

UNIVERZITA KARLOVA v PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Pojmotvorný proces v prostředí čtverečkovaného papíru

Concept building process in the environment of Grid paper

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Darina Jirotková, Ph. D.

Autor diplomové práce: Ivana Procházková

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň ZŠ se specializací DV, HV

Forma studia: prezenční

Diplomová práce dokončena: březen 2009

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Bednářečku dne.....

Podpis:

Děkuji RNDr. Darině Jirotkové, Ph.D. za podnětné vedení kurzu geometrie, kterým mě velice oslovila. Také děkuji za následný čas a zkušenosti, které mi věnovala při vedení mé diplomové práce.

OBSAH

Anotace	6
Úvod	7
Kapitola 1 - Přípravná část	
1.1 Mé vlastní objevování	9
1.1.1 Vymezení pojmů.....	10
1.1.2 Zápis útvarů.....	12
1.1.3 První úvahy jak objevit vzorec.....	13
1.1.4 Změna k přístupu objevování.....	14
1.1.5 Zjištění neznalosti.....	15
1.1.5.1 Jedna zodpovězená otázka.....	17
1.1.6 První tabulka.....	17
1.1.7 Chyba jako „záchrana“.....	20
1.1.8 Nový začátek.....	22
1.1.9 Druhá tabulka.....	22
1.1.10 Třetí tabulka.....	24
1.1.11 Objevení vzorce.....	27
1.1.12 Evidence objevování Pickovy formule na trojúhelníkovém papíru.....	29
1.1.13 Hladiny poznávacího procesu a jejich aplikace.....	30
1.1.14 Shrnutí poznávacího procesu do tabulky.....	36
1.1.15 Porovnání mého řešitelského procesu a řešitelského procesu studentů.....	38
1.1.16 Uvědomění.....	39
1.1.17 Závěrem k Pickově formuli.....	40
1.2 Geometrie v kontextu RVP	42
1.2.1 Co to je geoboard.....	43
1.2.2 Geoboard a geometrie.....	44
1.2.3 Klady a zápory geoboardu.....	45
1.2.4 Přejít na tečkovaný papír.....	46
1.2.5 Geoboard, tečkovaný papír, čtverečkovaný papír v kontextu RVP.....	47

1.3 Učebnice pro 1. stupeň ZŠ	48
1.3.1 Geometrická prostředí v učebnicích matematiky.....	48
Kapitola 2 – Experimenty	
2.1 Homogenní varianta.....	51
2.2 Úvahy před experimentem.....	53
2.3 Přehled experimentů.....	54
2.4 Výběr experimentů.....	56
2.5 Experiment číslo 3 - Pojmenovávání tvarů na geoboardech.....	57
2.5.1 Protokol experimentu č. 3A.....	58
2.5.2 Odpovědi na stanovené otázky.....	60
2.5.3 Závěr z experimentu na pojmenování tvarů	63
2.6 Experiment číslo 6 – Hledání různých trojúhelníků.....	63
2.6.1 Odpovědi na otázky.....	65
2.6.2 Dva vstupy Sary.....	66
2.7 Experiment číslo 5 – Popis útvaru přes „telefon“.....	70
2.8 Co měly experimenty společného	73
2.9 Závěrem k experimentům.....	74
Závěr	75
Seznam použité literatury	76

Přílohy

Anotace

Má diplomová práce je zaměřena na geometrická prostředí geoboardu, tečkovaného papíru, čtverečkovaného papíru a trojúhelníkového papíru. Nejdříve zkouším experiment sama na sobě, objevuji Pickovu formuli pro trojúhelníkový papír. Následně na svůj postup aplikuji hladiny poznávacího procesu. Tím si chci projít stejným procesem, kterým procházejí děti v procesu učení a objevování. V další části se zabývám tím, jak těmito prostředími mohu napomoci dojít k očekávaným výstupům z RVP a jak jsou tato prostředí uchopena v učebnicích. Poslední částí jsou experimenty v těchto geometrických prostředích s dětmi.

Summary

My diploma work focuses on geometrical environments geoboard, dotted paper, grid paper and triangular paper together. At first, I try to apply this experiment on myself, thus I discover the Pick's formula for a triangular paper. Consequently I apply different levels of a cognitive process on my procedure. By doing this I am trying to go through the same process the children experience during the experiments. My next part deals with a problem of how such aspects could be used in order to get the expected outputs from "RVP" and how these aspects are understood in textbooks. The last part contains the actual experiments with children in the geometrical backgrounds described above.

Úvod

Čím jsem byla ovlivněna, čím jsem ovlivněna

Téma mojí diplomové práce bylo ovlivněno kurzem geometrie, kterým jsem prošla. Tento kurz mě velmi oslovil a při jednotlivých hodinách jsem si silně uvědomovala, že tento způsob práce mě velmi baví a motivuje k přemýšlení nad danou problematikou. Se zaujetím jsem řešila zadané úlohy. Vždy jsem se těšila, až nám bude zadán „extra“ úkol, na který máme doma samostatně přijít. Ještě ten den jsem si sedla a danou úlohou se zabývala. Už tehdy jsem si uvědomovala, že až skočí tento kurz, chci se tomuto tématu věnovat dál.

Jedno zadání problému ve mně zanechalo stopy dodnes. Znělo nějak takto: Máte čtverečkovaný papír a na něm můžete nakreslit různé mřížové obrazce. Zkuste najít takovou vazbu mezi počtem hraničních mřížových bodů, vnitřních mřížových bodů a obsahem, která by umožnila vypočítat jeden údaj pomocí zbylých dvou jakéhokoliv obrazce, který na tomto papíře uděláte.

Byla to pro mě výzva. Ráda objevuji nové věci, ráda se snažím přijít na něco nového a přitom být nejrychlejší nebo aspoň mezi prvními. Tuto soutěživost na sobě pozoruji již delší dobu. Nevím, kdy jsem si toho všimla poprvé, ale nyní mohu s jistotou říci, že to tak je. Možná má mé chování počátky již v dětství. Jsme čtyři sourozenci a pokud někdo něco „udělal“ první, něco zvládl nejrychleji, tak byl vždy ve výhodě, vždy to bylo „výhodnější či lepší“. Díky tomu mi to asi zůstalo dodnes, soutěživost a snaha být mezi prvními.

Proto jsem se i pro tuto práci nadchla, bylo to přesně něco takového, co mě motivuje k výkonu¹. Opět jsem se snažila za každou cenu být s naší skupinou nejrychlejší. Objevit Pickovu formuli na čtverečkovaném papíře jako první. Pracovali jsme společně ve skupině. Myslím, že všichni ze skupiny se snažili, abychom to zvládli.

¹ „**motivace výkonu** – Výkon jedince je motivován jednak vnitřními faktory (zejména potřebami), jednak faktory vnějšími (tzv. inscentivami). Chování jedince, jehož cílem je dosáhnout určitého výkonu, probíhá v několika fázích: 1. vzbuzení některých potřeb; 2. posouzení vlastních možností výkonu dosáhnout; 3. očekávání, že potřeba bude uspokojena; 4. rozhodnutí vykonat příslušnou činnost. Mezi výkonové potřeby žáka mj. patří: potřeba samostatnosti, potřeba kompetence, potřeba úspěšného výkonu, potřeba vyhnoutí se neúspěchu a někdy (paradoxně) i potřeba vyhnoutí se úspěchu.“ [Průcha, 2008, str. 127]

Nejdříve jsme dělali čtverce tak, jak koho co napadlo. To ale nevedlo k nějaké větší možnosti závěru. Něco, co bychom mohli nějak systematicky zkoumat. Pak se ale dostavil nápad, každý budeme dělat určité čtverce o určitém obsahu a pro ty budeme zjišťovat dané parametry. Tento nápad se ukázal jako velmi dobrý a strategický, neboť naše práce šla rychleji a systematictější. Rozdělili jsme si práci s vědomím, že každý ze skupiny má za úkol získat co nejvíce poznatků o daném čtverci a jeho otáčení v čtverečkované síti. Tím jsme věděli, které čtverce o jakém obsahu již známe a mohli jsme pokračovat dále. Záznamy jsme si zapisovali do tabulky, takže naše práce byla přehledná a zřetelná.

Po chvíli se nám začal jasně rýsovat soubor dat, se kterými jsme mohli pracovat, a která jsme mohli začít zpracovávat. Snažili jsme se vymyslet vzorec, který bychom mohli použít univerzálně pro všechny obrazce na čtverečkovaném papíře a vypočítali bychom z nich obsah daného obrazce s tím, že bychom znali počet hraničních bodů a počet vnitřních bodů. Zkoušeli jsme vymýšlet vzorce podle počátečních získaných dat, to ale nebylo lehké. Ovšem čím více nám přibývalo dat, tím se práce stávala snadnější. Každá ve skupině se snažila najít vzorec, podle kterého bychom mohli vypočítat obsah. Výsledky jsme konzultovali a porovnávali, proč asi nevyšel stejný všem a zda to může být skutečně onen „vzorec“. A nakonec se úspěch dostavil. Vzorec jsme společnými silami, společnou diskusí nad vzorcem nesprávnými a možnostmi změn, našli. A byli jsme první, to si pamatuji dodnes. Byla to pro mě velmi motivující zkušenost. To, že jsme společnými silami zvítězili.

Až na konci hodiny, po našem objevení jsem se dozvěděla, že jsme objevili Pickovu formuli pro mřížové mnohoúhelníky. Nejen kvůli tomuto úkolu jsem si zvolila svoji diplomovou práci.

Kapitola 1 – Přípravná část

Tato kapitola je rozdělena do několika částí. První část se týká mého samostatného objevování. V druhé části se zabývám tím, jak je geometrie koncipována v RVP a jak můžeme pomocí zajímavých prostředí dojít k naplnění cílů. Třetí část je zaměřena na mapování učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ z pohledu geometrických prostředí – geoboardů, tečkovaného papíru, čtverečkovaného papíru, trojúhelníkového papíru.

1.1 Mé vlastní objevování

Jak jsem již psala v úvodu, oslovilo mě mnoho úkolů zadaných na hodinách geometrie, mezi jinými i objevování Pickovy formule na čtverečkovaném papíru. Proto jsem chtěla v tomto samostatném objevování pokračovat. Byla mi nabídnuta možnost, objevovat Pickovu formuli na trojúhelníkovém papíru. Ráda jsem této nabídce využila, neboť jsem mohla uplatnit svoje samořešitelské objevování.

V průběhu objevování (ale i zpětným hodnocením) jsem si uvědomila mnoho věcí, které mě nějakým způsobem ovlivnily nebo které jsem si při své práci uvědomila. Proto jsem chtěla tyto „záchvěvy“ nějakým způsobem zaznamenat i do své práce. Jsou to poznatky, které jsou pro mě důležité. Pro tyto odstavce jsme zvolila písmo kurzívy, abych je odlišila od ostatního textu.

Když jsem se začala připravovat na objevování tohoto úkolu, uvažovala jsem, že bych měla začít podobně jako v naší školní hodině. Udělat co nejvíce obrázců, ze kterých potom budu moci vyčíst a uspořádat data, která mi napoví. Také jsem si uvědomovala, že zde jsem sama. Není zde skupina, kde by se práce rozdělila. Není zde tolik hlav, které přinesou podněty do diskuse a tím je možnost diskutovat nad daným směrem, kterým se naše cesta bude ubírat, vyloučené.

Nejdříve jsem se snažila vybavit si, jak probíhal náš postup objevování při hodině geometrie. Poté jsem si v sešitech našla svoje poznámky z hodiny, kdy jsme

objevovali Pickovu formuli. Ve svých poznámkách jsem našla v sešitě z hodiny poznamenan pouze vzorec. Řešitelský postup jsme dělali na velký čtverečkovaný papír flipchart², který nám byl dán, pak jsme ho odevzdali. Ale i přes nemnoho poznámek jsem přišla na to, že vzpomínky jsou ve mně docela silné.

1.1.1 Vymezení pojmů

Než začnu popisovat své objevování, uvědomila jsem si, že je nutné vymezit pojmy na trojúhelníkovém papíře:

Trojúhelníkový papír – rovina (euklidovská), ve které jsou vyznačeny tři osnovy přímek rovnoběžných a stejně vzdálených tak, že každé tři, které se protínají v jediném bodě, tvoří úhlopříčky pravidelného šestiúhelníka.

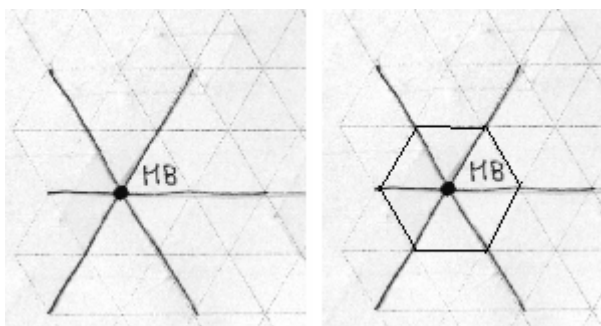
Každá trojice přímek po jedné z každé osnovy ohraničuje rovnostranný trojúhelník. Nejmenší možný rovnostranný trojúhelník nazveme jednotkový

Mřížový bod - bod na trojúhelníkovém papíru, ve kterém se protínají linky trojúhelníkového papíru (obr.1.1)

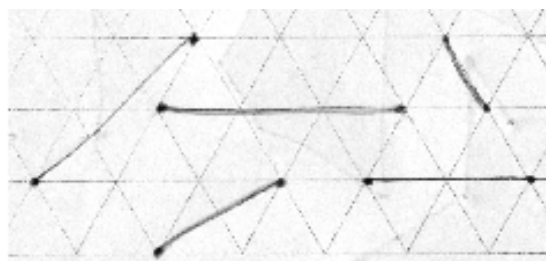
- bod v každém nejmenším šestiúhelníku, kde se protínají spojnice protilehlých vrcholů

Mřížová úsečka – úsečka, jejíž krajní body jsou mřížové body (obr. 1.2)

Mřížový trojúhelník – takový trojúhelník, jehož všechny vrcholy jsou mřížové body (obr. 1.3)

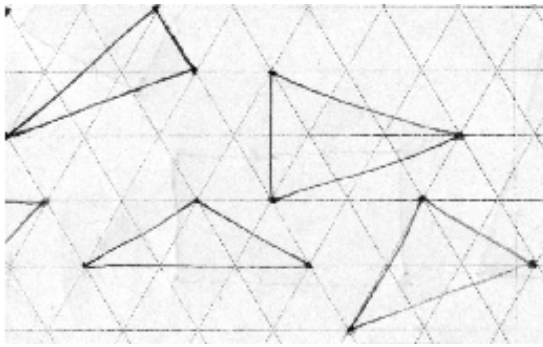


Obr. 1.1

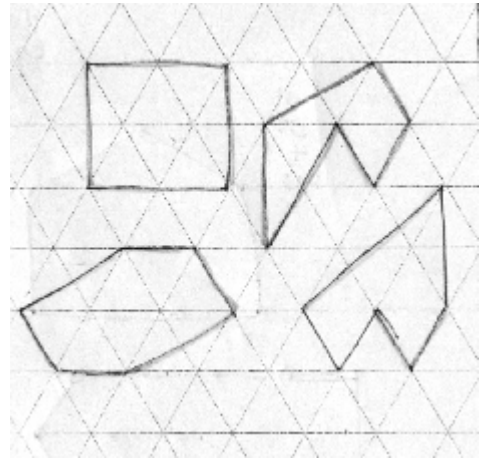


Obr. 1.2

² **Flipchart** – velký pracovní papír, který má velikost A1



Obr. 1.3



Obr. 1.4

Mřížový obrazec – obrazec, jehož všechny vrcholy jsou v mřížových bodech (obr.1.4)

Dále bylo nutné uvědomit si vztahy a veličiny:

- počet hraničních bodů - h
- počet vnitřních bodů - v
- obsah - S

k tomu, abych mohla dojít k výsledku.

Vzorec Pickovy formule pro čtverečkovaný papír:

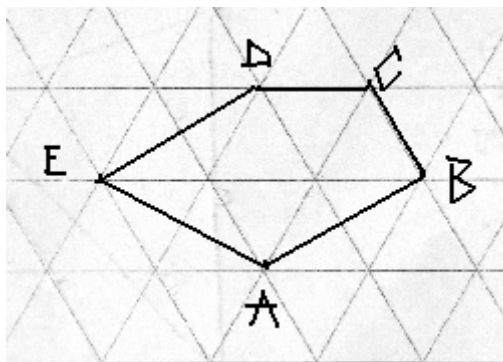
$$S = h/2 + v - 1$$

Obsah mřížového obrazce na čtverečkovaném papíru se může spočítat buď sčítáním jednotlivým čtverečků, nebo metodou krájení či rámování a pak odkrajování a někdy lze využít i Pythagorovy věty například pro počítání obsahu čtverců. Na trojúhelníkovém papíru lze obsah mřížového obrazce počítat obdobně, jen Pythagorovu větu nelze použít stejným způsobem. Jak by se tedy asi jinak dal vypočítat obsah?

1.1.2 Zápis útvarů

Na čtverečkovaném papíru můžeme obrazec popsat pomocí šipkového zápisu. Máme zde čtyři směry šipek: \rightarrow , \uparrow , \leftarrow , \downarrow . (Tímto zápisem je zapsán nejmenší čtverec.) Zápis můžeme dělat tak, že namalujeme určitý počet šipek, který je potřeba udělat k danému bodu, či si ho můžeme zkrátit tak, že napíšeme nad šipku číslem počet šipek, které se mají udělat. A to asi takto \leftarrow^3 .

U trojúhelníkového papíru mě napadl zápis podobný. Opět bychom měli čtyři směry šipek, které by byly stejné jako u čtverečkovaného papíru. Zde bychom ale brali ne obvod trojúhelníka, po kterém by se cestovalo, ale obvod „zkoseného čtverce“, který vytvářejí dva trojúhelníky. Tyto zkosené čtverce by byly zkosené na pravou stranu. To by musela být dohoda, která by platila, aby nevznikla nějaká nesrovnalost. Ukázka popisu obrazce obr. 1.5



$A \rightarrow \uparrow B \uparrow \leftarrow C \leftarrow D \leftarrow \downarrow E \downarrow \rightarrow \rightarrow A$

Obr. 1.5

Nevím, zda by se v tomto zápise nenašly nějaké sporné chyby, které by při práci s ním vyšly najevo. Tento způsob zápisu jsem si zkoušela pouze sama na několika obrázcích, neověřovala jsem ho na dětech, ani jsem s ním více nepracovala. Proto by bylo zajímavé, kdyby se tento způsob popisu obrazce zkusil v reálu, popřípadě, kdyby se našel nějaký jiný a spolehlivější zápis. Určitě by to bylo zajímavé.

1.1.3 První úvahy jak objevit vzorec

Ze začátku jsem uvažovala nad tím, že budu různě kombinovat vzorec pro čtverečkovaný papír. Budu ho zkoušet různě „přetvořit“, a potom aplikovat na trojúhelníkový papír.

