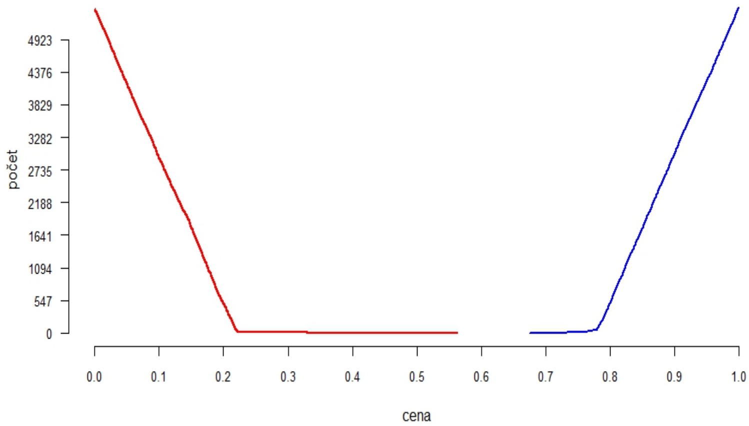
Obrázek 4.5: Spojitý model bez market makerů: Stav modelového order booku po příchodu 1 000 obchodníků.



Obrázek 4.6: Spojitý model bez market makerů: Stav modelového order booku po příchodu 5 000 obchodníků.



Obrázek 4.7: Spojitý model bez market makerů: Stav modelového order booku po příchodu 20 000 obchodníků.



Obrázek 4.8: Spojitý model bez market makerů: Stav modelového order booku po příchodu 50 000 obchodníků.

Podle klasické ekonomické teorie, [Wal74], na perfektně likvidním trhu s poptávkovou a nabídkovou funkcí $\lambda_\pm$ je zboží obchodováno za cenu x_W a objem obchodu je dán V_W. Budeme nazývat x_W *Walrasiánská cena* a V_W *Walrasiánský objem obchodu.*

Při absenci market makerů se však Stiglerův-Luckockův model jeví jako silně nelikvidní (jak můžeme vidět na obrázcích 4.5 - 4.8). Tato skutečnost není zcela překvapivá. A skutečně, nakupující ochotní zaplatit za nákup zboží cenu vyšší než Walrasiánskou cenu x_W a prodejci ochotní zboží prodat za cenu nižší než x_W mohou čekat nezanedbatelnou dobu než je jejich nabídka vyrovnána, protože ceny bid a ask se neustálí na hodnotě x_W, nýbrž fluktuují v *konkurenčním intervalu* (x_-, x_+), který splňuje $\lambda_-(x_-) = \lambda_+(x_+)$. Pozorujeme tak velmi podobnou podobu order booku jako pro diskrétní model. Výsledkem je, že *Luckockův objem obchodu* $V_L := \lambda_-(x_-) = \lambda_+(x_+)$ je větší než Walrasiánský objem obchodu V_W, a je dokonce větší než by byl na libovolné fixní cenové hladině.

Na obrázcích 4.5 - 4.8 je výsledek simulace modelu s $\bar{I} = [0, 1]$ a poptávkovou resp. nabídkovou funkcí $\lambda_-(x) = 1 - x$ resp. $\lambda_+(x) = x$. Zobrazený je stav order booku začínajícího z prázdného počátečního stavu po příchodu různého počtu obchodníků. Vzhledem ke spojitosti množiny možných cen je pro přehlednost použito zobrazení kumulativních funkcí poptávky a nabídky (poptávková křivka je červenou barvou, nabídková modrou), označme je $\lambda^k_\pm$. Přičemž tyto funkce jsou definovány pomocí aritmetických měr, které reprezentují stav order booku, jako $\lambda^k_-(x) := \mathcal{X}^-((x, I_+])$, $\lambda^k_+(x) := \mathcal{X}^+([I_-, x))$. Tyto a přesnější simulace naznačují, že hranice konkurenčního intervalu jsou zhruba $x_- \approx 0,218$ a $x_+ \approx 0,782$. V dlouhodobém hledisku zůstávají buy limit ordery, které jsou cenově pod x_-, a sell limit ordery, které jsou cenově nad x_+, nevyrovnány a v order booku zůstávají napořád, naproti tomu všechny ostatní ordery jsou v konečném čase vyrovnány. Důsledkem je, že Luckockův objem obchodu $V_L \approx 0,782$ je významně větší než Walrasiánský objem obchodu $V_W = 0,5$. Luckock [Luc03] popsal metodu, jak hodnoty x_-, x_+ a V_L vypočítat. Konkrétně pro tento model předpovídá jeho metoda, že $V_L = 1/z$, kde z je unikátním řešením rovnice $e^{-z} - z + 1 = 0$ (to skutečně odpovídá výsledku numerických simulací).

Z obrázků vidíme, že vývoj order booku je v případě spojitého rozdělení cen zcela analogický, jako v diskrétním případě. Vzniká konkurenční interval vymezený přibližně jako $(0,218; 0,782)$, ve kterém nezůstávají (z dlouhodobého hlediska) žádné ordery. Ve zbylých částech intervalu I je rozmístění orderů rovnoměrné, jak indikuje lineární průběh křivek. Stejně jako u diskrétního modelu bez market makerů tedy i zde pozorujeme, že nedochází ke vzniku rovnovážné ceny. Tento model tak v tomto ohledu opět není realistický.