Jako první jsme se rozhodla změnit hodnotu $v - 1$. Napadlo mě, že trojúhelníkový papír je skoro rozdělen na „polovinu“ čtverečkovaného papíru, a proto by zde nemuselo být $v-1$ ale $v-2$. Vzorec jsem předělala do této podoby. $S = h/2 + v - 2$. Tento vzorec jsem zkusila aplikovat na některé obrazce v tomto prostředí. Vzorec nebyl správný.

Dále mě napadla úvaha, zda se nezmění hodnota $h/2$ na $h/4$. Opět kvůli tomu, že kosočtverec je zde rozdělen na polovinu, tím vznikají dva trojúhelníky a celé trojúhelníkové prostředí. Vzorec by byl v této podobě. $S = h/4 + v - 1$. Zkusila jsme ho aplikovat na obrazce. Vzorec nebyl také vhodný.

Poté mě napadla kombinace těchto dvou pokusů: $S = h/4 + v - 2$. Ani tímto vzorcem jsem nedošla ke správnému výsledku.

Pak už to byli většinou náhodné kombinace, ani jedna nebyla správná (viz Evidence pokusných vzorců)

Evidence pokusných vzorců:

Vzorec pro Pickovu formuli na čtverečkovaném papíře	$S = h/2 + v - 1$
Pokusné vzorce pro Pickovu formuli na trojúhelníkovém papíře	
1.	$S = h/2 + v - 2$
2.	$S = h/4 + v - 1$
3.	$S = h/4 + v - 2$
4.	$S = h/3 + v$
5.	$S = h/2 + v$
6.	$S = h/2 + 2v$

1.1.4 Změna k přístupu objevování

Pokusy zde byly, ale ne úspěšné. Rozhodla jsem se, že tudy cesta nevede. Toto není dobrý způsob, jak začít dobře pracovat a na něco přijít. I kdyby to vyšlo, tak bych nevěděla, proč to takto je a jak jsem k tomu došla, neznala bych postup. Ani bych se do tématu hlouběji neponořila a nerozuměla mu. Bylo by to jen náhodné objevení něčeho, ale nevěděla bych, proč to platí. Neprošla bych si daným prostředím a nenastaly by takové situace, kdy jsem si nevěděla rady, potřebovala poradit. Zjistit, zda tento obrazec může být či nemůže být, zda je to geometrický tvar, z kterého mohu vyjít pro moji práci či ne. Prostředí trojúhelníkového papíru by pro mě zůstalo cizí a neznámé. Proto jsem tuto variantu zavrhl.

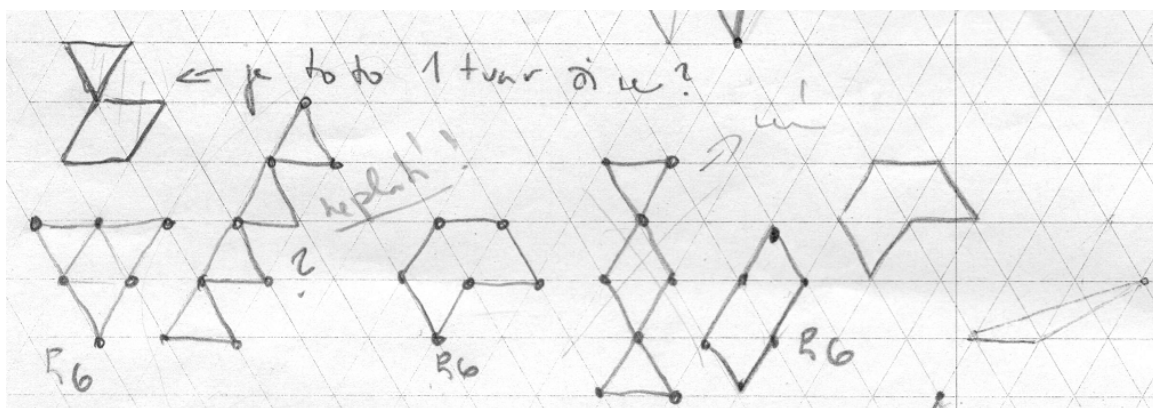
Nyní si myslím, že jsme udělala dobře, že jsem nešla touto cestou. Nejen, že by to byla práce byla zdlouhavá a nejistá, ale také neférová vůči mně samé. Ochudila bych se o samotný poznávací proces³ a radost z objevu.

Začala jsem od kreslení různých útvarů na tomto papíře, abych se s ním seznámila a „poznala“ ho. Bylo to takové „otřukávání“. Ze začátku jsme si myslila, že to bude jednoduché a snadné. Vždyť jsme Pickovu formuli na čtverečkovaném papíře objevili za jeden seminář, což jsou dvě vyučovací hodiny. Proto jsem si říkala, že maximálně za jeden den tuto formuli objevím. Jak jsem se mýlila! Nebylo tomu tak. Bylo ještě mnoho a mnoho práce a času, než jsme objevila tuto formuli. Mnoho roztrhaných papírů a mnoho tetelení u srdíčka s pocitem, že už už jsem skoro na konci své cesty a formuli mám na dosah ruky. Po otestování na několika tvarech na tomto papíře má naděje pomalu splaskávala jako velká bublina a bušení srdce se zase upokojilo se slovy, ještě to není ono.

³ „**poznávací proces** – Soubor procesů, jimiž člověk poznává sebe sama a okolní svět. Poznávací procesy zkoumá kognitivní psychologie a obecnější, interdisciplinární kognitivní věda, řadí se k nim zejména vnímání, zapamatování, vybavování, představivost, myšlení, zpracování verbální a neverbální informace aj. Z pedagogického hlediska jsou důležité, protože tvoří podstatu učení, jsou součástí intelektuálního vývoje.“ [Průcha, 2008, str. 173]

1.1.5 Zjištění neznalosti

Uvědomila jsem si, že nevím, jaké tvary platí v této síti a jaké ne. Co je jeden tvar a co je spojení několika tvarů dohromady? Existují nekonvexní obrazce? Existují „překřížené“ obrazce (obr. 1.6)? To byly základní otázky, které jsem si začala pokládat. Každé prostředí má svoje zásady a před tím, než s ním pracujeme, je třeba se s nimi důkladně seznámit. To mi přišlo na mysl při mé práci. Nemůžeme tvořit z ničeho, neboť tím bychom nikam nedošli, anebo bychom došli někam jinam, než má naše cesta směřovat. Proto jsem si musela ujasnit pravidla práce.



Obr. 1.6

Myslím, že tímto objevováním jsem si sama v sobě uvědomila poznatek. Někde ve mně toto zjištění bylo, ale až při mojí práci mi jasně vytanulo na mysl, že tomu tak opravdu je. Je třeba hned na začátku stanovit pravidla toho, jak v prostředí pracovat.

Lepší postup práce je možná ale trochu jiný. Pokud dítě správně vedeme k jeho samostatné práci a práce je konstruována tak, že bez určení a pravidel nejde dosáhnout stanoveného cíle. U tohoto je ale nutné, aby se dítě během procesu samo dostalo k tomu, že je nutné znát pravidla či zásady práce. Dítě na to přijde samo, ale až samotnou prací na daném úkolu. Tím si uvědomí důležitost znát pravidla, tak jako já.

Začala jsem od obsahu obrazce. Dělal jsem různé obrazce o stejném obsahu a u nich jsem zjišťovala vnitřní a hraniční body. Tím byl obsah fixován. Takto jsem vyzkoušela asi deset obrazců. Poté mě napadla otázka, zda fixuji správného člena neznámého vztahu. Proto jsem zkusila zafixovat vnitřní body. Nevím proč, ale později jsem od tohoto fixování upustila a vrátila se k fixaci obsahu.

Při práci mi hlavou probleskovalo mnoho otázek. Ze začátku mi připadalo, že pokud nejde tvar „překřížit“, tak nemohu moc tvarů vymyslet. Tvary se stále budou opakovat, jen budou zvětšené či zmenšené. Je to tak správně? Nevím. Nevidím, kdy je útvar o větším počtu trojúhelníků a kdy ne, zvláště pokud je linie útvaru mimo linii trojúhelníkový papír. Asi se ještě neumím v tomto prostředí dobře orientovat a pracovat s ním tak, jak jsem si myslela, že umím. Neumím. Poznávání chce asi věnovat více času.

Později jsem nad tímto momentem přemýšlela. Je to opravdu tak. Ze začátku se mi jevilo, že všemu rozumím a „již vím, jak s prostředím zacházet“. Skutečnost se ukázala jiná. Bylo to moje velké sebevědomí⁴, ve kterém jsem si myslela, že už prostředí rozumím a umím s ním pracovat. Že mi stačí málo, abych ho pochopila, i když se na první pohled zdálo složité. Opak je pravdou, myslím. Čím na mě prostředí působí složitěji, tím je důležitější ho dobře „prozkoumat“ ze všech stran. Dát mu čas, dát mu možnost se rozvinout do různých podob a možností, aby pak pracující nebyl zaskočen tím, co ho při práci potkalo, s čím se setkal. Myslím, že čím počátečnímu zkoumání a poznávání dáte více času, tím je potom v průběhu práce rychlejší, lepší a kvalitnější. Nezaobíráte se maličkostmi, neboť ty už se vyřešily při seznamování s prostředím.

⁴ „**sebevědomí** - vědomí vlastní ceny, kvalit a schopností a víra v ně a v budoucí výkon; krajní polohy – nízké a nadměrné sebevědomí časté u neuróz, depresí; viz též komplex méněcennosti“ [Hartl,1993, str. 186]

1.1.5.1 Jedna zodpovězená otázka

Při mé práci se mi jevila řada otázek. Rozhodla jsem se na jednu z nich odpovědět. Jde vytvořit na trojúhelníkovém papíře obrazec o obsah 2,5? Lze vůbec udělat útvar o obsahu $x,5$? To byla otázka, na kterou jsem zaměřila na čas pozornost.

Pokud by tato otázka padla v čtvercové síti, má odpověď by byla jednoznačná. Ano. Zde, v tomto prostředí, jsem si nebyla jistá. Zkusila jsem na odpověď jít úvahou.

Zde není čtverec, který by se mohl rozdělit na polovinu. Čtverec má čtyři vrcholy, tím se dá lehce rozdělit (od vrcholu k protilehlému vrcholu, ne po obvodu). Trojúhelník má jen tři vrcholy. Pokud bychom jeden vrchol spojili s příslušným těžištěm, tak obrazec není platný. Musí vždy končit na „vrcholech“. Proto si myslím, že na trojúhelníkovém papíru obrazec o obsah $x,5$ nelze udělat. Svoji domněnku jsem si zkusila v praxi na trojúhelníkovém papíře. Potvrdilo se mi, že tento obsah skutečně nelze v této síti udělat, i když jsem se snažila. V trojúhelníkové síti jdou pouze obrazce o celočíselném obsahu.

To byla taková jedna z otázek, kterou jsem se zabývala při objevování této sítě. Poté jsem se opět vrátila k objevování vzorce.

1.1.6 První tabulka

Dále jsem pracovala s obsahem. Dělal jsem soubor o co nejvíce obrazcích o různých tvarech, ale stejném obsahu. Ty jsem třídila. Jevilo se mi, že stejné obsahy mohou mít různý počet hraničních i vnitřních bodů. Záleží na tvaru obrazce. Soubor dat se mi zvětšoval. Když jsem došla k obsahu o hodnotě pět, napadlo mě, že musím zkusit odhadnout vzorec, třeba se to povede. Připadalo mi, že už jsem blízko. Něco mě nutí, že už jistě mám dostatečně velký soubor dat (tabulka 1.7).

S	h	v
1	3	0
2	4	0
3	3	1
	5	0
4	4	1
	6	0
5	7	0

Tab. 1.7

S - obsah

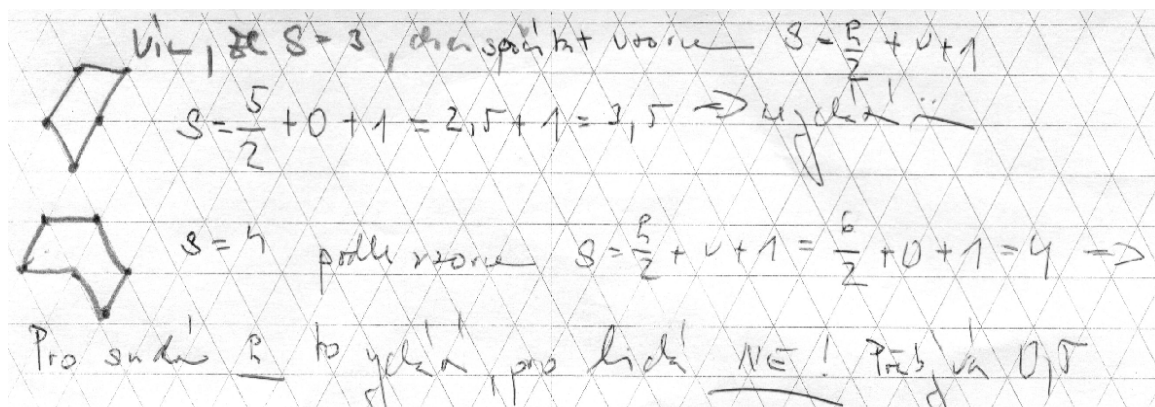
h – počet hraničních mřížových bodů

v – počet vnitřních mřížových bodů

Z tohoto souboru jsem se snažila získat vzorec.

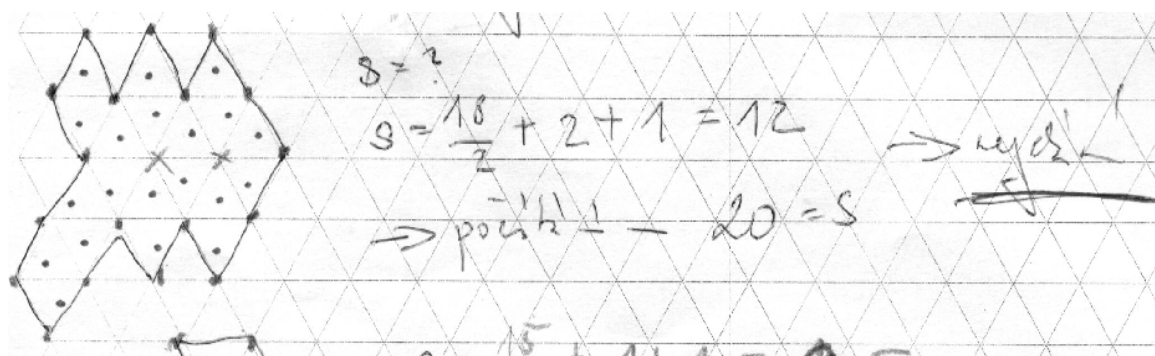
Uvědomila jsem si, co se z tabulky ukazovalo: jestliže je hodnota obsahu a počtu hraničních bodů stejná, má tento útvar pouze jeden vnitřní bod. Pokud je počet hraničních bodů o dvě větší než obsah, počet vnitřních bodů je nula. Zatím zde jiné varianty nemám, takže zkusím tyto poznatky aplikovat do vzorce pro Pickovu formuli na čtverečkovaném papíře. Vzorec by asi vypadal takto: $S = h/2 + v + 1$

Namalovala jsem libovolný obrazec o obsahu 3, obrazec byl celomřížový (obr. 1.8). Spočítala jsem počet hraničních a vnitřních bodů a hodnoty dosadila do vzorce. Ze vzorce mi vyšla hodnota o obsahu 3,5. Výsledek tedy nebyl správný. Vzorec pro tento útvar „nefungoval“. Dále jsem tímto vzorcem zkoušela vypočítat jiný obrazec. Namalovala jsem obrazec o obsahu čtyři, obrazec byl také celomřížový (obr. 1.8). Opět jsem spočítala h a v . Hodnoty jsem dosadila do vzorce. Vyšel mi správný výsledek (obr. 1.8). Napadlo mě, zda jsem nenašla vzorec, který platí pouze pro sudá h . Pokud by se použil pro lichá h , přebývalo by 0,5. Pokusila jsem se svoji teorii ověřit tím, že jsem udělala jiný obrazec o sudém číselném obsahu. U něho jsem zkusila použít tento vzorec. Možná, že teorii ověřím a budu mít vzorec



Obr. 1.8

pro sudá h . Poté by zbývalo najít vzorec pro lichá h . Udělala jsem obrazec o obsahu dvacet. Opět jsem spočítala h a v . Dosadila do vzorce a vypočítala (obr. 1.9). Po spočítání mi nevyšlo správné číslo! Zkusila jsem nový obrazec, také o sudém obsahu. Po dosazení do vzorce mi opět nevyšlo správné číslo.



Obr. 1.9

Musela jsem konstatovat, že má hypotéza⁵ o správném vzorci se nepotvrdila.

Má potřeba získat z takto malého souboru dat vzorec byla mizivá. Nyní to uznávám, že to byl pokus z nadšení. Cítala jsem, že už musím být někde blízko, vždyť nějaké hodnoty

⁵ „**hypotéza** – 1. ve vědecké oblasti tvrzení o předpokládaném či pravděpodobném zjištění (výsledku, poznatku), k němuž se má ve zkoumané rovině dospět. Formulace hypotézy je součástí projektu výzkumu a vytváří určitou cílovou představu o výsledcích konkrétního výzkumu. Obecně jsou formulace hypotéz nezbytnou součástí každé vědecké teorie, tedy i pedagogice. 2. Ve statistických procedurách empirických výzkumů předpoklad, že mezi dvěma soubory, proměnnými apod. existuje, popř. neexistuje vztah (statistická závislost). Platnost takto formulované hypotézy se ověřuje statistickými testy významnosti rozdílů (F-test aj.)” [Hartl, 1993, str. 77]

se rýsují. K vzorci jsem dedukcemi⁶ došla. Ovšem při ověření nebyl správný. Byl pro pár počátečních hodnot a pro větší čísla ho nebylo možné použít. Byl to opojení z toho, že už je určitě něco blízko. Bylo to na popud mého bratra, který mi řekl, že „to z toho už musím vidět, a že mi to trvá nějak dlouho“. Bylo to ve vypjaté situaci. Celý večer jsem nad obrazci seděla a on se vedle mě učil. Když skončil, řekl mi tuto poznámku a já si byla jistá, že už jistě také svoji práci zakončím tím, že se dostaví výsledek v podobě vzorce. Nebylo to tak a já si později uvědomila, že kdybych se nenechala takto „vyvést z míry“, mohla jsem dále systematicky dělat obrazce a ne se zdržovat „vymyšlením“ vzorce z malého souboru dat, který toho zatím moc neříkal, mohla jsem práci rychleji dokončit. Ale to jsem si uvědomila také až zpětně.

1.1.7 Chyba jako „záchrana“

Poté má práce pokračovala dál. Fixovala jsem obsah, dále jsme pracovala s různým počtem vnitřních a hraničních bodů. Soubor se mi zvětšoval. Pomalu se mi začal tvořit náhled na jakousi pravidelnost. Měla jsem radost.

Tato pravidelnost skončila s číslem devět, počet vnitřních bodů tři, počet hraničních bodů měl být pět, ale vyšel mi šest. Jak je to možné? Že by celý tento systém nebyl dobře? Až do této doby mi vycházela pravidelnost zřetelně u všech dat! Zkusím přepočítat některé obrazce, které byly naposledy. Třeba zjistím, že pravidelnost je pravidelná, jen jsem udělala chybu⁷. To by byla lepší varianta, neboť by má práce mohla ještě vést ke zdárnému výsledku.

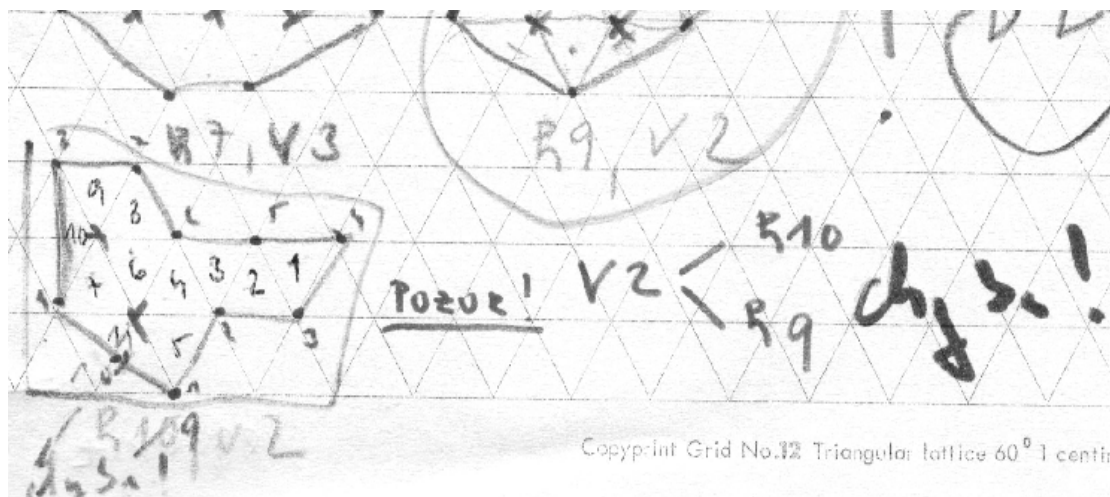
Kdyby se chyba nepotvrdila, musela bych hledat jiný systém, jiný způsob. Tento systém by přestal platit.

U obrazců, které jsem dělala minulý večer, jsem překontrolovala počet hraničních bodů a počet vnitřních bodů. U jednoho z nich jsem našla chybu

⁶ „**dedukce** – odvození zvláštního případu z obecného; kritériem takového úsudku je stupeň jistoty, se kterým přichází pravdivost z obecného soudu na soud speciální, závěr“ [Hartl, 1993, str. 31]

⁷ „**Chyba** hraje v životě žáka důležitou, někdy dokonce osudovou roli. V naší škole je chyba často vnímána jako jev nežádoucí, jako něco, čeho je nutné se vystříhat, jako něco, čeho se bojí nejen žáci, ale i učitelé. V zemích s dlouhou demokratickou tradicí je chyba vnímána spíše jako přirozená součást učení.“ [Hejný, 2004, str. 63]

(viz obr. 1.10). Měla jsme obrovskou radost. Jak prosté radovat se z chyby. Pravidelnost se opět stala pravidelností.



Obr. 1.10

Nikdy jsme si nemyslela, že se budu z chyby radovat. Chybu jsem vždy brala jako něco špatného. Něco, co se vůbec nepovedlo. V této chvíli jsem na ni pohlížela jinak. Ne jako na špatnost, na něco, co se mi nepovedlo. Spíše jsme si přála, abych zde chybu našla, aby se chyba v mé práci potvrdila. Tím, že by se nepotvrdila, by má práce nevedla ke správnému cíli. Pokud by se chyba potvrdila, signalizovala by, že jsem šla správnou cestou, jen jsem se v některém kroku mýlila. Zde byla chyba jako indikátor něčeho, nad čím bych se měla zamyslet, co bych si měla projít znovu. Co by mohlo zmařit moje úsilí. A právě chyba by byla něco, co mě může „zachránit“. Zachránit něco, nad čím jsem strávila již tolik času. Chyba se potvrdila.

1.1.8 Nový začátek

Byly letní prázdniny. O prázdninách jsem se tomuto tématu moc nevěnovala, neboť jsme si říkala, že si musím odpočinout. To se mi nevyplatilo!

Po prázdninách jsem se rozhodla, že budu pokračovat v objevování. Nyní nahlížím do materiálů a nevím. Nevím, co znamenají jednotlivá čísla, co jsem jak zjišťovala, co znamenají moje poznámky. Toto není dobré zjištění.

Musela jsem začít od začátku. Znovu jsem začala od jednotlivých obrazců, od začátku souboru. Nevěděla jsem, jak jinak se vpravit do „formy“, ve které jsem byla před prázdninami. Začala jsem tímto způsobem. Znovu jsem dělala obrazce, znovu zanášela hodnoty do tabulky a následně je porovnávala s hodnotami předešlými. Trvalo mi celý den, než jsem si uvědomila, že pracuji stejným systémem jako před prázdninami. Než jsem si uvědomila, jak jsem postupovala, co mé hodnoty znamenaly, jak jsem je získala. Škoda, byl to krok zpátky, který jsme v té chvíli cítila dosti zřetelně.

To, co jsem v té chvíli prožila, mi dalo jednu nezapomenutelnou zkušenost. Pokud mám nějakou práci rozdělanou, je nutné, dělat ji systematicky. Nedávat velké časové rozestupy mezi jednotlivými úseky práce, ale pokračovat na práci systematicky. Dát si dlouhou pauzu není dobré. Tím, že jsem objevování dala takto velký rozestup mezi jednotlivým pokračováním v činnosti, tím jsem se ve své vlastní práci ztratila. Ačkoli jsme si myslela, že se neztratím. Vždyť je to přeci má práce, mé objevování a já sama musím nejlépe vědět, jak jsme k dané hodnotě došla, jak jsem ji objevila, co znamená. Byl to omyl. Po takto dlouhé době se nelze vrátit k něčemu, i když jsem to dělala sama, co jsem dělala naposledy před měsícem a půl. Je to zkušenost. Myslela jsme si, nyní si nemyslím. Už vím, že věci se dodělávají hned, pokud to má k něčemu být a chci něčeho dosáhnout. Lidové přísloví opravdu platí.

1.1.9 Druhá tabulka

Po opětovném zorientování se v souvislostech jsem pokračovala ve své práci a dále zvětšovala soubor. Nyní jsem byla opět v „centru dění“. Začala se mi tvořit databáze. Mohla jsem uspořádat data, která jsem měla, do tabulky (tabulka 1.11). Hodnoty jsem uspořádala podle obsahu, tak jak jsem celou dobu pracovala.

Tab. 1.11

Obsah S	Počet hraničních bodů h	Počet vnitřních bodů v
1	3	0
2	4	0
3	5	3
	3	1
4	6	0
	4	1
5	7	0
6	8	0
	6	1
7	9	0
	7	1
	5	2
8	10	0
	8	1
	6	2
9	11	0
	9	1
	7	2
	5	3
10	12	0
	10	1
	8	2
	6	3
11	13	0
	11	1
	9	2
	7	3
12	14	0

	12	1
	10	2
12	8	3
	6	4
13	15	0
	13	1
	11	2
	9	3
	7	4

1.1.10 Třetí tabulka

Po určitém čase jsem si začala uvědomovat, že se mi v tabulce začala tvořit pravidelnost, která v sobě měla pravidlo. Bylo to více vzorců s podmínkou pro jednotlivé hodnoty (tab. 1.12). V této chvíli jsem si uvědomila, že mi z tabulky vplynuly vztahy, ve kterých je fixovaný člen \underline{v} . Ale já jsem celou dobu fixovala hodnotu S . Nebylo to záměrné, takto mi to vplynulo z tabulky (tab. 1.11), když jsem nad ní přemýšlela a pozorovala jsem měnící se hodnoty. Byl tedy fixován člen \underline{v} . Dále se měnilo číslo, které se přičítalo k veličině \underline{h} . Vždy se přičítalo o dvě více než v předchozím vztahu, kdy byla hodnota \underline{v} menší o jedničku.

podmínka	vzorec
$v = 0$	$S = h - 2$
$v = 1$	$S = h$

$v = 2$	$S = h + 2$
$v = 3$	$S = h + 4$
$v = 4$	$S = h + 6$
$v = 5$	$S = h + 8$
$v = 6$	$S = h + 10$
$v = 7$	$S = h + 12$
$v = 8$	$S = h + 14$
...	...

Tab. 1.12

Zkoušela jsem těmito počátečními vzorci vypočítat nějaké obsahy. Či lépe řečeno, jsem si ověřovala, zda tyto vzorce skutečně mohu použít na jakýkoli obrazec.

Nejdříve jsem obrazec namalovala, poté jsem spočítala počet vnitřních a hraničních bodů. Dosadila do příslušného vzorce s podmínkou. Vyšel mi obsah. Správnost jsem si ověřila tak, že jsme spočítala „ručně“ počet jednotlivých trojúhelníků v obrazci. Tím jsem mohla porovnat hodnotu obou dvou obsahů. Hodnoty obsahu vyšly při obou dvou metodách stejné. Takovýchto „pokusů“ jsem si udělala několik. Obsahy se vždy shodovaly. Tato metoda ale byla pracná.

Říkala jsem si, že mám začátek vzorce. Jenže já jsem chtěla vytvořit jeden jediný vzorec, kterým bych automaticky vypočítala obsah. Chtěla jsem jeden vzorec bez podmínek, které by nemusely být určovány. To jsem zatím neměla, ale snad jsme udělala správný krok kupředu.

Nyní, když jsem se po čase na tabulku 1.12 podívala, vyplynulo mi z ní, že jsem byla velmi blízko toho, abych objevila vzorec už z tabulky samotné. Z tabulky byl vztah viditelný. Vzorec by byl: $S = k + (v - 1) \cdot 2$. Před tím jsem ho „v zápalu objevování“ neviděla, asi jsem čekala, že se přede mnou najednou „vynoří“ sám.

Ilustrace obrazů k vzorcům z tabulky 1. 12

$V=0$
 $S=R-2$

$V=1$
 $S=R$

$V=2$
 $S=R+2$

$V=3$
 $S=R+4$

$V=4$
 $S=R+6$

$V=5$
 $S=R+8$

$V=6$
 $S=R+10$

početní $\Rightarrow S=20$
 vzorec:
 $S=R+10$
 $S=10+10=20$

OK
 stejní!

Copyright © J. N. P. Tringali, Inc. 40th Anniversary

Copyright © J. N. P. Tringali, Inc. 40th Anniversary, London, E. C. 1.

1.1.11 Objevení vzorce

Svoji databázi (tab. 1.11) jsem zvětšovala a z této databáze se pokouším najít vzorec.

Ještě jednou jsem si ujasnila souvislosti. Existuje vztah mezi S , h , v . Stále jsem si říkala, že musím nějak využít toho, že jsem nejdříve objevila více vzorců s podmínkou pro v , která byla daná. V tom případě, bude tedy proměnlivá nějakým způsobem hodnota v ve vzorci. To bude asi to, co se bude měnit, s čím se bude pracovat.

Rozhodla jsem se, že budu zkoušet různé varianty vzorce s hodnotou v (počtem vnitřních bodů). Pokud budu k hodnotě v něco přičítat, asi by to nebyl ten správný postup. Neboť přičítat se bude tím, že se bude měnit hodnota vnitřních bodů. Zkusím tedy násobení. Vynásobím hodnotu v dvěma a potom zkusím odečíst číslo dvě. S hodnotou h (počtem hraničních bodů) nebudu zatím hýbat. Nechám ji v nezměněném tvaru.

Pokud by to bylo takto, vzorec by měl podobu:

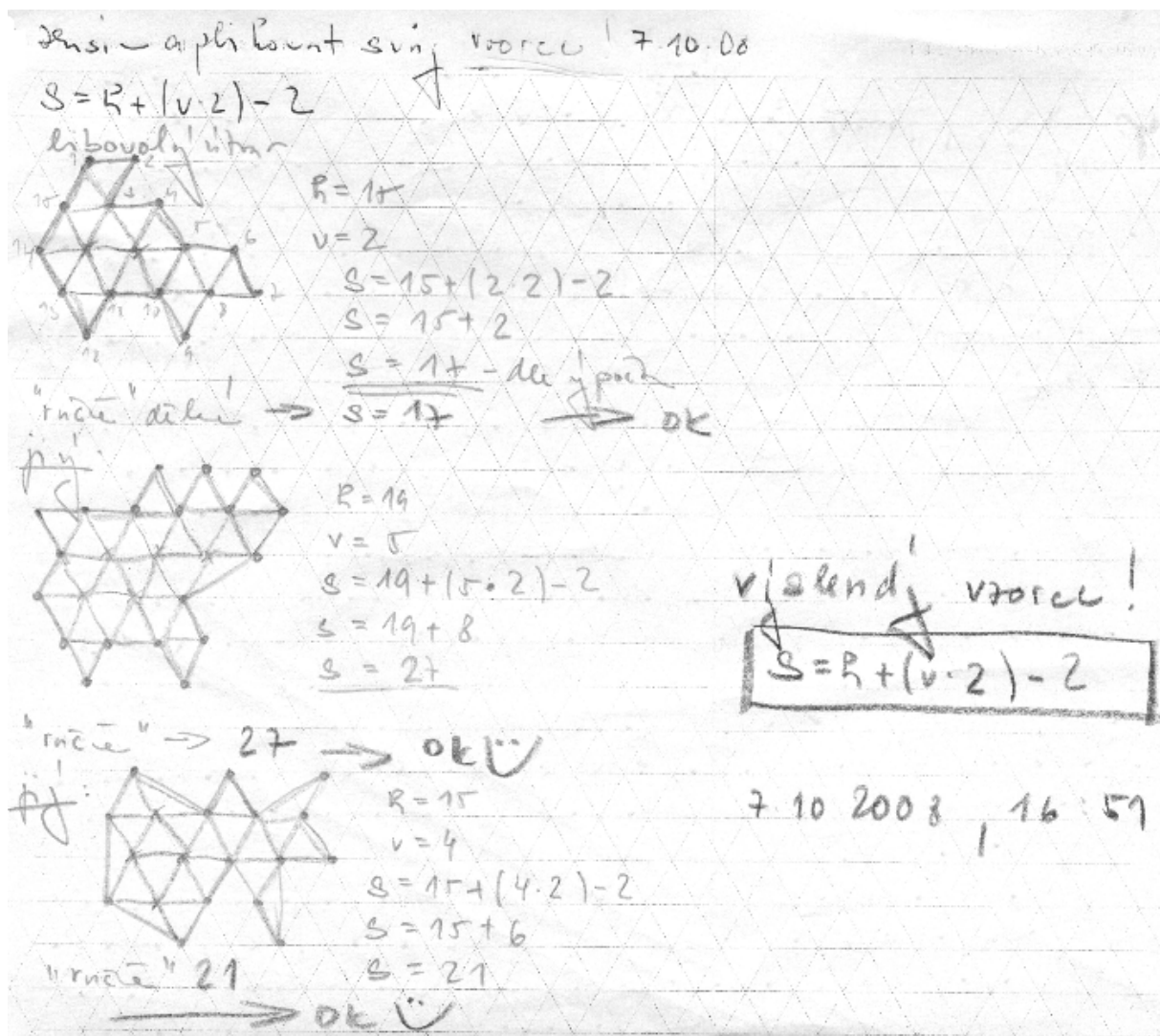
$$S = h + (v \cdot 2) - 2$$

Toto byl momentální nápad při tom, když jsem přemýšlela nad tabulkou. Byla to dedukce nad tím, jak by konečný vzorec mohl vypadat. Říkala jsme si, že to zkusím. Že zkusím takto nechat vzorec a ověřit si to na konkrétních úlohách.

Při konkrétním dosazování čísel mi vzorec začal „fungovat“. Zkoušela jsem více a více úloh (obr. 1.13), abych se přesvědčila, že to není jen naděje, která zde byla mnohokrát a mnohokrát poté jsem byla zklamaná. Čím více jsem zkoušela, tím jsme si byla jistější. Ano, našla jsem správný vzorec. Našla jsem vzorec pro Pickovu formuli na trojúhelníkovém papíře! Našla jsem ho sama!

Měla jsem z toho obrovskou radost.

Při objevování jsem celou dobu čekala na tento okamžik, až najdu onen vzorec, který je klíčem k mé práci. To, co mám vyzkoumat. Přála jsem si to a těšila jsem se na to. Když jsem měla vzorec na dosah ruky, když jsem vlastně byla na konci své



Obr. 1.13

objevitelské cesty, tak jsem byla spíše skeptická a zkoušela jsme více a více obrázků, kterými bych si potvrdila, že je má domněnka o vzorci správná. Spíše jsem asi ve skrytu duše počítala s tím, že to „zase nevyjde“ a že se těším zbytečně. Nevím, v té chvíli jsem se chtěla více radovat, ale nebylo to takové, jaké jsem si to představovala.

Výsledný vzorec Pickovy formule pro trojúhelníkový papír

$$S = h + (2 \cdot v) - 2$$

1.1.12 Evidence objevování Pickovy formule na trojúhelníkovém papíru

V této části jsme se snažila sjednotit můj řešitelský postup do etap.

1. Zadání úkolu: Pokusit se objevit Pickovu formuli na trojúhelníkovém papíře.
2. Uchopení úlohy. Vyhledávání materiálů řešitele k dané problematice. Řešitel ví, že danou problematiku již jednou řešil ve čtvercové síti, vybavování si zkušeností.
3. Pokus o řešení analogií. Vyhledání vzorce Pickovy formule pro čtverečkovaný papír, snaha o přetvoření tohoto vzorce na vzorec pro trojúhelníkový papír.
4. Evidence pokusných vzorců do tabulky.
5. Seznamování se s trojúhelníkovým prostředím. Tvorba prvních obrazců, vymezení pojmů a „pravidel“. Nalezení prvních vlastností, obsah je celočíselný.
6. Systematická tvorba s pevným obsahem. Řešitel začíná od obsahu o hodnotě 1 a postupně obsah zvětšuje.
7. Evidence hodnot \underline{v} , \underline{h} , S do tabulky.
8. Hledání vazeb mezi daty v tabulce.
9. První hypotéza. Získání vzorce, jeho aplikace na obrazce. Pokus je neúspěšný.
10. Rozšíření souboru dat, stále je fixovaný obsah.
11. Revize dat. Zjištění, že pravidelnost tohoto souboru přestala platit. Snaha o nalezení chyby. Objevitel překontrolovává jednotlivé hodnoty u obrazců, které naposledy dělal.
12. Nalezení chyby, pokračování v shromažďování dat.
13. Delší časová pauza.
14. Znovuobjevování. Obtíže s uvědoměním si vazeb. Neschopnost uvědomění si souvislostí v dosud objevené problematice.
15. Zorientování se v souvislostech. Kompletace dat. Pokračování ve zvětšování souboru dat.
16. Tvorba prvních generických modelů. Vytvoření vzorců s podmínkou pro \underline{v} .
17. Organizace dílčích výsledků.
18. Organizace veškerých dat do tabulky.