4.3 Teoretické vysvětlení

Uvažujme Stiglerův-Luckockův model bez market makerů (tzn. $\rho = 0$). Pro něj jsou v [Swa16] pomocí *omezených modelů* odvozeny následující vztahy. Nechť $\lambda_-^{-1} : [0, \lambda_-(I_-)] \to \bar{I}$ a $\lambda_+^{-1} : [0, \lambda_+(I_+)] \to \bar{I}$ značí zleva spojité inverze funkcí λ_- a λ_+. Dále nechť $V_{max} := \lambda_-(I_-) \wedge \lambda_+(I_+)$ označuje maximální možný objem obchodu. Abychom se vyhnuli trivialitám, předpokládejme, že platí

(A5) $V_W < V_{max}$

Pro pozdější použití definujme spojitou, rostoucí funkci $\Phi : [V_L, V_{max}] \to \mathbb{R}$, pro kterou $\Phi(0) = 0$ takto

$$\Phi(V) := \int_{V_W}^{V} \left\{ \frac{1}{\lambda_+(\lambda_-^{-1}(W))} + \frac{1}{\lambda_-(\lambda_+^{-1}(W))} \right\} \frac{1}{W^2} dW \tag{4.2}$$

Následující tvrzení bylo dokázáno v [Swa16].

Lemma 6 (Luckockův objem obchodu)**.** *Pro Luckockův-Stiglerův model bez market makerů ($\rho = 0$), pro který platí (A1)-(A5), je Luckockův objem obchodu dán vztahem*

$$V_L = sup\{V \in [V_W, V_{max}) : \Phi(V) < 1/V_W^2\} \tag{4.3}$$

a konkurenční interval jako $(x_-, x_+) = (\lambda_-^{-1}(V_L), \lambda_+^{-1}(V_L))$.

Důkaz. vyplývá z Proposition 2, Theorem 3 a vztahu (1.22) v [Swa16]. □

Pro náš “uniformní” model s $\lambda_-(x) = 1 - x$ a $\lambda_+(x) = x$ tedy dostáváme

$$\Phi(V) = 2\int\limits_{1/2}^{V} \frac{1}{(1-W)W^2} dW = 2\int\limits_{1/2}^{V} \left\{ \frac{1}{W^2} + \frac{1-2W}{W-W^2} + \frac{2}{1-W} \right\} dW =$$

$$= 2\Big[-\frac{1}{W} + ln(W - W^2) - 2ln(1-W) \Big]_{1/2}^{V} =$$

$$= -\frac{2}{V} + 4 + 2lnV - 2ln(1-V) = -\frac{2}{V} + 4 + 2ln\left(\frac{V}{1-V}\right).$$

Vzhledem ke spojitosti (na $[0,5;1]$) vidíme, že hodnoty suprema 4.3 je nabyto při rovnosti $\Phi(V) = 1/V_W^2$. Tedy

$$-\frac{2}{V} + 4 + 2ln\left(\frac{V}{1-V}\right) \equiv 1/V_W^2 = 4$$

Použitím substituce $z = 1/v$ dostáváme postupnými úpravami

$$\begin{aligned} -z - ln(z-1) &= 0 \\ \frac{e^{-z}}{z-1} &= 1 \\ e^{-z} - z + 1 &= 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

výsledek tedy souhlasí se vztahem uvedeným v [Luc03].

Dle definice je invariantní míra pro Stiglerův-Luckockův model pravděpodobnostním rozdělením na S_{ord} takové, že proces startující v tomto počátečním rozdělení je stacionární. Za předpokladu existence invariantní míry na konkurenčním intervalu dokázal Luckock spočítat stacionární rozdělení cen bid a ask. Následující výsledek citujeme z [Swa16, Theorem 1], ačkoliv původně tyto výsledky vychází již z [Luc03].

Věta 7 (Luckokovy diferenciální rovnice). *Předpokládejme, že Luckokův-Stiglerův model s funkcemi poptávky a nabídky splňujícími (A1)-(A4) a $\rho \geq 0$ má invariantní míru. Nechť $(\mathcal{X}_t)_{t\geq 0}$ značí proces začínající v této invariantní míře, a nechť $M_t^{\pm} = M^{\pm}(\mathcal{X}_t)$ značí ceny bid a ask v čase $t \geq 0$. Definujme funkce $f_\pm : \bar{I} \to \mathbb{R}$ jako*

$$f_-(x) := \mathbb{P}[M_t^- \leq x] \quad a \quad f_+(x) := \mathbb{P}[M_t^+ \geq x] \qquad pro\ x \in \bar{I}, \tag{4.5}$$

které vzhledem ke stacionaritě nezávisí na $t \geq 0$. Potom $f_\pm$ jsou spojité a řeší rovnice

$$\begin{aligned} f_-\mu_+ + \lambda_- df_+ &= 0, \\ -f_+\mu_- + \lambda_+ df_- &= 0, \\ f_-(I_+) = 1 &= f_+(I_-), \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde $f_-\mu+$ značí míru μ_+ váženou hustotou f_- a ostatní výrazy mají podobnou interpretaci.

Vztah 4.6 vychází z předpokladu, že v rovnováze v libovolné množině uvnitř konkurenčního intervalu buy (resp. sell) limit ordery přibývají se stejnou pravděpodobností jako ubývají.

Předpokládejme, že existuje konkurenční interval (q_-, q_+) a libovolný počáteční stav modelu $(\mathcal{X}^-, \mathcal{X}^+)$ takový, že platí:

1. Pro každé $\epsilon > 0$ omezení $\mathcal{X}^-$ a $\mathcal{X}^+$ na $(q_- + \epsilon, q_+ - \epsilon)$ jsou aritmetické míry splňující podmínku (i).
2. Omezíme-li $(\mathcal{X}^-, \mathcal{X}^+)$ na (q_-, q_+), jeho rozdělení je stacionární, ale vně (q_-, q_+) již stacionární není.

Potom $\int_A f_- \mu_+$ je předpokládaný počet sell limit orderů umístěných do množiny $A \subset (q_-, q_+)$ za jednotkový časový interval a $\int_A \lambda_- df_+$ je předpokládaný počet sell limit orderů z množiny A odstraněných za jednotkový časový interval. Na konkurenčním intervalu jsou tyto veličiny stejné (mimo něj však nikoliv). Analogické výrazy platí pro buy limit ordery.

Ve [Swa16, Proposition 2] bylo ukázáno, že Luckockovy rovnice 4.6 pro $(\mathcal{X}^-, \mathcal{X}^+)$ omezený na (q_-, q_+) mají unikátní řešení (f_-, f_+). Z Věty 7vyplývá, že pokud má omezený model na (q_-, q_+) invariantní míru, potom

$$f_-(q_-) = \mathbb{P}[\mathcal{X}_t^- = 0] \quad \text{a} \quad f_+(q_+) = \mathbb{P}[\mathcal{X}_t^+ = 0] \tag{4.7}$$

jsou stacionární pravděpodobnosti, že model $(\mathcal{X}^-, \mathcal{X}^+)$ omezený na (q_-, q_+) neobsahuje žádné buy ani sell limit ordery. Ve [Swa16, Theorem 3] bylo ukázáno, že když $f_-(q_-) \wedge f_+(q_+) > 0$, potom pro model omezený na (q_-, q_+) jsou tyto pravděpodobnosti > 0. Pro intervaly typu $(\lambda_-^{-1}(V), \lambda_+^{-1}(V))$ je ve [Swa16, Proposition 2, vztah (1.22)] ukázáno, že

- Pokud $\Phi(V) < 1/V_W^2$, potom $f_-(\lambda_-^{-1}(V)) > 0$ a $f_+(\lambda_+^{-1}(V)) > 0$,
- Pokud $\Phi(V) = 1/V_W^2$, potom $f_-(\lambda_-^{-1}(V)) = 0 = f_+(\lambda_+^{-1}(V))$,

kde funkce Φ je definována v 4.2 a $\lambda_\pm^{-1}(V)$ jsou vlastně našimi hranicemi intervalu $q_\pm$. Speciálně, pokud $V_L < V_{max}$, Luckockovy diferenciální rovnice mají unikátní řešení (f_-, f_+) na konkurenčním intervalu $(\lambda_-^{-1}(V_L), \lambda_+^{-1}(V_L))$, pro které platí $f_-(\lambda_-^{-1}(V_L)) = 0 = f_+(\lambda_+^{-1}(V_L))$, tedy ceny bid a ask nikdy neopouštějí konkurenční interval.

Kapitola 5

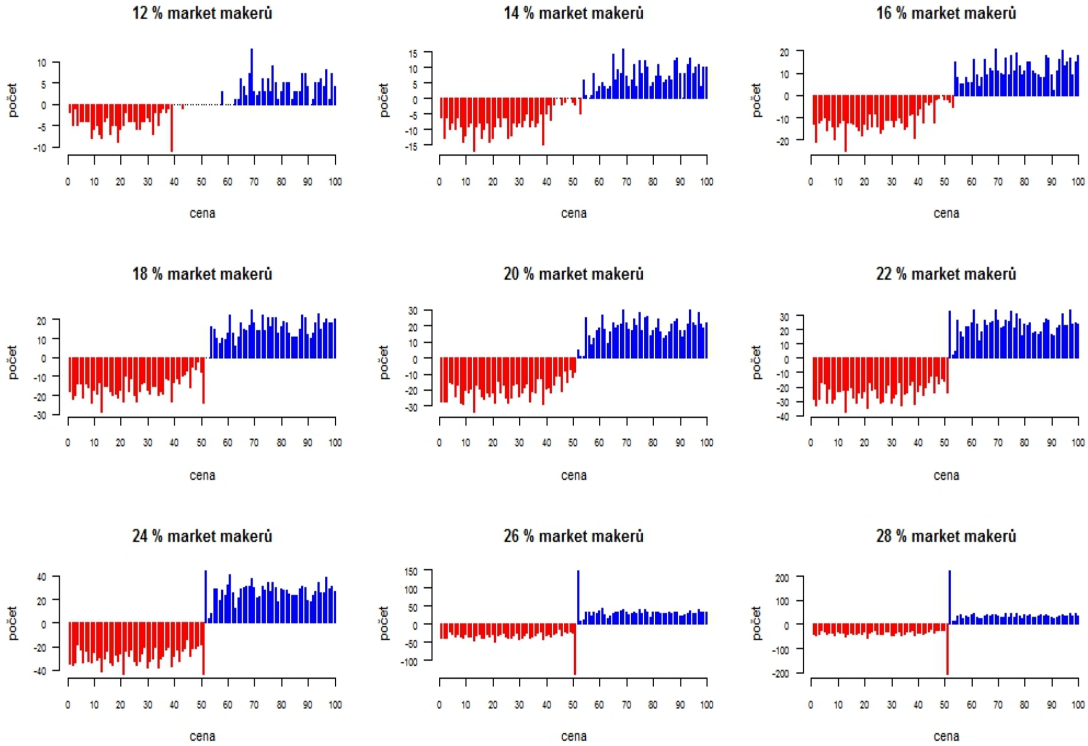
Model s market makery

Nyní popíšeme model s market makery. Ten se předchozímu modelu velmi podobá, ale zavádí jednu klíčovou změnu, a totiž, přivádí na trh market makery (tzn. $\rho > 0$).