19. Uvědomění si veškerých souvislostí.
20. Vytvoření generického modelu, objevitel objevil vzorec pro Pickovu formuli na trojúhelníkovém papíře.
21. Ověření správnosti tohoto .
22. Potvrzení správnosti vzorce na úrovni hypotézy.

1.1.13 Hladiny⁸ poznávacího procesu

V předchozích odstavcích jsem mapovala svůj objevitelský proces. Nyní jej porovnám s teoretickými poznatky o poznávacím procesu a následně jej budu aplikovat na svůj vlastní objevitelský proces. Aplikace poznávacího procesu na mé objevování Pickovy formule jsou psány graficky odlišně.

Jako teoretické východisko použiji Teorii generických modelů (TGM) zpracovanou prof. M. Hejným v (Hejný, 2004, str. 23-42).

Poznávací proces je možno rozdělit do několika hladin, kterými většinou prochází jedinec. Je to proces, „který nás vede od jedné věci k druhé, od jedné etapy řešení problému k další.“ (Linhart, 1972, str. 228)

Důležitým a prvním faktorem, který vstupuje do tohoto procesu je:

• **motivace**

„Motivaci rozumíme souhrn vnitřních i vnějších faktorů, které: 1. vzbuzují, aktivují, dodávají energii lidskému jednání a prožívání; 2. zaměřují toto jednání a prožívání určitým směrem; 3. řídí jeho průběh, způsob dosahování výsledků; 4. ovlivňují též způsob reagování jedince na jeho jednání a prožívání, jeho vztahy k ostatním lidem a ke světu.“ (Průcha, 2008)

Motivaci můžeme rozdělit na vnitřní a vnější (Trpišovská, 2007). Sama si myslím, že účinnější je motivace vnitřní, která sama probouzí v jedinci zájem o danou věc.

⁸ **Hladina** – v některé literatuře je možné najít i pojem etapa. Sama v těchto slovech cítím rozdíl. Etapu chápu spíše jako ohraničený úsek, zatímco hladinu chápu jako něco, co se může měnit, proměňovat. Například jako hladinu moře, ta může být také v různých místech různá. Etapu cítím spíše jako horizontální rozložení, zatímco hladinu jako vertikální.

Myslím, že má hlubší a trvalejší charakter. Může vznikat na základě rozporu mezi tím, že danou problematiku neznám a chtěl bych ji znát. (Hejný, Jirotková, 1999)

Ve mně, jako v řešiteli, byla předchozí silná zkušenost s objevováním Pickovy formule v jiném prostředí. Byla jsem motivována tím, že předchozí objevování bylo úspěšné. Chtěla jsem v objevování pokračovat. Měla jsem velkou snahu objevit něco úplně sama bez pomoci skupiny. Motivace byla vnitřní, vycházela z mé zkušenosti a mé povahy.

• první hladina izolovaných⁹ modelů

V této etapě se dítě seznamuje s izolovanými modely. Izolované modely jsou modely, které dítě na začátku získává seznamováním s daným problémem. Jsou to jakoby jednotlivé zkušenosti, nabývané při budování matematického poznatku. Pokud dítě hlouběji pronikne do tohoto typu modelů, čím nasbírá více zkušeností s těmito modely, tím si bude v dalších fázích poznávacího procesu jistější a jeho poznání bude pevnější.

Mezi těmito modely můžeme rozlišit i modely specifické. Jedná se o tři typy modelů:

◦ modely překvapivé – „těž-modely“

Modely, které vypadají, že modelem nejsou či řešitel vůbec nepočítal s tím, že takovéto modely mohou existovat.

◦ modely zdánlivé – „jakoby-modely“

Modely, které se na první pohled mohou modelem daného objektu zdát, ovšem nejsou jím.

◦ ne-modely

Tímto modelem demonstrujeme to, co modelem není. Co v této problematice za model nepovažujeme.

(Hejný, 2004)

⁹ **Hladina izolovaných modelů** – v některé literatuře též hladina separovaných modelů

Začala jsem svůj objevitelský proces tím, že jsem malovala různé mřížové trojúhelníky. V prvních obrazcích jsem se snažila dát důraz na tvar. Snažila jsem se ho udělat co nejzajímavější, co nejfantastičtější. (Zde je podle mě normální, že se řešitel v prvé řadě soustředí na tvar. Je to prvotní globální vizuální vjem, se kterým má kontakt a který na něj nějak působí.) Poté jsem si zkoušela obrazce připomínající věci z reálného života. Něco z toho, co nás každodenně obklopuje. Tvořila jsem tedy mřížové útvary na trojúhelníkovém papíru. Pokud byly složitější, tak jsem si nebyla tak jistá, postupovala jsem pomaleji a opatrněji. Útvary jsem nejdříve jen tak náhodně „zkoušela“, postupně jsem dělala i o něco složitější. Terminologií TGM jsem vytvářela izolované modely.

Poté jsem si uvědomila cíl své práce a začala jsem počítat obsah útvarů. V této chvíli jsem se „nabažila“ poznáváním útvarů na trojúhelníkovém papíře, vyzkoušela jsem si své nápady, a proto se rozhodla přejít na „práci“ počítání obsahů. Postupovala jsem tak, že jsem počítala jednotlivě každý trojúhelník. Před tím jsem si nezkoušela odhadnout obsah obrazce. Zde mi přišlo, že jsem naučena jít dosti mechanickou prací. Ale jsem na to zvyklá. Dříve se mi osvědčilo jít tímto mechanickým způsobem, a proto jsem svoji snahu úporně opakovala. Následně jsem počítala vnitřní mřížové body, poté hraniční mřížové body.

A. Po několika „kompletních“ obrazcích (mechanicky spočítané S , v , h) jsem zkoušela vytvořit vzorec. Vytvořila jsem první hypotézu, která zněla:

Pokud vydělíme počet hraničních mřížových bodů dvěma, k tomu přičteme počet vnitřních mřížových bodů plus jedna, dostaneme obsah obrazce na trojúhelníkovém papíře.

Tím jsem se snažila dostat k zobecnění. Pokus zde však byl neúspěšný. Po namalování obrazce, spočítání jeho obsahu „ručně“ a vzorcem jsem došla k rozdílným výsledkům. Došlo ke krachu hypotézy.

B. Proto jsem musela dál dělat mřížové mnohoúhelníky na trojúhelníkovém papíru. V této fázi jsem ještě nejspíše neměla dostatečné množství izolovaných modelů, které by se mi „propojily“

a daly vhled do situace. Přestože jsem se velmi snažila, nemohla jsem v této chvíli „přeskočit“ do další etapy. Příliš jsem spěchala za abstraktním poznatkem.

• **zobecnění**

Fáze zobecnění může trvat jen velmi krátkou dobu. Izolované modely na sebe začnou vzájemně poukazovat, začnou se přeskupovat a organizovat. Tím se přechází od vhledu „povrchového“ do vhledu „pod povrchem“. Tato fáze někdy může splývat se vznikem další fáze, či proběhne, ale ani ji nemusíme postřehnout.

Tuto fázi, myslím, nelze dost dobře „z vnějšku“ pozorovat. Je to proces, který se odehrává uvnitř člověka, v jeho mysli, v jeho logice přemýšlení. Sama jako řešitel ale musím říci, že tato fáze ve mně nastala. Najednou jsem začala vidět souvislosti, sice ne úplně, ale že něco je zde podobného, že se mi něco „jeví před očima“, ale zatím tomu úplně nerozumím, co to je. Potom mi „to došlo“ ... a to mě vyneslo do vyšší hladiny ...

• **hladina prvních generických modelů**

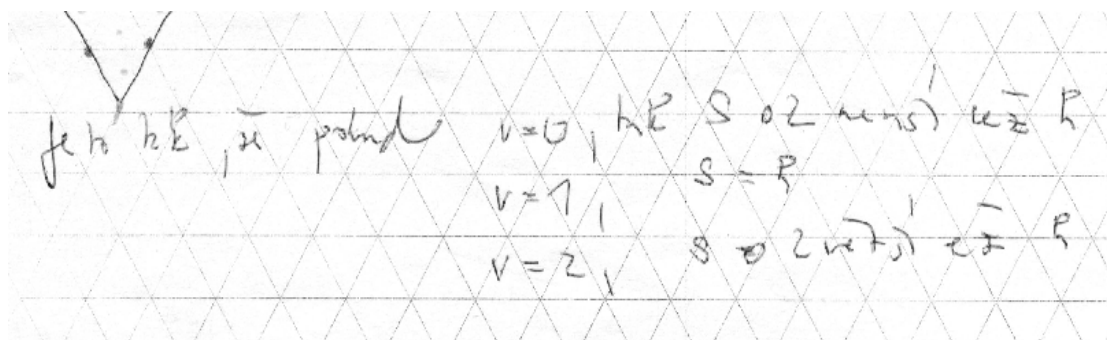
Generický model můžeme dosadit za jakýkoli izolovaný model, nebo nám nějak organizuje izolované modely. Může být prototypem všech izolovaných modelů.

Začala jsem vidět první vzájemné vazby mezi veličinami. Vyjádřila jsem je slovně (obr. 1.14). Tím byla formulována druhá hypotéza:

Pokud je počet vnitřních bodů roven nule, tak obsah je o dvě menší než počet hraničních bodů. A pokud je počet vnitřních bodů roven jedné, tak obsah je shodný s počtem hraničních bodů.

Poté jsem z dat a slov, která jsem získala, začala tvořit vzorce pro jednotlivé hodnoty. Začínala jsem hodnotou $v = 0$. Asi proto, že tento stupeň byl nejlehčí. Jedna veličina ze tří byla nulová. Tvořila jsem více vzorců, ke každému vzorci jsem si napsala podmínku. Docházelo zde

k posunu v mém myšlení. Ze separovaných modelů se stalo více generických, protože jsem byla schopná vytvořit zápis a to nejen slovní, ale dát ho do vzorců. Začala jsem si uvědomovat, že zde vazba je, ale zatím jsem nebyla schopná vytvořit jeden univerzální generický model, jedno jediné zobecnění. Toto byl takový mezistupeň k obecnému vzorci, který můžeme aplikovat na všechny obrazce. Vzorce zde fungují jako prototyp části izolovaných modelů. Hypotéza byla potvrzena jako správná.



Obr. 1.14

• druhá hladina izolovaných modelů

Může se stát, že při poznávacím procesu dojde dítě k několika generickým modelům a není schopné je přetvořit v jeden generický model. Zde nastává fáze, kdy se tyto generické modely přemění na izolované modely. Dítě s nimi pracuje na úrovni izolovaných modelů, ale na vyšší úrovni.

V této chvíli se mi tyto vzorce přeměnily na izolované modely, potřebovala jsem jich vytvořit více a získat do nich vhléd, abych mohla najít jeden vzorec bez podmínek. Proto jsem jich tvořila více a malovala jsem u toho příslušné obrazce, které náležely k jednotlivým vzorcům.

• druhá hladina generického model + abstrakční zdvih

V této chvíli se jedinec dostává k zrodu abstraktního poznání. Již má hlubší vhléd do této problematiky. Stávající databáze separovaných modelů a generických

modelů je narušena a dochází k její restrukturalizaci. Někdy k abstrakčnímu zdvihu dochází už při objevu generického modelu, někdy až při objevu abstraktního poznání, někdy v obou případech.

Zjištěné hodnoty \underline{v} , \underline{h} , S jsem evidovala tabulkou a v ní jsem je zorganizovala podle rostoucího obsahu (tab. 1.11). Vytvářela jsem si databázi. Uvědomovala jsem si souvislosti, začínala jsem se lépe orientovat v databázi. Získávala jsem hlubší pohled do situace. Tím, že jsem si uspořádala data a dostala jsem hlubší vhled, tím jsem došla k abstraktnímu poznání. Objevila jsem konečný vzorec.

Uvědomuji si, že jsem objevila vzorec pouze na úrovni hypotézy. Není ověřen na všechny obrazce v tomto prostředí, pouze na mnou odzkoušené. Na ty, které jsem to zkoušela, vzorec „fungoval“. Může ale být nějaký obrazec, který jsem nezkoušela a na nějž vzorec fungovat nebude. Ještě jednou tedy připomínám, že jsem si vědoma, že se jedná pouze o mnohokrát ověřenou hypotézu.

• hladina krystalizace

Nově nabytý poznatek se propojuje s dosavadními vědomostmi. Proniká do jedince. Nejdříve na úrovni modelů, potom na úrovni abstraktního poznání. Jedná se o dlouhodobý proces, který trvá u každého jedince individuálně. Každý jedinec potřebuje různě dlouhý čas pro „krystalizaci v sobě“.

Upevňovala a propojovala jsem si vše s předchozími vědomostmi. Zkoušela jsem ověřovat spolehlivost na jednotlivých obrazech. Myslím, že bych v této fázi ještě potřebovala „zdomácnět“. Je to asi tím, že tato hladina je stále ve vývoji. Jedná se o dlouhodobý proces, který potřebuje čas.

- poslední fází je **automatizace**

Ta již sice nenáleží do poznávacího procesu, ale je také důležitá. Jedná se o nácvik poznání, právě o jakési zautomatizování, dovednost využívat poznatek bez dlouhého rozmýšlení.

(Hejný, 2004)

Proces automatizace probíhá při dalším řešení úloh.

Všechny tyto fáze jsou individuální a mohou trvat u každého jedince různou dobu. Také se může stát, že někteří jedinci dojdou k poznání dříve či některé s fází se překryjí.

1.1.14 Shrnutí poznávacího procesu do tabulky (tab. 1.14)

Pro přehlednost jsem celý můj řešitelský proces dala do tabulky, která jej strukturuje (tab. 1.14). Své objevování jsem porovnávala s objevováním Pickovy formule na čtverečkovaném papíře, které prováděly D. Jirotková a J. Kratochvílová na svých seminářích geometrie se studenty. Experiment byl prováděn ve dvou paralelních skupinách. Výsledky byly prezentovány na konferenci SEMT 05 (Jirotková, Kratochvílová 2005) a na ICPM'05 (Jirotková, Kratochvílová 2006).

Tab. 1.14

1. Volba kontextu	Definovaný – Návaznost na Pickovu formuli na čtverečkovaném papíře z kurzu Geometrie.						
2. Určení cíle	Explicitní Najdi Pickovu formuli pro trojúhelníkový papír. (Hledejte vztah h, v, S)						
3. Tvorba hypotéz	Na základě přetvoření vzorců z Pickovy formule pro čtverečkovaný papír. (viz Evidence pokusných vzorců)						
4. Ověření hypotézy	Chybná hypotéza						
5. Experimentování	Vytváření izolovaných modelů						
6. Volba metod	Fixování S						
7. Záznam (evidence) dat	Důraz na přenos dat ze světa geometrie do světa aritmetiky						
8. Tvorba hypotézy	Ze zaznamenaných dat v evidenci						
9. Ověření hypotézy	Krach hypotézy						
10. Organizace dat	Tabulka						
11. Tvorba hypotéz a argumentace	Vytváření hypotéz 1) vytváření obrazce, vzoru 2) skloubení						
	Špatné hypotézy						
12. Reorganizace dat	Zvětšování datového souboru v tabulce						
13. První abstrakční posun	První generický model						
	<table border="1"> <tr> <td>$v = 0$ $S = h - 2$</td> <td>$v = 1$ $S = h$</td> <td>$v = 0$ $S = h - 2$</td> <td>$v = 3$ $S = h + 4$</td> <td>$v = 0$ $S = h - 2$</td> <td>$v = 5$ $S = h + 8$</td> </tr> </table>	$v = 0$ $S = h - 2$	$v = 1$ $S = h$	$v = 0$ $S = h - 2$	$v = 3$ $S = h + 4$	$v = 0$ $S = h - 2$	$v = 5$ $S = h + 8$
	$v = 0$ $S = h - 2$	$v = 1$ $S = h$	$v = 0$ $S = h - 2$	$v = 3$ $S = h + 4$	$v = 0$ $S = h - 2$	$v = 5$ $S = h + 8$	
Ostatní generické modely (podobné), vytváření pomocí přizpůsobování prvnímu generickému modelu							
14. Organizace dat	Organizace souboru generických dílčích modelů						

15. Experimentování	Práce s těmito vzorci na úrovni izolovaných modelů
16. Tvorba hypotézy	Z posledního vytvořeného datového souboru
17. Ověření hypotézy	Správnost hypotézy se potvrdila
17. Generalizace	<p>Objevení Pickovy formule pro trojúhelníkový papír na úrovni hypotézy</p> $S = h + (2 \cdot v) - 2$ <p>generalizace u všech údajů – abstraktní znalost</p>

1.1.15 Porovnání mého řešitelského procesu a řešitelského procesu studentů

U studentů byl v jedné skupině kontext definován, v druhé ne. U mě byla návaznost právě na Pickovu formuli na čtverečkováném papíře.

Určení cíle: U jedné skupiny byl určen implicitně, u druhé explicitně. Mně byl zadán úkol explicitně, najdi Pickovu formuli pro trojúhelníkový papír.

Následně u mě proběhla tvorba hypotéz. Ani v jedné ze zkoumaných skupin hned ze začátku tvorba hypotéz neproběhla. Zde to bylo dáno tím, že jsem měla již předchozí zkušenosti s objevováním právě na trojúhelníkovém papíře, proto zde byla snaha o pozměnění vzorce z jiného prostředí. Hypotézy se ukázaly jako chybné.

Experimentování: v obou zkoumaných skupinách proběhlo experimentování a vytváření izolovaných modelů. Touto fází jsem prošla i já, byla stejná. Vytváření izolovaných modelů a seznamování se s prostředím.

Fixování obsahu. Tento krok u mě proběhl, neboť jsem měla předchozí zkušenost. Ani u jedné skupiny k záměrnému fixování některé veličiny nedošlo.

Evidence dat. Ve všech skupinách došlo k evidenci dat, i u mě.

Tvorba hypotézy. V mém procesu opět došlo k formulování hypotézy, která se ukázala jako nesprávná. U obou skupin stále k formulování hypotézy nedošlo.

Organizace dat. V jedné skupině je instrukce o sestrování tabulky, v druhé ne. Z předchozích zkušeností jsem věděla o možnosti vše zaznamenat do tabulky, a protože využít tabulky bylo přehlednější, tak jsem ji sestrojila.

Ve všech skupinách došlo k formulování hypotézy. V mém případě došlo k formulování další hypotézy. Ve všech případech se hypotézy ukázaly jako nesprávné.

Došlo k reorganizaci dat, a to u všech zkoumaných subjektů. Příkládám to tomu, že se hypotézy ukázaly jako nesprávné, proto byla snaha restrukturalizovat data.

Ve studentských skupinách došlo k fixování parametru. Toto fixování jsem udělala v některém z předešlých kroků. Opět to přisuzuji mé předchozí znalosti.

Objevení prvního generického modelu. Ve všech skupinách došlo k objevení prvního generického modelu.

V jedné ze zkoumaných skupin došlo k zvětšování souboru izolovaných modelů. V mém případě došlo k organizaci dílčích generických modelů, se kterými pracuji na úrovni izolovaných modelů.