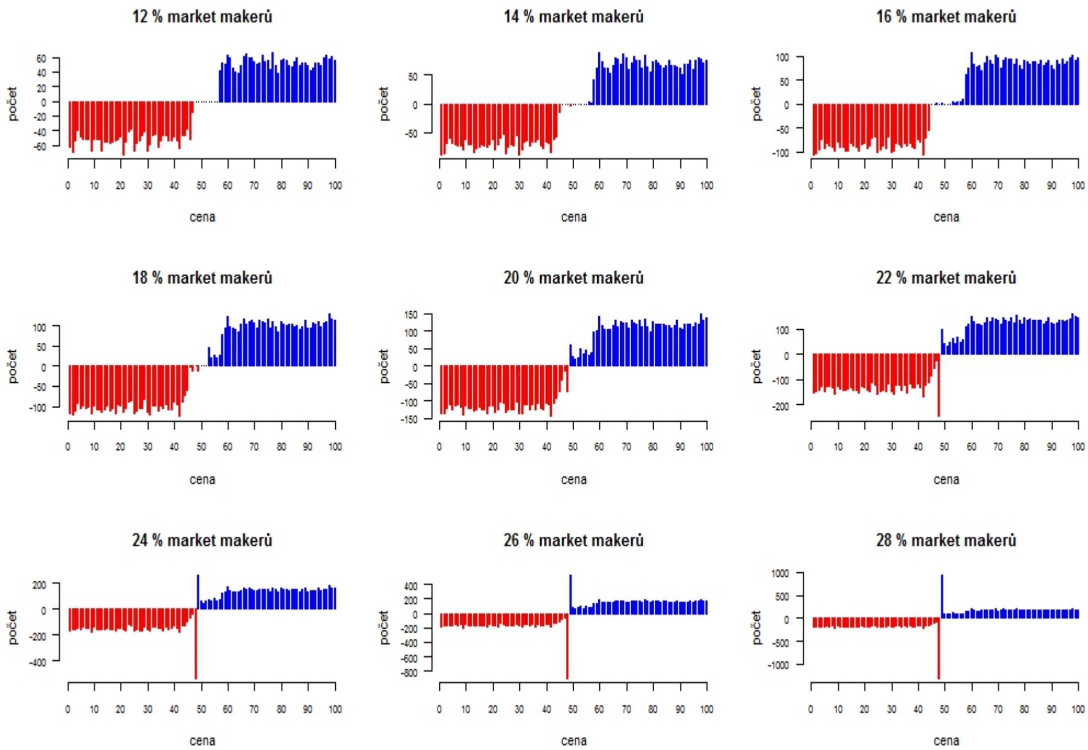
5.1 Diskrétní model

Uvažujme transformovaný diskrétní model představený v předchozí kapitole, tentokrát však s market makery (tzn. $\rho > 0$), $(\mathcal{X}_t')_{t\geq 0}$ (vnořený řetězec budeme značit $(\hat{\mathcal{X}}_t')_{t\in\mathbb{N}_0}$), v němž limit ordery mohou být umisťovány pouze s celočíselnými cenami z množiny $\{1, 2, ..., 100\}$.
V modelu $(\mathcal{X}_t')_{t\geq 0}$ má čas mezi příchody jednotlivých obchodníků exponenciální rozdělení s parametrem $R := \lambda_-(I_-) + \lambda_+(I_+) + \rho$. Nový obchodník je pak nakupující s pravděpodobností $\lambda_-(I_-)/R$, prodávající s pravděpodobností $\lambda_+(I_+)/R$ a market maker s pravděpodobností ρ/R (stejné rozdělení platí i ve vnořeném řetězci $(\hat{\mathcal{X}}_t')_{t\in\mathbb{N}_0}$). Konkrétně pro náš model je $R = \lambda_-(I_-) + \lambda_+(I_+) + \rho = 1 + 1 + \rho$ (je vidět, že pro $\rho = 0$ dostáváme právě diskrétní model bez market makerů). Tedy například pro $\rho = 0,5$ je podíl market makerů z celkového počtu příchozích obchodníků 20%.

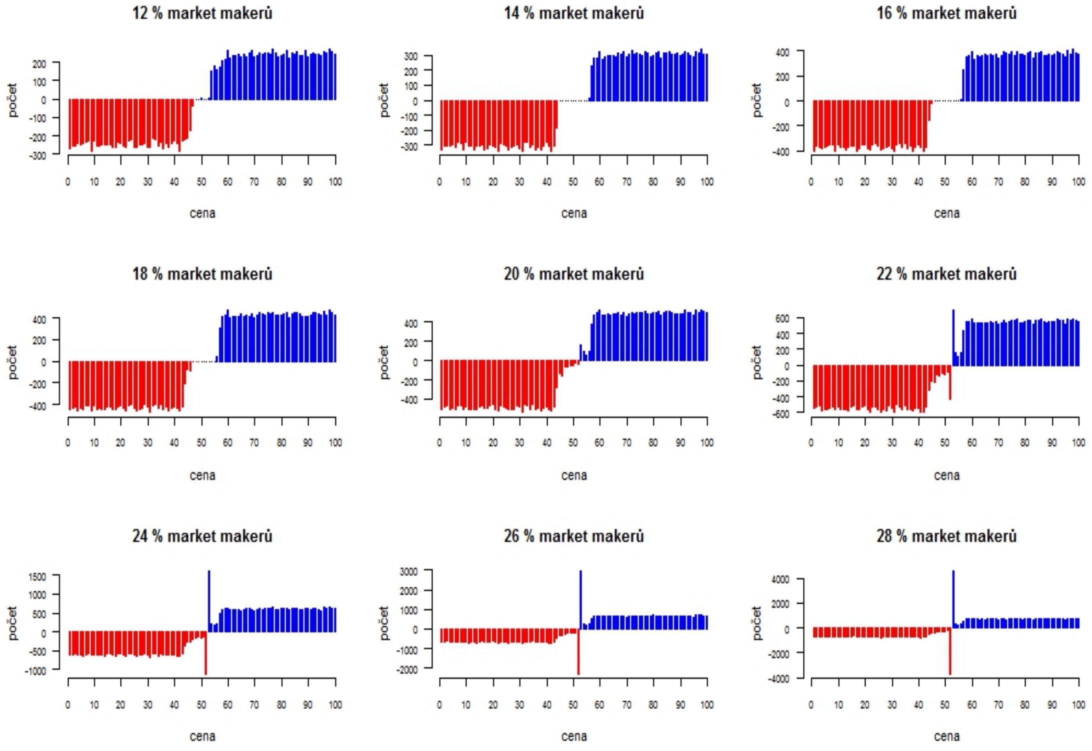
Na histogramech obrázků 5.1 - 5.3 je znázorněn stav modelového order booku, začínajícího z pázdného počátečního stavu, po příchodu různého počtu obchodníků a pro různé podíly market makerů (tzn. různé hodnoty intenzity ρ).



Obrázek 5.1: Diskrétní model s market makery: Stav modelového order booku po příchodu 1 000 obchodníků.



Obrázek 5.2: Diskrétní model s market makery: Stav modelového order booku po příchodu 5 000 obchodníků.

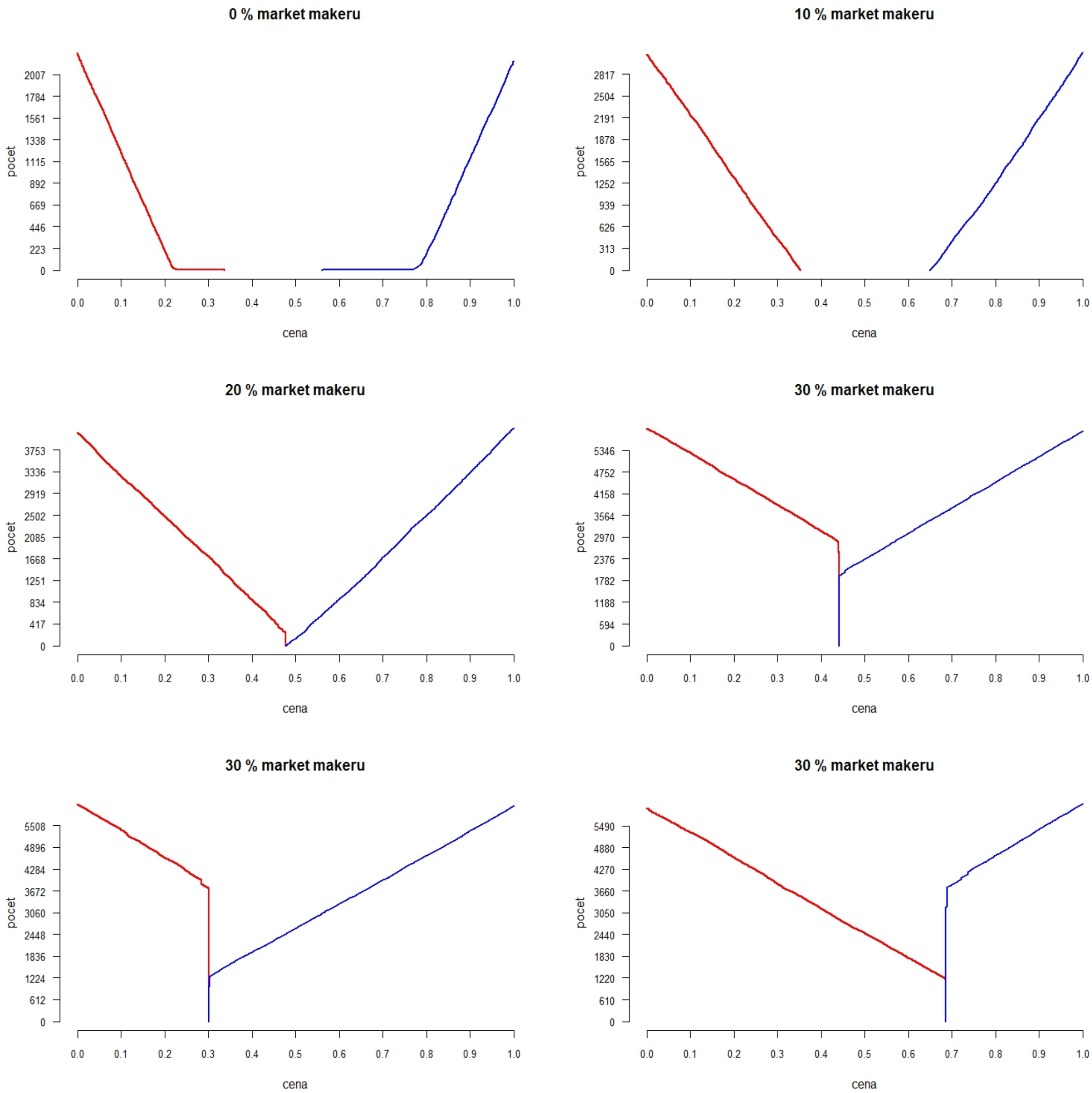


Obrázek 5.3: Diskrétní model s market makery: Stav modelového order booku po příchodu 20 000 obchodníků.