V obou studentských skupinách došlo k prvnímu abstraktnímu posunu, objevení generického modelu. Já jsem formulovala novou hypotézu a následně jsem ji ověřovala. Hypotéza se ukázala jako správná. U všech skupin i u mě došlo k objevení Pickovy formule na úrovni hypotézy.

1.1.16 Uvědomění

Fáze mého objevitelského procesu proběhly velmi podobně jako u sledovaných skupin. V mém případě bylo více hypotéz a ověřování těchto hypotéz. U ostatních skupin tento postup nebyl. Myslím, že to bylo dáno tím, že jsem jedním podobným řešitelským procesem již prošla, a proto jsem si stále myslela, že již jsem u cíle, že tyto poznatky mi stačí. Myslela jsem si, že mi stačí znát část objevování a již budu u cíle. Nebylo tomu tak, musela jsem si projít celým procesem objevování, stejně jako studenti, kteří objevovali Pickovu formuli pro čtverečkovaný papír.

1.1.17 Závěrem k Pickově formuli

Je mi líto, že jsem s objevováním na konci, že jsem našla vzorec, který jsem hledala. Bylo to moje milé trávení večerů. Práce mně těšila a uspokojovala. Mám ráda takovéto řešitelské i samořešitelské bádání a objevování.

Při objevování jsem přišla na mnoho věcí, které bych možná v hloubi duše věděla, ale nenechala bych je vyplout na povrch. Proto jsem je musela napsat i do své práce, neboť pro mě představují něco, co se ve mně odehrálo a co si budu pamatovat. Byla to změna a posun v mém myšlení. Myslím, že kdyby mi vzorec někdo řekl, tak bych si ho osvojila pouze formálně¹⁰. Neprošla bych si poznávacím procesem a „neprožila,, bych si jednotlivé fáze. Zde to vyplynulo samostatně z mé práce a z mých zkušeností.

Při svém objevování jsem si uvědomila, že každý člověk je jiný. Každý potřebuje různě dlouhý čas, aby zvládl svoji práci, aby zvládl daný úkol. Toto je ponaučení i do mé praxe. Ke každému dítěti je třeba přistupovat individuálně, dávat mu čas na „své“ poznání daného úkolu. Je třeba, aby dítě prošlo celou cestou poznávacího procesu.

Po zhodnocení musím uznat, že v trojúhelníkovém prostředí je těžší pracovat než v čtvercové. Je to asi také dáno tím, že s trojúhelníkovým prostředím se tak často neseťkáváme. Už od počátku svého života se v nějaké podobě setkáváme se čtvercovým prostředím (např. dlaždičky v koupelně, dlažební kostky, hra „lodě“ ...), s trojúhelníkovým prostředím nikoliv. Proto jsem si i toto prostředí osvojovala déle a vyskytlo se mnoho otázek a nejasností, které jsem si potřebovala během mé práce ujasnit.

Stále si ale myslím, že se v tomto prostředí mám čemu učit. Seznamovat se s nějakým prostředím chce opravdu intenzivně ho prozkoumat ze všech „stran“. Třeba

¹⁰ „ **formální vzdělávání** – 1 Dříve vzdělávání a vyučování orientované na osvojování formy a rozvíjení představ bez dostatečného zřetele k obsahu jako materiálního základu vzdělání. Bylo založeno na idejích F. J. Herbarta. 2 Dnes vzdělávání, které se realizuje ve vzdělávacích institucích (školách), jejichž funkce, cíle, obsah, prostředky a způsob hodnocení jsou definovány a legislativně vymezeny. Reflektuje politické, ekonomické, sociální a kulturní potřeby společnosti a vzdělávací tradice. Probíhá ve stanoveném čase a formách. Zahrnuje navazující vzdělávací stupně a typy, které jsou určeny celé populaci nebo určitým skupinám populace.“ [Průcha, 2008, str. 65]

takový zápis útvaru v tomto prostředí či počítání obsahu, to by bylo jistě ještě přínosné zjistit, aby se nám rozšířil prostor náhledu na toto prostředí.

Jsem ráda, že jsem pracovala s tímto prostředím, rozšířila jsem si poznatky.

1.2 Geometrie v kontextu RVP

Učitel a žák jsou ve vzájemném vztahu; při vyučování nemůže chybět ani jeden, ani druhý.

J. A. Komenský

Geometrie¹¹ je jeden z tematických okruhů oblasti Matematika a její aplikace v RVP¹². RVP určuje závazné rámce vzdělávání pro jednotlivé etapy. Tyto etapy se dělí na předškolní, základní a střední vzdělávání. (RVP, 2005) Do základního vzdělávání patří první stupeň ZŠ. První stupeň ZŠ je rozdělen na dvě období. V každém období jsou takzvané očekávané výstupy. Zde jsou výstupy z geometrie ve dvou daných obdobích:

1. období

„Žák

- ▶ rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci
- ▶ porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky
- ▶ rozeznává a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině

2. období

- ▶ narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce
- ▶ sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délky jeho stran
- ▶ sestrojí rovnoběžky a kolmice
- ▶ určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

¹¹ „**geometrie** – původní věda o vlastnostech a vzájemných vztazích prostorových útvarů vzniklých abstrakcí z hmotných těles; základy geometrické útvary jsou např. bod, přímka, rovina. Začátek geom. lze nalézt už ve starověku, např. měření pozemků. Rozkvět geom. (tzv. euklidovské) nastal v Řecku (Thales, Pythagoras, Euklides) ...“ [Všeobecná encyklopedie g/l, 1996, str. 38]

¹² **RVP** – Rámcový vzdělávací program.

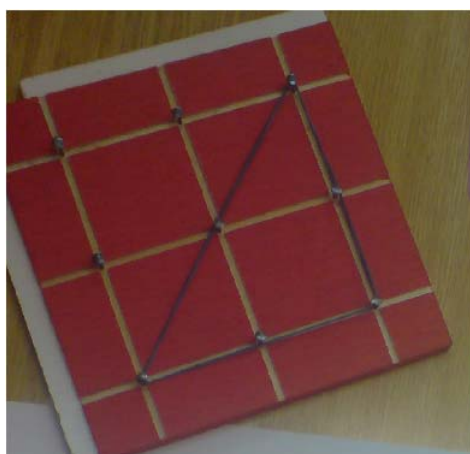
- rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru“

(RVP, 2005, str. 31)

Jednotlivá období jsou charakterizována tím, co by měl žák umět, s jakými dovednostmi a znalostmi by měl postoupit do dalšího období. Každý učitel si rozvrhuje sám, jakým způsobem a jakou formou žáka k těmto poznatkům dovede. Tím je dán důraz na individuální tvořivost každého učitele a možnost pracovat podle svého.

1.2.1 Co to je geoboard

Geoboard je jedna z matematických pomůcek, která může usnadňovat dětem vstup do světa geometrie. Jedná se o malou čtvercovou destičku, na které je devět hřebíků pravidelně rozmístěných do tvaru 3×3 (taktéž tvar čtverce). Destička může být dřevěná či plastová (obr. 1.15). Součástí geoboardu je gumička, díky níž můžeme modelovat obrazce. V poslední době se objevily i geoboardy, které se mohou do sebe „zapojovat“ (spojovat). Tím nám může vzniknout velká plocha o čtvercové síti. Práci v této čtvercové síti se dítě rychleji propojí návaznost s čtverečkovaným papírem.



Obr. 1.15

1.2.2 Geoboard a geometrie

Zařazením geoboardu do výuky můžeme dítě „vtáhnout“ do práce, neboť geoboard připomíná spíše nějakou hru, při které se „nemusí učit“. Tím dítě necítí tlak na „to, že se musí učit“, ale spíše se uvolní a pracuje se zájmem. Prostřednictvím geoboardu je možné seznamovat se s geometrickými tvary. Přímou manipulací a prací s geoboardem, kdy je zapojeno více smyslů (především zrak a hmat), si dítě může lépe uvědomit možnost tvárnosti a modelování v tomto prostředí. Díky manipulaci s předmětem samotným má možnost se sebevyjádření, tím se také pro něj poznatek stává hlubší a trvalejší.

Geoboard se přímo nabízí jako jeden z předstupňů práce na čtverečkovaném papíru, kde již dítě nemodeluje, ale maluje. Jedná se tedy o propedeutiku čtverečkovaného papíru.

Systém kroků, kterými učitel může dojít k práci na čtverečkovaném papíru:

Volná hra s geoboardem → manipulace a úkoly na geoboardu → práce na tečkovaném papíru → práce na čtverečkovaném papíru

Geoboard má hřebíky, na které si dítě může sáhnout. Může za ně „upevňovat“ gumičku a tvořit tvary. Obrazec může kdykoli změnit tím, že gumičku uvolní a vytvoří obrazec nový. Tím se ve své práci stává velmi flexibilní a má možnost tvořit tvary svým osobním tempem. Na geoboardu si dítě může začít tvořit modely prvních geometrických pojmů jako je čtverec, obdélník, trojúhelník. Také můžeme otevřít žákovi problematiku různosti trojúhelníků. Postupným kladením otázek dítě dovedeme k poznání, že ne každý trojúhelník je stejný. Dítě můžeme například přivést k poznatku, že existuje rovnoramenný či pravoúhlý trojúhelník. A to takovým způsobem, že si na dvou geoboardech vymodeluje tyto dva typy trojúhelníků a popisuje odlišné vlastnosti, kterých si všímá. Pomoci mu také mohou počty hřebíků, za které upevňuje gumičku při modelování trojúhelníku.

1.2.3 Klady a zápory geoboardu

Geoboard chápu jako užitečnou pomůcku v hodinách matematiky na prvním stupni, a proto jsem se snažila nalézt klady, kterými bych případně svůj názor obhájila. Poté jsem se snažila nalézt i zápory.

- Výhody geoboardu:

snadná manipulace, skladnost, multifunkčnost (může sloužit jako hra „za odměnu“ po splnění úkolu, stejně tak jako pomůcka k splnění matematického úkolu), šetření životního prostředí (neplýtvá se papírem), využití smyslů - především hmat a zrak, aktuálnost (můžu modelovat to, co mi právě běží hlavou), neotřelý vzhled, možnost vymezit na geoboardu mnoho rozdílných pojmů, např. konvexní a nekonvexní

- Nevýhody geoboardu:

není možnost podívat se na vytvořené tvary zpětně

Tuto nevýhodu jsem ze začátku viděla, jako „jasnou“ nevýhodu. Později jsem se opět zamýšlela, zda to je skutečně nevýhoda. Uvědomila jsem si, že to je svým způsobem i výhoda.

- výhoda této nevýhody:

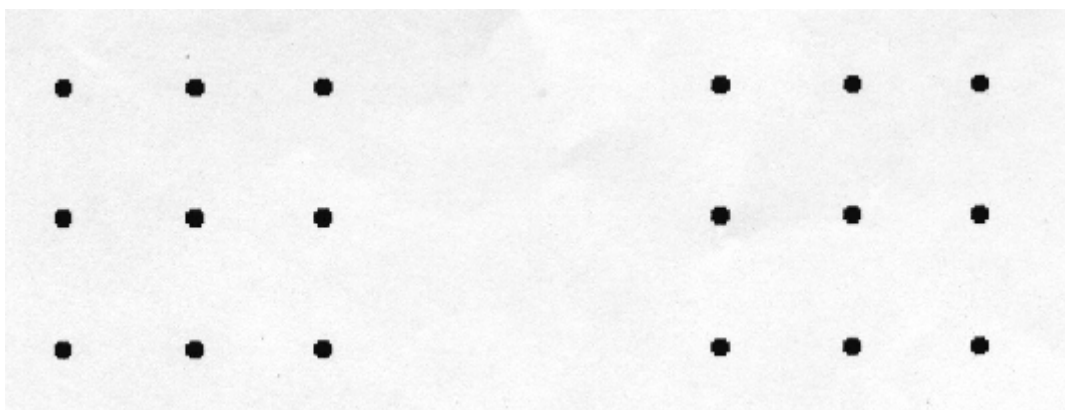
Je zde pomíjivost tvarů, dítě si většinou nepamatuje, jaké tvary udělal před tím. Pokud vzpomíná, tak tím si ale procvičuje krátkodobou paměť pro tvary. Což je pro žáka výhodou. Pokud po žákovi budeme důsledně vyžadovat, aby si „vzpomněl“ na předchozí modely, tím nejspíše dojde sám k závěru nutnosti nějaké evidence. Bude nucen si tvary zaznamenávat.

modelace úsečky

Úsečku na geoboardu vytvoříme tak, že zahákneme gumičku za dva hřebíčky. Tím se nám ale gumička „zdvojí“. Místo jedné úsečky zde budou „dvě úsečky“. To chápu jako nevýhodu.

1.2.4 Přechod na tečkovaný papír

Když mají děti dostatek zkušeností s geoboardy, může se začít pracovat s tečkovaným papírem (obr. 1.16). Hřebíky z geoboardu se změny na tečky, jsou i ve stejném rozložení. Zde již dítě tvary kreslí pastelkou či tužkou, může je tedy zpětně reflektovat. Co jednou namaluje, to již na papíře zůstane. Žák je v prostředí teček ochuzen o hmatový vjem, který by mu mohl pomoci, ale obohacen tím, že trénuje rýsování a črtání.



Obr. 1.16

Dalším gradačním stupněm je práce na čtverečkovaném papíru. Na prvním stupni je vhodnější využívat čtverce o velikosti 1 x 1 cm. Na druhém stupni se mohou použít i čtverce menší. V tomto prostředí se tečky změny na mřížové body ve čtvercové síti. Dítě zde nemá již žádné opěrné body. Musí si uvědomit, že mřížové body nahrazují hřebíky z geoboardu a tečky z tečkovaného papíru. Má zde dokonce síť, ve které se musí vyznat, nejsou zde již jen jednotlivé body. Tím je práce pro dítě těžší a náročnější. Vyžaduje více soustředění a pozornosti. Dítě musí být při práci více koncentrované.

Těmito způsoby dítě plynule a nenásilně přechází od jednoho prostředí k druhému a posouvá se ve svých vývojových etapách

1.2.5 Geoboard, tečkovaný papír, čtverečkovaný papír v kontextu RVP

Jak již vyplynulo, využití geoboardu ve vyučovacích hodinách je velmi přínosné. Je ale zřejmé, že ne samotný geoboard nás dovede k cíli. Pokud se s ním někteří učitelé setkávají poprvé, nemusí ani vědět, co by s ním mohli dělat. Je tedy třeba vědět, jak s ním pracovat a znát jeho možnosti.

Pokud učitel zařadí systematickou práci s geoboardem, může postupně přispět k rozvíjení hned několika cílů z RVP z prvního období: „Žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary ...“ (RVP, 2005). Při práci s geoboardem žák naplňuje všechny tyto kompetence. Učitel může volit takové úlohy, že žák „porovná velikost útvarů“ (RVP, 2005), což je jeden z očekávaných výstupů.

Příklady matematických úloh:

- Zkus na geoboardu vymodelovat čtverec.
- Myslíš, že jde vymodelovat ještě nějaký jiný než ten, který jsi udělal? Pokud ano, bude větší či menší?
- Zkus najít všechny různé čtverce, které jdou na geoboardu vytvořit. Seřad' je podle velikosti.

- Zkus na geoboardu vymodelovat největší trojúhelník.
- Našel kamarád stejný? Pokud ano, zkus najít nyní nejmenší trojúhelník, který lze vytvořit. Našel kamarád stejný?
- Zkus najít všechny různé trojúhelníky, které jdou na geoboardu vymodelovat.

Pokud pracujeme na tečkovaném papíru, zbývá pak už jen krůček k tomu, abychom začali pracovat na čtverečkovaném papíru. Zde můžeme rozvíjet další dovednost: „Žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě ...“, „rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary ...“ (RVP, 2005) Tím bych geoboard a čtverečkovaný papír stavěla na jedno z čelních míst užitečných pomůcek pro výuku geometrie na prvním stupni základní školy.

1.3 Učebnice pro 1. stupeň ZŠ

V dnešní době je možnost vybrat si z široké nabídky učebnic matematiky. Jsou zpracované řady od první do páté třídy, jsou i řady zatím nedokončené, či jsou učebnice samostatné jen pro určitý ročník a nemají návaznost. Stejně jako široká nabídka učebnic je i velký výběr nakladatelů. Učebnice je možno najít ve starších či novějších verzích, které jsou přepracované či doplněné

Prostudovala jsem některé učebnice pro první stupeň. Chtěla jsem zjistit, zda je v nich pracováno s geoboardem a pokud ano, tak jakým způsobem. Dále jsem se zaměřovala na práci s tečkovaným papírem, čtverečkovaným papírem a následně mě zajímalo, zda se někde objeví práce s trojúhelníkovým papírem.

1.3.1 Geometrická prostředí v učebnicích matematiky

Prostředí geoboardu – toto prostředí je systematicky zpracováno pouze v řadě nakladatelství FRAUS z roku 2007 - 2008 autorů M. Hejného, D. Jirotkové a J. Slezákové -Kratochvílové. Prostředí geoboardu chápu ne jako tečkovaný papír, který se vyskytuje i v jiných učebnicích, ale jako opravdovou práci s geoboardem. Musí zde být konkrétní činnosti s geoboardem. První zmínka o geoboardu je ve druhé třídě v třetím díle. (Druhá třída má tři díly.)

Prostředí tečkovaného papíru – prostředí teček se vyskytuje jen zřídka. V učebnici 4. ročníku řady Prometheus jsem našla úlohy na tečkovaném papíru. Děti zde měly pojmenovávat obrazce, které byly zobrazeny právě na tečkovaném papíru. Další typ úlohy, kterou jsem zde objevila, zněla: Urči, které strany mnohoúhelníku jsou k sobě kolmé a které ne. Vrcholy mnohoúhelníků byly vždy tečky. Dále bylo zaznamenání obrazců do tečkovaného papíru.

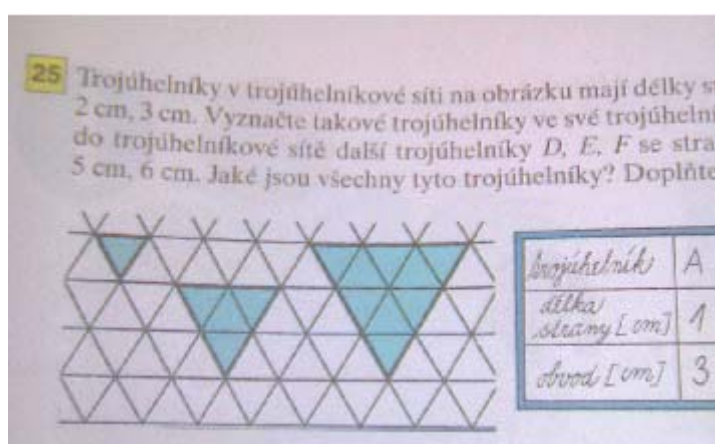
Prostředí čtverečkovaného papíru – toto prostředí je často využíváno k různým účelům. Buď jako „prostředí, ve kterém žáci pracují,“ či jako „podložka“ (Michnová, 2003, str. 28). Pokud se jedná o prostředí, tak jsou zde úkoly na dokreslování obrázku (souměrnost), kreslení samostatného obrázku do čtverečkované sítě. Měření délky úseček, počítání obvodu a obsahu obrazce.