Z obrázků je patrné, že pro různý podíl market makerů má order book "rozdílný tvar". Pro nízký podíl ($\rho < \rho_c$) se tvar order booku podobá modelu bez market makerů, totiž existuje zde nenulový konkurenční interval. Poté pro určitý kritický podíl market makerů (kritická intenzita $\rho = \rho_c$) vzniká rovnovážná cena a konkurenční interval má délku nula nebo fluktuuje v její blízkosti. Tento kritický podíl bychom z obrázků 5.1 - 5.3 odhadli přibližně na 20 procent ($\rho_c \approx 0,5$). S dalším zvýšením podílu market makerů ($\rho > \rho_c$) nabývá order book třetího typu, a to, že konkurenční interval má nulovou velikost a market makerů je na trhu tolik, že jejich nabídky se hromadí kolem tržní ceny a většina z nich už nikdy nebude vyrovnána. Obohacení modelu o market makery však podle průběhu simulací můžeme zhodnotit kladně, neboť do našeho order booku (tak jako na reálný trh) přinesli likviditu a model se tak pro určitý jejich podíl chová realističtěji než bez nich. Zbývá nám však najít ten správný podíl a v tom nám pomůže spojitý model.

5.2 Spojitý model

Uvažujme Stiglerův-Luckockův model s $\bar{I} = [0, 1]$, poptávkovou resp. nabídkovou funkcí $\lambda_-(x) = 1 - x$ resp. $\lambda_+(x) = x$ a intenzitou market makerů ρ. Na obrázku 5.4 můžeme vidět simulace tohoto modelu pro různé hodnoty ρ po příchodu 20 000 obchodníků. Můžeme pozorovat, že jak ρ roste, délka konkurenčního intervalu se zmenšuje.



Obrázek 5.4: Spojitý model s market makery: Stav modelového order booku po příchodu 20 000 obchodníků pro různé podíly market makerů.

Stejně jako v diskrétním modelu s market makery zde vznikají tři různé tvary order booku, a to podle výše podílu market makerů. První nastává v případě, že podíl market makerů na trhu je příliš malý. Order book se v takovém případě, jak můžeme vidět na prvních dvou grafech obrázku 5.4, vyznačuje konkurenčním intervalem kladné délky a pro ceny, kde se limit ordery vyskytují, jejich rovnoměrným rozložením. Druhý případ nastává při kritické intenzitě ρ_c spekulantů na trhu a tehdy se order book dostává do rovnovážného stavu, kdy je konkurenční interval délky nula a ceny bid a ask se ustálí na hodnotě Walrasiánské ceny x_W (viz 3. graf obrázku 5.4). Třetí případ, zobrazený na 4.-6. grafu obrázku 5.4, nastává při intenzitě spekulantů vyšší než ρ_c. V takovém případě nastává zajímavý jev, kdy ceny bid a ask konvergují k náhodné hodnotě, která se liší pro různá provedení simulace a která je též obecně jiná než x_W. Důvodem, proč k tomuto dochází je obrovský nadbytek buy a sell limit orderů umisťovaných market makery na současné hodnoty cen bid a ask, který tak zafixuje cenu v náhodné pozici.

Připomeňme, že pro náš model $(\mathcal{X}_t)_{t\geq 0}$ má čas mezi příchody jednotlivých obchodníků exponenciální rozdělení s parametrem $R := \lambda_-(I_-) + \lambda_+(I_+) + \rho$. Nový obchodník je pak nakupující s pravděpodobností $\lambda_-(I_-)/R$, prodávající s pravděpodobností $\lambda_+(I_+)/R$ a market maker s pravděpodobností ρ/R (stejné rozdělení typu obchodníka platí i pro vnořený řetězec $(\hat{\mathcal{X}}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$). Konkrétně pro náš model je $R = \lambda_-(I_-)+\lambda_+(I_+)+\rho = 1+1+\rho$ (je vidět, že pro $\rho = 0$ dostáváme spojitý model bez market makerů). Je-li příchozím obchodníkem kupující, potom cena jeho limit orderu je rozdělena podle pravděpodobnostní míry $\mu_-(A)/\lambda_-(I_-)$, analogicky cena limit orderu prodejce je rozdělena podle pravděpodobnostní míry $\mu_+(A)/\lambda_+(I_+)$.

5.3 Kritická intenzita market makerů

Jak jsme již vypozorovali ze simulací 5.4, pro nízkou intenzitu market makerů, $0 < \rho < V_W$, je tvar order booku z dlouhodobého hlediska podobný jako pro model bez market makerů, totiž vzniká konkurenční interval kladné délky a Luckockův objem obchodu je větší než Walrasiánský, $V_L > V_W$. Odvození V_L pro $0 < \rho < V_W$ je také možné (jak je odvozeno v [SwP16]) analogickým způsobem jako pro model bez market makerů. Za platnosti (A1)-(A5) zafixujme ρ a definujme $\tilde{\lambda}_\pm := \lambda_\pm - \rho$ a

$$\tilde{V}_{max} := sup\{V \geq V_W : \tilde{\lambda}_-(\lambda_+^{-1}(V)) \wedge \tilde{\lambda}_+(\lambda_-^{-1}(V)) > 0\}. \tag{5.1}$$

Potom Luckokův objem obchodu i konkurenční interval je dán výsledky lemmatu 6, ovšem při V_{max} nahrazeném $\tilde{V}_{max}$ a $\lambda_\pm$ nahrazenými $\tilde{\lambda}_\pm$.

Pro náš "uniformní" model s $\lambda_-(x) = 1 - x$ a $\lambda_+(x) = x$ a $\rho \in (0, V_W)$ je tedy Luckokův objem obchodu V_L unikátním řešením rovnice

$$\frac{2 - 1/V}{1-\rho} + \frac{lnV - ln0,5}{(1-\rho)^2} - 2 = 0. \tag{5.2}$$

Pro zkoumání order booku při $\rho \geq V_W$ budeme potřebovat zesílit předpoklady (A1) a (A3) pro funkce poptávky a nabídky takto:

(A6) λ_- je striktně klesající na I a λ_+ je striktně rostoucí na I.

Dříve jsme ukázali, že předpoklady (A1)-(A3) mohou být v podstatě učiněny bez újmy na obecnosti, a navíc (A4) a (A5) pouze vylučují triviální případy.

Předpoklad (A6) je však omezující. Jak bylo vysvětleno na příkladu 2.1, do naší analýzy můžeme zahrnout i modely s diskrétní množinou cen, a to zkonstruováním takových modelů jako funkcí modelů, které splňují (A1)-(A3). Nicméně, jak je zřejmé z 2.1, tyto modely (A6) nesplňují. Proto se důsledky věty 8 na diskrétní modely nevztahují. Připomeňme, že prostor S_{ord}, stejně jako jiné veličiny použité v následující větě jsou definovány v sekci 2.1.

Věta 8 (Fixace ceny). *Nechť* $(\mathcal{X}_t)_{t\geq 0}$ *je Stiglerův-Luckockův model s funkcemi poptávky a nabídky* $\lambda_\pm$ *splňujícími (A2), (A4) a (A6) a intenzitou market makerů* ρ *splňující* $\rho > V_W$*, startující z počátečního stavu v* S_{ord}. *Nechť* $M_t^\pm = M^\pm(\mathcal{X}^t)$ *značí ceny bid a ask v čase* $t \geq 0$. *Potom existuje náhodná veličina* M_∞ *taková, že*

$$\lim_{t\to\infty} M_t^- = \lim_{t\to\infty} M_t^+ = M_\infty \quad s.j. \tag{5.3}$$

Navíc nosič M_∞ *je dán jako* $\{x \in \bar{I} : \lambda_-(x) \vee \lambda_+(x) \leq \rho\}$. *Speciálně je-li* $\rho = V_W$*, potom* $M_\infty = x_W$ *s.j.*

Důkaz. Popsán v [SwP16]. □

Intuitivně je není těžké pochopit, proč interval $\{x \in \bar{I} : \lambda_-(x) \vee \lambda_+(x) \leq \rho\}$ možných cen má právě tuto podobu. Pokud bychom totiž předpokládali fixaci ceny např. v bodě x_0 takovém, že $\lambda_-(x_0) > \rho$, potom v bezprostřední blízkosti x_0 přibývají sell limit ordery s intenzitou ρ, ale ubývají s intenzitou $\lambda_-(x_0) > \rho$, což je v rozporu s tím, že v tomto bodě dojde k fixaci ceny.

Pro náš Stiglerův-Luckockův model s $\bar{I} = [0, 1]$, funkcemi poptávky a nabídky $\lambda_-(x) = 1 - x$ a $\lambda_+(x) = x$ a intenzitou market makerů ρ (kde $\rho \geq V_W = 0,5$) je tedy podle věty 8 nosič M_∞ roven

$$\{x \in [0, 1] : 1 - x \vee x \leq \rho\} = [1 - \rho, \rho].$$

Speciálně, je-li intenzita market makerů rovna Walrasiánskému objemu obchodu, tzn. $\rho = V_W = 0,5$, potom $M_\infty = x_W = 0,5$, tedy ceny bid a ask konvergují k Walrasiánské ceně x_W. Z toho vyplývá, že Walrasiánský objem obchodu určuje právě kritickou intenzitu market maker na trhu, $\rho_c = V_W$.

Kapitola 6

Závěr

V práci jsme zkoumali několik modelů pro obchodování pomocí burzovního order booku, tedy elektronického systému používaného ke správě a párování orderů (objednávek) obchodníků na daném trhu. Definovali jsme Stiglerův-Luckokův model v obecnosti a připomněli jeho historii. Dále jsme se zabývali fungováním order booků některých z největších světových burz. Konkrétně jsme přiblížili order book Newyorské, Londýnské a Tokijské.