Čtverečkovaný papír jako podložka je využíván opravdu často. Již od první třídy se díky němu učí děti pravo-levou orientaci, zaznamenávají výsledky úkolů sčítání a odčítání, učí se do čtverečků psát znak pro $<$, $>$, $=$. Velmi oblíbené je vyjadřování desítek a jednotek v tomto prostředí a vyjadřování zlomků.

V některých učebnicích jsem našla i šipkový zápis. Není to obvyklé, ale v některých učebnicích řady SPN či PRODOS jsem ho opravdu našla. Zápis není sladěný. Některé učebnice uvádějí čtyři typy šipek (\leftarrow , \downarrow , \uparrow , \rightarrow), některé dokonce i šipky šikmé (SPN, 2. ročník, str. 44). Zápisy byly někdy uváděny i v zkráceném tvaru např. \leftarrow^4 . Při prohlížení učebnic mi přišlo, že ne vždy je systematicky pracováno s poznáním čtverečkovaného papíru. Byly zde jednotlivé oddělené aktivity, které ale na sebe v celku nenavazovaly, popřípadě byly daleko od sebe v ročnících. Takový šipkový zápis se zde objevil, ale nebyla k němu ani v jedné řadě nějaká větší příprava. Učitel by tedy asi sám měl s dětmi pracovat v tomto prostředí, aby jim rozvíjel dovednosti s tímto typem práce. Jednotlivé a „vytržené“ vstupy se mi jeví méně efektivní.

Přijde mi zajímavé, že není zaveden jednotný zápis pro všechny. Každý si tedy může zapisovat obrazec, jak sám chce a pokud si zřejmě vymyslí ještě nějaké jiné značení, bude mu to dovoleno.

Prostředí trojúhelníkového papíru – toto prostředí jsem našla pouze v jedné učebnici. Jednalo se o nakladatelství FORTUNA ve 4. ročníku. Trojúhelníkového prostředí zde bylo využito pro počítání obsahu (obr. 1.17)



Obr. 1.17
(Coufalová, 1994, str. 10)

Chtěla bych se ještě zmínit o učebnicové řadě FRAUS z roku 2007 - 2008. Tato zatím neukončená řada se mi jeví z pohledu geometrických prostředí jako nejpropracovanější. Jsou zde jednotlivé návaznosti od geoboardu přes práci na tečkovaném papíru, až k čtverečkovanému papíru. Na čtverečkovaném papíru je systematicky koncipován šipkový zápis a tvořivá práce s ním. Trojúhelníkové prostředí zde zatím není zavedeno, ale věřím, že v následujících dílech bude jistě zavedeno. Tato řada se mi z mého pohledu geometrické systematičnosti líbila asi nejvíce.

Kapitola 2 - Experimenty

„Matematika není jen soubor poznatků, axiomů, vět, důkazů a vzorců. Matematiku lze chápat jako činnost, a to činnost žáků.“

(Stehlíková, 2007, str. 25)

V této kapitole objasním, co je to Homogenní varianta z matematiky, uvedu přehled experimentů, které jsem udělala, a vybrané z experimentů podrobněji popíši.

2.1 Homogenní varianta

Většinu svých experimentů jsem realizovala v rámci volitelných předmětů Homogenní varianty. Měli jsme na výběr z několika možných variant. Předmět měl trvat šest vyučovacích hodin týdně. Proto jsme musela přemýšlet, zda strávit někde šest hodin a vědět, že mě daná problematika nezajímá, nebo si předmět vybrat podle toho, co se mi nejlépe hodí do rozvrhu, to jsem nechtěla. Chtěla jsem si prohlubovat a rozvíjet znalosti v matematice. Proto pro mě byla jednoznačná volba. Vybrala jsme si homogenní variantu z matematiky, a to trojici předmětů: Cesty poznávání v matematice, Dítě a matematiky a Učíme společně matematiku.

Ze začátku jsme nevěděla, co od tohoto předmětu mám očekávat. Scházeli jsme se jeden den v týdnu odpoledne a realizovali jsme matematický kroužek na jedné ze základních škol v Praze. Byla to inspirativní a velmi podnětná odpoledne. Každý týden kroužek vedla jedna dvojice či jedinec sám. Zpracoval si přípravu na kroužek, seznámil ostatní kolegy s tématem, a pak probíhala diskuse nad tím, jak kroužek připravil, co se nám zdá jako zajímavý nápad, co si myslíme, že by se mohlo udělat jinak, jaká bude organizace s dětmi. Jak si myslíme, že děti budou reagovat na tu či onu matematickou úlohu, prostředí. Co od nás ostatních vedoucích kroužku bude požadovat, jak se máme chovat, kdo se bude starat o jaké dítě, popřípadě, kdo bude pracovat s jakým jedincem a jak. Daný vedoucí kroužku tedy organizoval do poslední maličkosti celý kroužek. Bylo to úžasné zkusit si být „učitelem“ se vším všudy a ještě mít okolo sebe spoustu hlav, které vám poradí, popřípadě vnesou podněty a nápady do vaší přípravy. Bylo to něco, co jsem za celé období naší výuky na vysoké škole postrádala.

Jsme přece na pedagogické fakultě, a proto by mělo být naším hlavním zájmem to, jak naučit vést dobře a efektivně hodiny. Vyzkoušet si učit děti různými metodami, vyzkoušet si různé způsoby práce. Naučit se vést hodinu na různá témata. To bylo to, co jsem chtěla a zde se mi to splnilo.

Při vedení hodiny byla možnost toho, že pokud se práce nedařila, či vedoucí kroužku se upnul k jedné věci či k jednomu žákovi, či něco nebylo v pořádku, mohl kdokoli z pozorujících přijít a nenápadně tuto drobnost říci vedoucímu kroužku. Často se totiž stávalo, že vedoucí se upnul k nějaké věci a nevnímal, co se děje kolem něj, aniž si to uvědomoval. Myslím, že se to stalo každé z nás, která zde učila. Bylo to zajímavé pozorovat. Když jsme vtáhnuti do nějakého problému, do nějakého úkolu, přestáváme občas vnímat věci kolem sebe. A to si myslím, že by se učiteli nemělo moc často stávat, neboť pracuje s třídou, kde je většinou okolo 25 dětí, které všechny vyžadují pozornost. Chce to tedy, aby učitel dovedl rozložit svoji pozornost mezi více podnětů a byl schopen reagovat na celou třídu. Toto jsem si ovšem před tím zřetelně neuvědomovala. Myslela jsem, že je to automatické, ale není. I v této dovednosti je třeba se cvičit a hlídat si ji.

Další poměrně zásadní zkušeností z tohoto kroužku pro mě byly následné rozborů po odučené hodině. Kolik nás zde sedělo, tak většinou každý dovedl vnést nový poznatek a nový náhled na věc. Zaujalo mě, čeho všeho je možné si všimnout, co je možné analyzovat, na co se kdo zaměřuje. Každý si všiml něčeho. Pro každého bylo důležité něco jiného. Je samozřejmé, že pokud v hodině byl nějaký zásadní nedostatek či naopak něco opravdu výjimečného, shodli jsme se na tomto poznatku všichni. To by se nám v normální školní hodině nestalo. Pokud bychom už samostatně učili na nějaké škole, tak by maximálně přišla kontrola a ta by nám ohodnotila „naš výkon“. Zde v běžných hodinách na takovýto důkladný a pečlivý rozbor není čas. To mi je trochu líto, neboť mnoho studentů tento způsob práce nezažije.

Ještě jednu intenzivní zkušenost si z této homogenní varianty odnáším. Naučila jsem se zde, že jeden neúspěch nemusí být celkovým selháním „napořád“. Když někdo učí pouze jednou a jeho výstup se mu nepovede, může být přesvědčen, že není dobrý učitel či dokonce, že se k tomuto povolání nehodí. Myslím, že toto je velmi důležitý moment, kterým by si měl každý budoucí pedagog uvědomit. Není tomu tak. Já jsem si to díky homogenní variantě uvědomila a jsem za to ráda.

Dále ve své práci budu homogenní variantu z matematiky označovat jen jako kroužek.

2.2 Úvahy před experimentem

Přemýšlela jsem, jak koncipovat řadu experimentů¹³, které budu s dětmi dělat. Začala jsem uvažovat nad tím, co s nimi vlastně chci dělat za experimenty a čeho tím chci dosáhnout. Uvědomila jsem si, že pro děti, které nepracují s netradičními prostředími, to bude něco úplně nového a neznámého. Proto jsem se rozhodla, že s dětmi začnu od začátku. Měla jsem k dispozici děti z kroužku a ty jsem se rozhodla seznámit s geoboardy. Poté s nimi navázat na tečkovaný papír a následně přejít na tečkovaný papír. Uvidím, co s dětmi stihnu a jakou část s nimi udělám, kam až je dovedu.

Myslím, že to bylo správné rozhodnutí využít děti z tohoto kroužku. Mohla jsem s nimi pracovat systematicky a nebyl to „náhlý vpád do výuky a potom nic“. Ale i takový „náhlý vpád“ jsem si zkusila. Zařadila jsem ho hned jako první experiment. Děti na mě koukaly, neznaly mě, nevěděly, co to chci a proč. Myslím, že dětem z kroužku jsem předala něco víc, k něčemu se dostaly, něco v nich zůstalo. Děti ze „samostatného experimentu poznaly pouze geoboard, ale neuvědomovaly si asi, že práce s ním může být hlubší a „objevitelská“.

Po skončení kroužku jsem si uvědomila, že jsem s dětmi vůbec nedošla k čtverečkovanému papíru. Na konci poslední hodiny si sice na něj zaznamenávaly tvary zcela spontánně a bez problémů, ale k hlubší práci jsme se nedostali. „Zdržel“ nás geoboard! To jsem si uvědomila až zpětně. Děti vyžadovaly další a další aktivity

¹³ **Experiment – 1** Metoda systematického ověřování vědeckých hypotéz. V pedagogickém výzkumu jeden ze základních prostředků k zjišťování chování (v přirozených nebo laboratorních podmínkách) subjektů vzdělávacích procesů při zavedení nějaké řízené změny (např. v obsahu či organizaci výuky). Jako jiné metody empirického výzkumu i experiment vyžaduje přesné konstruování a vyhodnocení, zvl. Pokud jde o stanovení kauzální závislosti mezi jevy. 2 Ve škol. vyučování pokus, v němž žáci, zpravidla pod vedením učitele, provádějí pozorování určitého jevu, jeho průběh a výsledky zaznamenávají a hodnotí. V přírodovědných a technických předmětech jsou škol. Pokusům vyhrazeny laboratorní práce. [Průcha, 2008, str. 63]

na geoboardu a já jsem připravovala stále nové. Později jsem na sebe měla vztek, že jsem s aktivitami na geoboardu nepřestala a nezačala se věnovat čtverečkovanému papíru, který je přece mým hlavním cílem! Přemýšlela jsem nad tím. Ne. To by nebylo dobré pro děti. Uvědomila jsem si, že ne vždy splníme vše v časovém limitu, jak si to naplánujeme. Proč na děti tlačit? Proč je posunovat někam, když z předchozího prostředí nemají ještě dostatečné zkušenosti? Kdybych byla již učitel a učila svoji třídu, bylo by to jiné. S dětmi bych měla více času, měla bych každý den a mohla se věnovat prostředím delší čas, a poté plynule navázat na prostředí další. To se mi zde bohužel nepovedlo, nebylo zde tolik času.

Přestože jsme se s dětmi nedostali k čtverečkovanému papíru, přesto si myslím, že to chyba není. Myslím, že jsem dětem ukázala pěkný kus geometrie, snad jsem jim vštípila počáteční semínko zaujatosti k této matematické disciplíně. To si myslím, že je nemalá zásluha, neboť třeba by se jim tohoto nikdy nedostalo a pak by geometrii mohly brát jako něco, co je nebaví či je nudné, nebo že geometrie je jen rýsování a učení se definic. Není tomu tak a já doufám, že si to děti ponesou v sobě.

2.3 Přehled experimentů

Nyní jsem dala pro přehlednost do tabulky své experimenty, které jsem dělala. Experimenty jsou seřazeny podle data konání, dále navazuje místo, kde jsem experiment uskutečňovala, s kým jsem experiment dělala, věk zúčastněných. Dále v tabulce uvádím, co jsem chtěla experimentem ověřit či zjistit, následuje evidence a případná poznámka.

Přehled experimentů

	datum	škola	subjekt	věk	nástroje a cíle	evidence	poznámka
1.	12. 1. 2008	doma	bratr Jar	23	Popiš verbálně obrazec na geoboardu, který si vytvořil, „jako do telefonu“	foto	nepřiloženo
2.	13. 1. 2008	doma	bratr Jan	10	Popiš verbálně obrazec na geoboardu, který si vytvořil, „jako do telefonu“	video	DVD
3.	10. 4. 2008	ZŠ J. Hradec, kroužek	Žáci: Pe, VÍ, Ja, Zd, Ma, Al, Ka, Pa	7-8	Zjistit: 1. Tvoří děti více tvary konvexní či nekonvexní 2. Nejdříve útvar pojmenovávají, a pak modelují či naopak? 3. Pojmenovávají děti tvary podle asociací ze života? 4. Jsou schopny na geoboardu vymodelovat i „živou“ věc a pojmenovat ji tak?	magneto- fon	fragment v textu, str. 58
4.	2. 4. 2008	ZŠ Jindřišská, Praha, kroužek	dvě dívký: Ka Kr	7-8	Zjistit, jak dívky komunikují a reagují v prostředí geoboardů.	Písemný záznam	příloha č. 1
5.	2. 4. 2008	ZŠ Jindřišská, Praha, kroužek	Chlapec a dívka: Sa Sar	7-8	Zjištění schopnosti verbálně popsat spolužákovi obrazec na geoboardu, „jako do telefonu“	video	DVD Fragment protokolu str. 71, příloha č. 2
6.	2. 4. 2008	ZŠ Jindřišská, Praha, Kroužek	Žáci: Sa, Sar, Kr, Ho, Ja, Ni, Ka, Iv	7-8	Najít co nejvíce různých trojúhelníků na tečkovaném papíru. Zjišťování úrovně hladiny poznávacího procesu.	video	Fragment protokolu str. 67, DVD, Příloha č. 3
7.	23. 4. 2008	ZŠ Jindřišská, Praha, kroužek	Žáci: Sa, Ni, Pa, Da, Ho, Ka, Ka, Kar	7-8	Hra SOVA. Zjistit úroveň orientace v obrazcích na geoboardu, schopnost podle otázek vyhodnotit a nalézt příslušný obrazec.	video	DVD

2.4 Výběr experimentů

Do své diplomové práce jsem zařadila experimenty, které mě nějakým způsobem zaujaly, či jsem v nich vysledovala zajímavý jev. Jedná se o experiment číslo 3, 5 a 6. Experimenty budu uvádět v jiném pořadí než číselném.

▫ Experiment číslo 3 se vztahuje ke geoboardu.

Úloha 03: Modeluj tvary na geoboardu a pojmenovávej je.

Je to „samostatný“ experiment realizovaný mimo kroužek. Zde jsem děti chtěla seznámit s geoboardy a ověřit si, zda s nimi budou rády pracovat. Tento experiment jsme chápala spíše jako předexperiment, který mi měl dát první představy, co mohu očekávat.

▫ Experiment číslo 6 se vztahuje k tečkovanému papíru.

Úloha 05: Najdi co nejvíce neshodných trojúhelníků na geoboardu.

Děti měly namalovat co nejvíce různých trojúhelníků. Děti pracovaly samostatně, ale posléze probíhala diskuse, kdy děti měly diskutovat o svých trojúhelnících, popřípadě diskutovat o tom, zda jsou trojúhelníky shodné či různé.

▫ Experiment číslo 5 považuji za náročnější, vzhledem ke komunikaci a dorozumívání mezi dětmi.

Úloha 04: Vymodeluj na geoboardu libovolný útvar, poté ho ukaž ho kamarádovi, ať ho zkusí vymodelovat na své destičce. Následně vymodeluj jiný tvar a zkus ho popsat kamarádovi, aniž bys mu ho ukázal, ať ho také zkusí vymodelovat na své destičce.

Úloha byla založena na postupném gradování v tom, že dítě nejdříve obrazec vidí, a pak ho modeluje podle slov.

2.5. Experiment číslo 3 - Pojmenování tvarů na geoboardech

V tomto experimentu jsem si chtěla ověřit, jak děti reagují na práci s geoboardey. Jak s nimi pracují, jaké tvary vytvářejí, jak je pojmenovávají. Mé otázky byly výsledkem podnětů, které mě během studia zaujaly. Na přednáškách a seminářích z matematiky jsme se učili o tom, že děti nazývají geometrické obrazce podle toho, co jim připomínají či podle již známých geometrických obrazců např. „dřevý mnohoúhelník, vykousnutý trojúhelník“ (Hejný, 2007, str. 106 – 107) aj. Proto jsem si tuto činnost s dětmi chtěla vyzkoušet sama v praxi, neboť mě zaujala.

Cílem bylo odpovědět na následující otázky.

1. Tvoří děti více obrazce konvexní či nekonvexní?
2. Nejdříve děti obrazce pojmenovávají, a pak modelují či naopak?
3. Pojmenovávají děti obrazce podle asociací ze života, podle toho, co jim připomíná daný obrazec nebo vymýšlejí „fantastické“, vlastní názvy?
4. Jsou schopny na geoboardu vymodelovat i „živou“ věc a pojmenovat ji tak?

Scénář

Experiment bude konstruován tím způsobem, že postupně během jednoho dopoledne vyzvu vždy jedno dítě ze třídy. Následovat bude motivační rozhovor o tom, co rád dělá, co ho baví, zda do školy chodí rád, který předmět má nejraději atd. Následně mu ukáži geoboardy a zeptám se ho, co mu připomíná, jaké asociace v ně vyvolává. Poté si žák postupně bude modelovat různé tvary, které sám chce, a bude je pojmenovávat.

Evidence bude pomocí magnetofonu.

Z osmi experimentů, které jsem dělala na škole v J. Hradci, jsem na ukázkou vybrala fragment jednoho z nich. Byl to rozhovor s jednou z dívek. Tento experiment se od ostatních odlišoval. Experiment budu označovat jako 3A.

2.5.1 Protokol experimentu č. 3A

Škola: ZŠ J. Hradec

Datum: 10. 4. 2008

Počet žáků: 4 chlapci, 4 dívky

Třída: 2.

Čas: dopoledne

Poznámky: Jako experimentátor jsem si dala za úkol, vstupovat do modelování co nejméně, spíše nechávat dítě samo tvořit.

Fragment protokolu experimentu č.3A

• přítomen: dívka (D) a experimentátor (Ex)

Ex5: Tady pro tebe něco mám. (ukáže geoboard)

D6: Hm. A co to je?

Ex6: To bych právě chtěla slyšet od tebe. Nepřipomíná ti to něco?

D7: Joooo, vypadá to jako takovej záhon. My máme taky takovej záhon a tam máme fazole, to sme dělali s maminkou a já tam dávala ty klacíky.

Ex7: Hmm, to je zajímavý. Vidiš, to mě nenapadlo. A k čemu by to mohlo být?

D8: Hmm, možná jako na nějakou hru, nebo jako nějaký počítaadlo. To by mě zajímalo, hrozně ráda hraju hry, ale ne s bráchou, ten pořád vyhrává.

Ex8: Hmm, tak to je potom blbý. Ale tady to je opravdu taková hra. To je taková plocha a ty si na ní můžeš modelovat, co chceš, tady je k tomu gumička. Vymodeluješ mi něco?

D9: Hm, tak jooo.

Ex9: To by bylo super. Já bych vždycky chtěla, když něco uděláš, tak abys to pojmenovala. Abys mi řekla, jak se to podle tebe jmenuje, jo?

D10: Hmm. Tak já udělám ten náš záhon na fazole... (staví a modeluje z gumičky obdélník)

To je on a tady jsou ty klacíky, jak se tam dávají, abychom věděli, kam sme to dali.

Ex10: Teda, ty si to všechno pamatuješ, to je super.

D11: To jo, mě to moc bavilo. Teď postavím ten kolík, co sme tam taky dávali ...

Komentář k experimentu č.3A:

Zde bylo vidět, že dívka měla přesnou představu o tom, co jí geoboard připomíná. Z předchozí zkušenosti jí zaujala práce na zahradě. Nyní objekty ze života přenášela na geoboard. Její manipulace byla jasná a zřetelná. Bylo vidět, že má přesnou představu o tom, co zobrazuje a čím je momentálně zaujatá. Při přenášení svých zážitků na geoboard se v dívčině myslí odehrával proces, kdy jméno předcházelo modelu. Její představa z prostoru 3D se musí „vejít“ do prostoru 2D. S tímto problémem neměla, pokud něco nevypadalo „jako ve skutečnosti“, jasně mi popsala, co má co být a co je co.

Další zajímavostí na experimentu s touto dívkou bylo, že nejdříve věci pojmenovala, ale slovy z běžného života, až posléze je vymodelovala. To znamená, nejdříve byla představa, a pak její realizace. Přemýšlela jsem nad tím, zda to nebylo tím, jak bylo řečeno mé zadání. Ale později, když jsem si rozhovor znovu prošla, tak jsem si uvědomila, že to tím ovlivněno nebylo. Asi mi chtěla ukázat, co vše dělali na zahradě či v ní byly velmi silné vzpomínky, které potřebovala ventilovat.

Analýza experimentu č. 3:

Analýzu experimentu jsem prováděla vzhledem k otázkám formulovaným v cílech.

Kognitivní jev, který se zde poměrně zřetelně vyskytoval, byla silná asociace se životní zkušeností, tedy propojení na realitu.

Sociální jev: dívka byla velmi upovídaná. Nevím, zda byla její povídavost „standardní“ či jsem zrovna narazila na téma, které potřebovala někomu sdělit.

V tomto případě nedošlo k propojení s geometrií. U dívky není geometrický svět oddělen od reálného světa.

Emotivní stránka – dívka zřejmě práci na záhonu prožívala silně, asi to byla spolupráce s maminkou. O emotivních prožitcích svědčí i to, že vyprávěla o své rodině.
(vstup D8)

2.5.2 Odpovědi na stanovené otázky

Díky realizaci experimentů mohu nyní odpovědět na otázky, které jsem si na začátku experimentu kladla za cíl zjistit.

1. Otázka

Tvoří děti více tvary konvexní či nekonvexní?

K této otázce mohu nyní říci, že děti, se kterými jsem prováděla experiment, tvořily především tvary nekonvexní, překřížené, co nejvíce „zamotané“. Líbilo se jim, že měly možnost udělat co nejnápadnější obrazce, že měly svobodu vytváření. Myslím, že utváření obrazců je závislé na „neuspořádanosti“. Když se podíváme, celý svět okolo nás je uspořádaný, má jakási pravidla. Myslím, že každý chceme podvědomě nějakým způsobem tuto pravidelnost narušit či vytvořit něco jiného, než nás obklopuje.
Všechny děti vytvořily nekonvexní obrazce.

2. Otázka

Pojmenovávají děti útvar nejdříve, a pak modelují či naopak?

Na tuto otázku mám celkem jednoznačnou odpověď. Sedm dětí z mého experimentu si nejdříve tvar modelovalo, poté se na něj podívalo a pojmenovalo ho.

Pouze v případě experimentu (ex. 1A) byla situace jiná. Myslím, že to bylo ovlivněno tím, že dívka měla předchozí silnou životní zkušenost, možná před tím nikdy na zahrádce nepracovala, a proto to byl pro ni velký zážitek, který potřebovala nějakým způsobem „uvolnit“, nějakým způsobem sdělit světu. Proto možná i její počáteční modelování bylo nejdříve „slovní“, až pak přecházelo do činnosti rukou. Nejdříve tedy byl nápad, což u ostatních dětí bylo naopak.

7 dětí z 8 si nejdříve tvar modelovalo.

3. Otázka

Pojmenovávají děti tvary podle asociací ze života, podle toho, co jim připomíná daný obrazec nebo vymýšlejí „fantastické“, vlastní názvy?

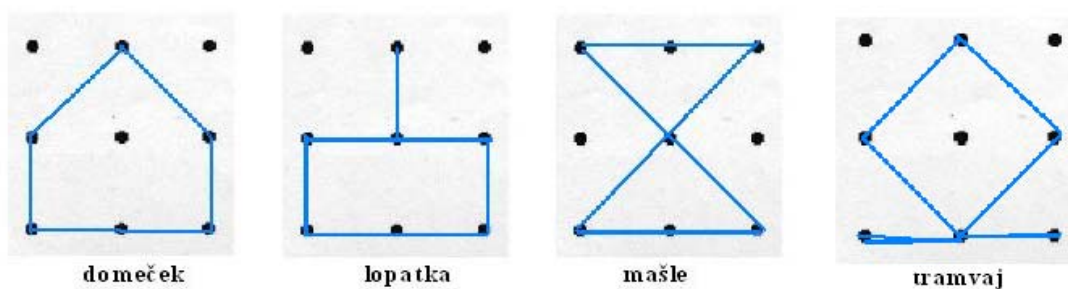
U všech osmi dětí, se kterými jsem experiment prováděla, se vyskytl stejný jev. Všechny děti tvar vymodelovaly, pak se na něj chvíli dívaly (mohla to být i sekunda – dvě) a řekly, co obrazec znamená. Myslím, že se jim v mysli míhaly představy, co obrazec připomínal z reálného života a poté, co bylo nejvíce podobné nějaké věci či předmětu, to řekly. Akorát u experimentu 1 byla situace ze začátku jiná (viz komentář k experimentu).

Žádné z dětí ani jednou nezkusilo vymyslet nějaký vlastní název či zkomoleninu pro daný obrazec. Vždy používaly názvy věcí z běžného života jako domeček, lopatka, mašle, šipka, láhev na pití, tramvaj (obr. 1.18). Na druhou stranu děti byly ochotny dávat jednomu obrazci několik názvů (obr. 1.19). Obrazec mohl být ve stejné či otočené poloze. Většinou to, co jim připomínal, to vše pojmenovaly.

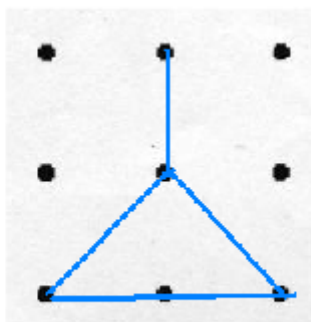
Každé dítě vytvořilo tyto geometrické tvary: čtverec, trojúhelník a obdélník.

7 dětí z 8 vytvořilo „domeček, lopatku“ a pětiúhelník.

Všechny děti pojmenovaly tvary podle asociací ze života.



Obr. 1.18



Zrcátko, ramínko, trychtýř, autíčko na ovládání

Obr. 1.19

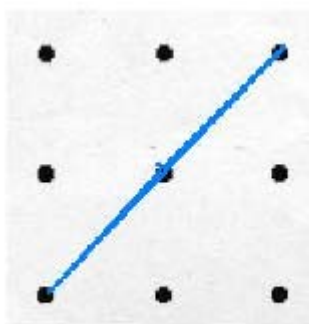
4. Otázka

Jsou schopny děti na geoboardu vymodelovat i „živou“ věc a pojmenovat ji tak?

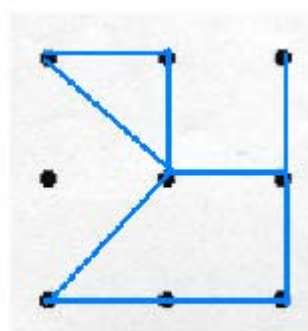
Tato otázka mě velmi zajímala. Spíše jsem byla skeptická a říkala jsem si, že děti moc nepromítnou živou věc na geoboardy, že se jim bude zdát „živá“.

Tři z pozorovaných dětí udělaly obraz živé věci a i jí tak pojmenovaly. Nebylo to ze začátku modelování na geoboardy, ale spíše vždy ke konci práce. Přisuzuji to tomu, že děti se trochu s geoboardem seznámily a uvolněněji na něm pracovaly.

Děti vytvořily žížalu, psa (obr. 1.20), kočku, myš. Zajímavé je, že žák, který vytvořil „žížalu“ ze začátku vymodeloval ten samý tvar a pojmenoval ho jako „drát“.



Žížala či drát



Pes

Obr. 1.20

2.5.3 Závěr z experimentu na pojmenování tvarů

Chvilí trvalo, než se děti zbavily počátečního ostychu, ale poté všechny pracovaly velmi zaujatě a práce je bavila. Byly velmi tvořivé, vymýšlely spoustu pojmenování i pro jeden tvar. Tím se jim zlepšovala představivost a obrazotvornost.

Uvědomila jsem si, že děti jsou velmi ovlivněny svými životními zkušenostmi tím, co vidí okolo sebe. Pozorují, zaznamenávají a posléze si vybavují a používají v různých situacích. Životní zkušenosti se tedy promítají do jejich porozumění objektům¹⁴. Proto je dobré dávat jim mnoho podnětů, aby se rozvíjely, všímaly si světa kolem sebe.

Dílčí uvědomění:

Uvědomuji si, že počet experimentů, které jsem prováděla, není příliš velký, proto nemohu výsledky zobecňovat v širším smyslu. Proto provádím závěr jen ze svého experimentu.

2.6 Experiment číslo 6 – Hledání různých trojúhelníků

V tomto experimentu jsem chtěla zjistit, zda dovedou děti najít všechny různé trojúhelníky na geoboardu.

Škola: Praha, ZŠ Jindřišská

Datum: 2. 4. 2008

Počet žáků: 8

Třída: 2., kroužek

Čas: odpoledne

Poznámky: Přítomny byly ještě mé spolužačky z homogenní varianty a vyučující našeho semináře.

¹⁴ Podle M. Hejného se matematické poznání člení na čtyři třídy: Objekty, vztahy, postupy a argumentace, schémata. Na objekty si klademe otázku „Co to je?“ (Hejný, 1999)

S touto skupinou jsem pracovala již několik seminářů před tím. Prošly si prostředím geoboardu a částečně i prostředím tečkovaného papíru. S prostředím tedy byly seznámeny. V kroužku byly děti velmi matematicky nadané, ale i děti, kterým trvalo déle vyřešit úlohu, či ji řešily s obtížemi. Různorodost byla asi jako v každé třídě.

Evidence kamerou.

Otázky

1. Zvládnou děti tvořit různé typy trojúhelníků?
2. Dovedou poznat dva trojúhelníky v různých polohách?
3. Najdou všechny trojúhelníky? Bude pro děti nějaký trojúhelník obtížnější najít?

Scénář

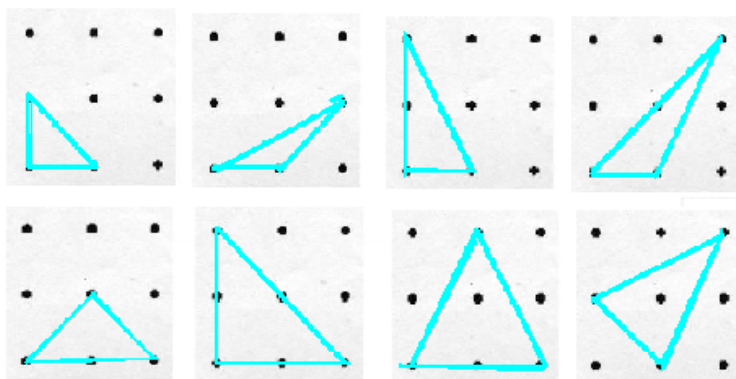
Děti v kroužku budu motivovat tak, že společně zkusíme najít co nejvíce různých trojúhelníků na geoboardu. Každé dítě dostane tečkovaný papír a geoboard. Tvary si může na geoboardu modelovat, a pak zakreslovat na čtverečkovaný papír. Až budou mít děti pocit, že našly všechny druhy trojúhelníků, tak je společně budeme zapisovat na tabuli (na tabuli bude předkreslen tečkovaný papír). Vždy jedno dítě bude malovat a ostatní popřípadě budou říkat své poznámky či připomínky. Chtěla bych ve třídě navodit diskusi, kdy by si děti obhajovaly své názory.

Můj vstup

Tuto úlohu jsem také sama vyřešila. Úloha má právě osm řešení (obr. 1.21). Trojúhelníky jsem poskládala tak, nepoukazuji na to, že opravdu jiné řešení není.

Geoboard беру tak, že má tři „patra“. Patra chápu jako tři hřebíčky vedle sebe ve vodorovném směru. Začala jsem tvořit trojúhelníky, které jsou v prvním patře napnuty na dvou hřebíčcích. Postupně jsem gumičku upevňovala za každý hřebíček. Poté jsem to samé opakovala v druhém patře. Další fáze byla, že jsem v prvním patře napnula gumičku na celé patro (tři hřebíčky). To samé jsem opakovala jako

v předchozím kroku. Postupně jsem gumičku upevňovala v druhém patře za jednotlivé hřebíčky, poté ve třetím patře. Poslední trojúhelník je specifický, je totiž upevněn mezi patry.



Obr. 1.21

2.6.1 Odpovědi na otázky

Nyní, po odučení kroužku, již mohu odpovědět na kladené otázky.

1. Otázka

Zvládnou děti tvořit různé typy trojúhelníků?

Na tuto otázku je jednoznačná odpověď. Ano všechny děti dovedou tvořit různé typy trojúhelníků. Každé z dětí našlo minimálně tři různé trojúhelníky (příloha č.3). Děti většinou měly trojúhelníky převrácené či jinak na geoboardu umístěné

2. Otázka

Dovedou poznat dva trojúhelníky v různých polohách?

Zde nemohu jednoznačně odpovědět. Některé děti hned viděly, že trojúhelník je otočený, ale nebylo jich mnoho. Myslím, že v mnohých dětech se tento poznatek teprve dotvářel či si ho začaly uvědomovat. O tomto tématu se ještě zmíním (2.6.2 Dva vstupy Sára)

3. Otázka

Najdou děti všechny trojúhelníky? Bude pro děti nějaký trojúhelník obtížnější najít?

Na tuto otázku není v mém experimentu jednoznačná odpověď. Myslím, děti dělaly trojúhelníky metodou pokus – omyl. Proto jsem odpověď strukturovala jako počet dětí, které našlo kolik trojúhelníků.

Jaké trojúhelníky kdo našel?

(Trojúhelníků bylo tedy celkem možno nalézt osm. Viz *Můj vstup*)

- Jedna dívka našla všechny trojúhelníky
- Čtyři děti našly sedm trojúhelníků (z toho třem dětem chyběl stejný trojúhelník)
- Dvě děti našly pět trojúhelníků
- Jeden chlapec našel pouze tři trojúhelníky

Odpověď na další otázku, zda některý trojúhelník bude zvlášť obtížný, zní:

Děti nejčastěji zapomínaly na trojúhelník typu



, následně pak



Úvaha:

Myslím si, že první trojúhelník bylo asi pro děti těžké najít. Možná si neuvědomovaly, že trojúhelník může „jít i středem“, většinou totiž malovaly trojúhelníky po „okrajích“ tečkovaného papíru.

2.6.2 Dva vstupy Sára

Následující ukázky jsou z diskuse, která se rozpoutala při prezentaci trojúhelníků na tabuli.

Sára mě zaujala, byla velmi milá a usměvavá, vždy se na mě smála. Snažila se mi být co nejbližší a vždy mi říkala, že se těší na další hodinu se mnou. To potěší každého učitele, když něco takového slyší.

Když jsem si po výuce procházela video, zaujaly mě její dva vstupy v této hodině. Protože mi přišly výrazné.

Sárin vstup 1

Fragment protokolu experimentu č.5:

• přítomen: Sára (S), experimentátor (Ex), děti

Ex03: Budete si odškrtnout, kdo už jaký trojúhelník má. Tak začne třeba Janička.

J01: *jde a maluje trojúhelník*

Ex04: Mají ho všichni? Zvednou ruce, kdo má stejný jako Janička. Táhle? Sára, taky máš stejnej?

S01 (45:29): Jinej.

Ex05: Jinej, jo? A jak vypadá ten jinej?

S02 (45:32): Že je takhle nahoře.

Ex06: Tak ho půjdeš namalovat?

S03: Jo. *Jde k tabuli.*

Ex07: Tak sem nakresli, který si myslela.

Maluje ten samý tvar, ale jinak převrácený. (obr. 1.22)



Trojúhelník, který byl již na tabuli X trojúhelník Sára

Obr. 1.22

D01: Ale vždyť je to přesně ten stejný, akorát že vobrácený!!

S04: Nene, já to mám jako jinej.

D02: *ze třídy se ozývá nesouhlas s tím, že jsou trojúhelníky stejné*

S05 (46:15): *(chvíli váhá)* Já si to nepamatuju, jak jsem to měla na papíře.

- Ex08: Já ti donesu papír. *(rychle pro ně jde)*
- H01: Je to stejný! *(Běží k tabuli a naznačuje rukama, jak by ho otočil. Ukazuje.)*
- D03: *Běží k tabuli i ostatní, všichni chtějí vysvětlit, proč je trojúhelník stejný. (Je zde velká zaujatost)*
- Ex09: Ale nebudeme mluvit všichni najednou. Sednout!
- D04: *Ještě ukazují rukama a překřikují se.*
- Ex10: Ok, takže sme se shodli, že je to stejný.
- D04: Jooooo!!!
- U10: Tak ti děkuji, Sáro, sedni si. Tak já ho umažu, aby se nám tady nepletl.

Sárin vstup 2

Tento vstup je z té samé hodiny.