Stiglerův-Luckockův model bez market makerů je jedním z nejzákladnějších a nejpřirozenějších modelů pro interakci obchodníků přes order book, dokonce tak přirozený, že byl nezávisle objeven a popsán nejméně čtyřikrát, a to postupně G. J. Stiglerem [Sti64], H. Luckockem [Luc03], J. Plačkovou [Pla11] a E. Yudovinou [Yud12b]. Ačkoliv je založen na rozumných předpokladech, jeho chování není realistické neboť ceny bid a ask se neustálí na Walrasiánské rovnovážné ceně, nýbrž fluktuují uvnitř konkurenčního intervalu kladné délky. Z obchodního pohledu takovýto konkurenční interval (a především tedy značná velikost spreadu) dávají příležitost vydělat market makerům, kteří nemají zájem o samotné zboží, ale vydělávají právě na rozdílu cen bid a ask (nakupují za nízkou a prodávají za vysokou cenu).

V této práci jsme do modelu market makery přidali, a to s velmi jednoduchou obchodní strategií umístění jednoho buy a jednoho sell limit orderu se současnými cenami bid a ask. Ze simulací jsme pozorovali, že přidání market makerů přiblížilo Stiglerův-Luckockův model realitě v tom ohledu, že zapříčinilo zkrácení konkurenčního intervalu. Speciálně, pro spojité modely, je-li intenzita market makerů rovna Walrasiánskému objemu obchodu, délka konkurenčního intervalu klesne na nulu a ceny bid a ask konvergují k Walrasiánské rovnovážné ceně (dochází tedy ke vzniku rovnováhy nabídky a poptávky na trhu). Když je intenzita market makerů ještě vyšší, ceny bid a ask také konvergují ke společné liminí ceně, ta je však náhodná (uvnitř určitého intervalu, jehož délka závisí na dané intenzitě market makerů) a obecně jiná než Walrasiánská cena. Při této intenzitě navíc dochází k tomu, že některé ordery market makerů nejsou vzhledem k zahlcení trhu (ordery právě market makerů) nikdy vyrovnány a zůstávají v order booku napořád (v relevantním časovém měřítku).

Na reálném trhu uskuteční market maker zisk jen tehdy, jsou-li oba jeho ordery vyrovnány. Ve výše popsaném případě “přebytku” market makerů na trhu tedy chybí motivace k tomu, aby na trh další market makeři přicházeli. Tato motivace schází vlastně vždy, když se konkurenční interval zmenší na nulovou délku. Na reálném trhu lze tedy očekávat určitý samoregulační mechanismus intenzity market makerů, díky kterému nedojde k přehlcení trhu market makery, ale v dlouhodobém časovém horizontu zajistí jejich intenzitu přibližně rovnou Walrasiánskému objemu obchodu. Důsledkem pak je, že veškeré obchody jsou realizovány pomocí market makerů, tedy i nakupující a prodávající, kteří mají opravdový zájem obchodovat se zbožím, uskutečňují svůj obchod s market makery a nikoliv mezi sebou.

Dokázali jsme tedy nalézt model order booku, který se chová realističtěji než model představený v práci J. Plačkové, [Pla11], což byl hlavní cíl této práce. Z námi simulovaných modelů se jako nejlepší jeví “uniformní” Stiglerův-Luckockův model s market makery, jejichž intenzita je rovna Walrasiánskému objemu obchodu (v tomto případě $V_W = 0,5$).

Literatura

[LSE] Day Trading Wiki. *London Stock Exchange.* http://daytradetheworld.com/wiki/lse, 2016.

[NYSE] Day Trading Wiki. *New York Stock Exchange.* http://daytradetheworld.com/wiki/nyse, 2016.

[NYSEA] New York Stock Exchange. *Nyse Arca Trading Information.* https://www.nyse.com/markets/nyse-arca/trading-info, 2016.

[TSE] Day Trading Wiki. *Tokyo Stock Exchange.* http://daytradetheworld.com/wiki/tse, 2016.

[CST10] R. Cont, S. Stoikov, and R. Talreja. *A stochastic model for order book dynamics.* Operations Research 58(3), 2010, 549-563.

[DH09] Václav Dupač, Marie Hušková. *Pravděpodobnost a matematická statistika.* nakladatelství Karolinum, 2009.

[Luc03] H. Luckock. *A steady-state model of the continuous double auction.* Quantitative Finance 3(5), 2003, 385-404.

[Mas00] S. Maslov. *Simple model of a limit order-driven market.* Physica A 278, 2000, 571-578.

[Pla11] Jana Plačková. *Shluky volatility a dynamika poptávky a nabídky.* Diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, 2011.

[SRR16] E. Scalas, F. Rapallo, and T. Radivojević. *Low-traffic limit and First-passage times for a simple model of the continuous double auction.* ArXiv:1603.09666, 2016.

[Sti64] G. J. Stigler. *Public regulation of the securities markets.* The Journal of Business 37(2), 1964, 117-142.

[Swa16] J. M. Swart. *Rigorous results for the Stigler-Luckock model for the evolution of an order book.* ArXiv:1605.01551, 2016.

[SwP16] V. Peržina, J. M. Swart. *How many market makers does a market need?.* arXiv:1612.00981, 2016.

[Wal74] L. Walras. *Éléments d' économie politique pure, ou Théorie de l richesse sociale*. Poprvé publikováno 1874; znovu publikováno v Paříži R. Pichonem a R. Durand-Auziasem a v Lausanne F. Rougem, 1926.

[Yud12a] Elena Yudovina. *A simple model of a limit order book*. ArXiv:205.7017v2, 2012.

[Yud12b] Elena Yudovina. *Collaborating Queues: Large Service Network and a Limit Order Book*. disertační práce, University of Cambridge, 2012.

Seznam obrázků