- D19: Je to úplně stejný jako tady ten.
- S14 : Jak to?
- H05: Tady to dáš takhle a máš to.
- N03: Podívej, tady máš jednu čáru a tady taky. *(gestikuluje a ukazuje horlivě rukama)*
- Ex24: Tak co myslíte, je to stejný?
- D20: Jo, jo je to stejný! *(skandují)*
- S15 (53:06): Ale tady to je přece jiný. *(ukazuje na strany trojúhelníka)* Ale ...
- D21: Je to stejný!! *(znějí už trochu našťvaně)*
- S16: Ale tady je to takhle...
- C06: No jo, ale vždyť je to obrácený! Je to stejný, ale obrácený! *(rozčiluje se a zvyšuje hlas)*
- S17: Nene, vždyť je to jiný...
- C07(53:32): To je jako kdybys řekla, že lev je obyčejnej lev a když je obrácenej, tak je to morče. *(sotva vyslovuje, jak je rozčilený)*

Komentář k experimentu č. 6:

Když jsem si později znovu přehrávala záznam z této situace, zaujalo mě, jaký jsem striktní a nevšímavý učitel. Při tom jsem si říkala, že taková jistě nejsem. Uvědomila jsem si, že organizuji dětem jejich práci a nenechám je se samotné rozhodnout (vstup Ex03). Děti přece měly právo na to, aby si našly svůj systém označování jednotlivých trojúhelníků, a já jsem jim striktně řekla, jak to budou dělat.

Dále jsme si uvědomila, že se mi skytla skvělá příležitost rozvinout debatu a rozvést ji ve vstupu D2. Přímou nabízel, aby děti samotné Sáře vysvětlily, proč je trojúhelník otočený, a že je to ten samý. Místo toho jsem je usadila na svá místa (vstup Ex8). Tím jsem nedala možnost Sáře, aby pronikla do kouzla otáčení trojúhelníků. Sára tam jen stála a ke konci už ani nevstupovala do debaty, protože všichni se „vlastně překřikovali, že to má špatně.“ Asi ani sama nechtěla nic vysvětlovat nebo se jí nikdo na nic neptal a byla utloukána argumenty. Sama ale nevěděla, proč to tak je. Tím jsem jí mohla pomoci a děti zapojit do vysvětlování, ale v té chvíli mě to ani nenapadlo.

Myslím, že poslední negativní zpětná vazba pro Sáru byla věta: „Tak ti děkuji Sáro, sedni si. Tak já ho umažu, aby se nám tady nepletl.“ Jako učitel jsme jí dala najevo, že její snaha byla úplně zbytečná a za nic nestála. Chtěla se zřejmě pochlubit, že vymyslela jiný trojúhelník než ostatní a učitel jí smetl a dokonce její práci smazal, aniž věděla proč. Ten trojúhelník jí zřejmě připadal pořád stejný. Do konce hodiny již Sára do diskuse nevstupovala, nehlásila se, nebyla aktivní. Asi jí přišlo, že ať se snaží sebevíc, tak její nápady jsou „mazány“ učitelem a to veřejně, bez udání důvodů.

Uvědomila jsem si, že bych se asi měla naučit být citlivější k situacím. Naučit se „vychytat“ ten pravý moment a rozvést ho do nejlepší podoby, nejlépe zavést diskusi mezi děti, které chtějí diskutovat a pokusit se zapojit i méně komunikativní. Myslím, že by to bylo přínosné pro všechny děti, nejen pro ty chápající, ale i pro ty, které si danou problematiku potřebují ujasnit. Slyšet více názorů, více způsobů vysvětlování, to je věc, kterou by se děti měly učit a učitel by jí měl umět ovládat.

Přemýšlela jsem o tom, že podchytit to pravé místo, kdy je třeba dát podnět a diskusi rozvinout, je také dovednost, kterou je třeba si hlídat a učit se jí. Čím více si jako učitel takovými situacemi projdu, tím je budu lépe vnímat a lépe na ně reagovat.

Správně zvolenými otázkami povedu děti tam, kam bych je chtěla dovést. Je třeba přikládat důležitost k „citlivosti učitele k potřebám žáků.“ (Kyriacou, 1991)

Uvědomuji si, že jsem v tomto experimentu byla v dvojí pozici a to jako experimentátor a učitel. Jako experimentátor jsem byla v těžké roli – chtěla jsem něco naučit, ale zároveň děti příliš nesměrovat. Možná tím bylo ovlivněno mé chování.

Analýza experimentu č. 6:

Z této ukázky bylo jasně zřetelné, že Sára se ještě nachází v etapě utváření separovaných modelů. Nevidí jednotlivé trojúhelníky, nevidí jejich otočení. Potřebuje ještě získat „lepší orientaci“ v dané problematice. Její hladina zatím „nepřetekla“ do hladiny generických modelů. Ještě se jí obrazce nespojí. Z toho vyplývá, že pro Sárku je důležité, aby jí učitel dával více podnětů, aby si utvářela více separovaných modelů, aby se jí vše „propojilo“.

Jak je potom těžké pracovat s celou třídou jako „opravdový učitel“. Každé dítě by potřebovalo individuální přístup, aby se mohlo rozvíjet svým tempem. Některé děti došly již ke generickým modelům, jiné ne. Jak tedy pracovat s různými stupni porozumění v jedné třídě s třiceti žáky?

2.7 Experiment číslo 5 – Popis útvaru „přes telefon“

V tomto experimentu jsem si chtěla vyzkoušet s dětmi metodu komunikace „přes telefon“¹⁵. Zajímalo mě, jak děti budou popisovat své obrazce a zda kamarád ve dvojici bude popisu rozumět.

Scénář

¹⁵ Více o metodě *Telefon* je rozpracováno v (Roubíček, 2007)

Děti v kroužku utvoří dvojice, každému dám geoboard. Nejdříve děti budu motivovat tím, že si mohou na geoboardu něco vymodelovat. Následně jeden z dvojice něco vymodeluje a druhý zkusí, zda by se mu povedlo podle předlohy kamaráda, vymodelovat to samé. Gradace bude, že následně se již bude popisovat pouze „přes telefon“ a dotyčný se nebude moci podívat.

Protokol experimentu č. 5

Škola: Praha, ZŠ Jindřišská

Datum: 2. 4.2008

Počet žáků ve třídě: 10

Třída: 2., kroužek

Čas: odpoledne

Poznámky: Experimentu se ještě zúčastnily mé spolužačky z kroužku a vyučující našeho kroužku. U každé dvojice seděla minimálně jedna spolužačka, která sledovala aktivitu dětí, popřípadě do ní vstupovala. Já jako experimentátor jsem řídila průběh celého kroužku.

Evidence kamerou. Natáčena na kameru byla jen jedna dvojice, chlapec a dívka. Z experimentu jsem zařadila dvě části rozhovoru dětí.

V první ukázce děti modelovaly obrazce a při sestavování obrazu po kamarádovi se na model mohly dívat.

Fragment č. 1 protokolu č. 5

• přítomen: chlapec „C“, dívka „D“, učitel „U“

C8: Teď já.

D9: *Modeluje.*

C9 (10:28): Porádím ti jeden krok. Až budeš mít čtverec, tak ...

U6: Počkej, neříkej jí to.

D10: *Postavila obrazce.*

- U7: Má to dobře C?
C10: Ukaž? Bere její geoboard a zkoumá ho, převrací, otáčí.
U8: Proč to C otáčíš?
C11: Abych věděl, jestli to je opravdu stejné.

Komentář k fragmentu č. 1

Tento úsek jsme vybrala kvůli tomu, že mi přišla velmi pěkná manipulace s geoboardem. Chlapec si sám v sobě tvořil separované modely. Otáčel s trojúhelníkem a tím poznával, v kolika různých polohách může být jeden a ten samý trojúhelník. Tím mohl dospět ke generickému modelu. Myslím, že k němu také dospěl, neboť v experimentu č. 6 je to ten hoch, který Sáře vysvětluje, že je trojúhelník převrácený (str. 68, vstup C 6, 7).

Analýza fragmentu č. 1

Hladinová úroveň chlapce z hlediska poznávacího procesu. Chlapec ještě nemá dotvořenou hladinu separovaných modelů, proto si pomohl tím, že obrazec přetáčel. Tím se mu propojily různé polohy jednoho obrazce.

Sociální jev. Chlapec je komunikativní. Neodbude učitele a vysvětlí mu, proč geoboardem otáčí.

V této ukázce již děti popisují tvar kamarádovi přes „telefon“

Fragment č. 2, protokolu č. 5

- C12: Tak už.
D13: Hm.
C13: Nahore, když uděláš čtverec, tak jsou tři, ale ty uděláš jen dva. Potom udělej celou čáru zprava, nahoru, doleva, nahoru na další tečku. To je konec.
D14: Staví, není jí to jasné.
U9: Zkus to ještě jednou.

- C14: Když já to neumím popsat. *Smutný povzdech.*
- D15: Já nevím.
- C15: Tak já se kouknu.
- U10: Ne, zkuste to radši ještě jednou.
- C16: Udělej čtverec, jak je tady takhle. Vpravo, jak je ten knoflíček, tak dáš gumičku doprostřed a dolu...

Komentář k fragmentu č. 2

Chlapec popisuje obrazce zvláštním stylem a to pomocí čar a pravolevé orientace. Přišlo mu to asi jako nejjednodušší, ale dívka jeho popisu moc nerozuměla. Asi si toto byl i sám vědom, neboť to i vyslovil (vstup C14)

Analýza fragmentu č. 2

Chlapec popisuje svůj obraz procesuálně. Nesděluje ho jako koncept. Neřekne, jak celkový obraz vypadá, ale popisuje co má jak udělat.

Nepoužívá moc geometrických termínů, pouze si uvědomuje že geoboard je čtverec. Geometrické tvary tedy ještě asi nemá pevně zafixované.

2.8 Co měly experimenty společného

Při práci s dětmi jsem pozorovala společný jev. Dítě většinou bylo uzavřené, málo mluvné, když bylo samotné, když jsem experimenty prováděla odděleně. Stačilo ale zavést na nějaké oblíbené téma či položit dobře otázku a dítě se rozpovídalo. Pokud byla větší skupina a děti se znaly, byly suverénnější, nebály se vyslovit své názory a i mohutněji mezi sebou diskutovaly.

Pokud ve třídě tvořily děti skupiny, většinou pravidlem bylo, že se sdružovaly chlapci a dívky do rozdílných skupin.

U dětí v druhých třídách, se kterými jsem prováděla experimenty, nebyly upevněny geometrické pojmy. Děti je mnoho nepoužívaly a to jak v nazvání útvaru, tak při popisu obrazce kamarádovi.

2.9 Závěrem k experimentům

Je to neskutečné, jak se díky technice můžeme podívat zpět do minulosti a přitom být v přítomnosti. Z kolika chyb se učitel může poučit, ke kolika novým podnětům může dojít. Kolik různých nových variant řešení může vymyslet. Může se poučit do další práce s dětmi, ale i do svého profesního života.

Když jsem si procházela jednotlivé experimenty, uvědomila jsem si, jaké různorodé situace můžu z experimentů vypožorovat, kolik různých situací vidím, když si záznamy mohu přehrát znovu. Mohu zapřemýšlet nad tím, proč žák asi reagoval takto, co ho zmátlo, zda jsem zadala dobře instrukci či by příště chtěla instrukce jinak formulovat. Také jsem díky zpětné analýze zjistila, že jsem jiný učitel, než za jakého jsem se měla. Jsem přísnější.

Myslím, že by nebylo špatné, kdyby každý pedagog takovýmto zhlédnutím a vyhodnocením své hodiny prošel. Bylo by to velmi účelné a každý by jistě došel k nějakému poučení a ke zhodnocení svých hodin.

Závěr

Sedím nad poslední stránkou a přemýšlím, co mám napsat. Nic mě nenapadá. Jak můžu uzavírat a psát závěr k něčemu, co jsem teprve začala dělat. Jak můžu uzavírat něco, co jsem si začala pomalu v sobě otvírat. Nevím. Rozhodně svoji práci já sama nepovažuji za uzavřenou, myslím, že je zde dost podnětů, kterými by bylo zajímavé se zabývat hlouběji a dál. Například Pickova formule na trojúhelníkovém papíře. Zde by bylo pěkné navrhnout a vyzkoušet s dětmi nějaký zápis obrazců, které tvořím v tomto trojúhelníkovém prostředí. Dále potom zabývat se počítáním obsahů. Když jsme ve škole končili s objevováním Pickovy formule pro čtverečkovaný papír, myslela jsme si, že k tomu není co dodat. Že jsme vše našli a vše vyřešili. Tím to pro mě bylo uzavřené a já svoje poznámky dala do šuplíku k ostatním „ukončeným“ materiálům ze svého studia.

Nyní vidím, jak jsem se mýlila, když jsem uzavřela Pickovu formuli, o které jsem si myslela, že ji již nikdy nevytáhnu ze skříňky. Uvědomila jsem si, že žádnou část mé práce, mých poznatků nemůžu chápat jako uzavřenou. Vždy objevím něco nového, něco, co mě vtáhne hlouběji do tématu, něco, co by chtělo zlepšit. Něco, co mě posune o krok dál. Nyní už to cítím.

Ani své experimenty necítím jako uzavřené. Chtěla bych s nimi dále pracovat. Rozhodně některé z nich, v jiné podobě či s jinými dětmi, vyzkouším a ověřím si, zda reagují stejně, co mají společného a co ne. Ke své práci přikládám DVD s nahrávkami některých experimentů. Doufám, že i někomu jinému mé experimenty něco přinesou, když s nimi bude pracovat. Může se z nich poučit, může si zprostředkovaně udělat názor na danou problematiku. Věřím, že má celá práce bude využita a poslouží dobrému účelu. I jen proto, kdyby se kdo měl poučit z mých chyb. Jako budoucí učitel věřím, že učitelé by si mezi sebou měli zprostředkovávat zkušenosti. Ať tu pozitivní či negativní.

Jak znovu opakuji, cesta se mi mojí prací neuzavřela. Otevřel se mi mnohem širší obzor rozhledu. Nyní vím, že i na věci se šuplíku jednou „dojde“ a nezůstanou ležet v zapomnění ...

Seznam použité literatury:

- BRUNNER, J. 1964. *Na pomoc pedagogické praxi*.
- HARTL, P. 1993. *Psychologický slovník*. 1. vydání. Praha: Česká typografie a.s., 1993. 297 s. ISBN 80-90 15 49-0-5
- HEJNÝ, M. – JIROTKOVÁ, D. 1999. *Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrií a aritmetikou*. UK Pedf v Praze, 1999. 80 s., ISBN 80-86039-92.7
- HEJNÝ, M. – KUŘINA, F. 2001. *Dítě, škola, matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 1. vydání. Praha: Portál, 2001. 187 s. ISBN 80-7178-581-4
- HEJNÝ, M. – NOVOTNÁ, J. – STEHLÍKOVÁ, N. 2004. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Pedf UK, 2004. 214 s. ISBN 80-7290-189-3 (1.sv)
- HEJNÝ, M. – NOVOTNÁ, J. – STEHLÍKOVÁ, N. 2004. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Pedf UK, 2004. 244 s. ISBN 80-7290-189-3 (2.sv)
- HEJNÝ, M. *Mechanismus poznávacího procesu* In HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. (Ed.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*; Praha: PedF UK, 2004, s. 23-42, ISBN 80-7290-189-3
- HOŠPESOVÁ, A. – STEHLÍKOVÁ, N. – TICHÁ, M. 2007. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. Č. Budějovice: JČU, 2007. 220 s. ISBN 978-80-7394-052-2
- JIROTKOVÁ, D., KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Diversity of Constructivist Educational Approaches* In NOVOTNÁ, J. (Ed.), *Proceedings of SEMT05*, Praha: PedF UK, 2005, s. 171-179, ISBN 80-7290-220-2
- JIROTKOVÁ, D., KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Pythagorova věta na prvním stupni ZŠ*. In PŘÍVRATSKÁ, J., PŘÍHONSKÁ, J., ANDREJSOVÁ, D. (Eds) *Sborník příspěvků ICPM'05*
- KYRIACOU, CH. 1996. *Klíčové dovednosti učitele: cesty k lepšímu vyučování*. 1. vydání. Praha: Portál, 1996. 155 s. ISBN 80-7178-022-7
- LANGR, L. 1984. *Úloha motivace ve vyučování na základní škole*. 1. vydání. Praha: SPN, 1984. 105 s.
- LINHART, J. 1972. *Proces a struktura lidského učení*. Praha: Academia, 1972. 488 s.
- MICHNOVÁ, J. 2003. *Diplomová práce – Čtverečkovaný papír jako cesta ke konstruktivistickému přístupu k vyučování geometrie*

NAKONEČNÝ, M. 1996. *Motivace lidského chování*. 1. vydání. Praha: Academia, 1996. 270 s. ISBN 80-200-0592-7

PRŮCH, J. 2008. *Pedagogický slovník*. 4. vydání. Praha: Portál, 2008. 322 s. ISBN 978-80-7367-416-8

ROUBÍČEK, F. 2007. *Komunikace a kultura vyučování matematice*. In HOŠPESOVÁ, A., STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. (Eds.) *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2007. s 177-205. ISBN 978-80-7394-052-2

TRPIŠOVSKÁ, D. 2007. *Psychologie osobnosti*. 1. vydání. Ústí nad Labem, PedF, 2007. 136 s. ISBN 978-80-7044-928-2

Rámcový vzdělávací program (RVP) 2005. Praha: VÚP

Všeobecná encyklopedie. 1996. Nakladatelský dům OP, Praha

Učebnice matematiky pro první stupeň: ZŠ

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., KRATOCHVÍLOVÁ, J. – Fraus, Plzeň, 2007 – 2008

MATOUŠKOVÁ, K. – Alter, Praha, 1993 – 1999

TREJBAL, J. – KOMÁRKOVÁ, V. – SPN, Praha, 1997 – 1999

KONEČNÁ, L. – Prodos, 1992 - 1997

MOLNÁR, J. – Prodos, 1993 – 1997

ROSECKÁ, Z. – Nová škola, 1999 – 2003

COUFALOVÁ, J. – Fortuna, 1994 – 1998

HOŠPESOVÁ, A. – Prométheus, 1998 – 2000

Seznam příloh:

Příloha č. 1 - Záznam experimentu č. 4.....	II
Příloha č. 2 – Záznam experimentu č.5.....	IV
Příloha č.3 – Pracovní listy dětí z experimentu č.6.....	IX

PŘÍLOHA Č. 1

- ZÁZNAM EXPERIMENTU Č.4

Škola: Praha, ZŠ Jindřišská

Datum: 2. 4. 2008

Počet zkoumaných žáků: 2

Třída: 2., kroužek

Čas: odpoledne

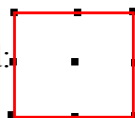
Poznámky: Přítomny byly ještě mé spolužačky z homogenní varianty a vyučující našeho semináře.

SLEDOVÁNÍ DÍTĚTE: DÁŠA HŘÍCHOVÁ

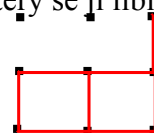
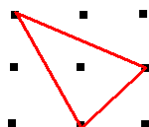
JMÉNO DÍTĚTE: KATKA/KIKI

- Tvoří obrazce **KONVEXNÍ** _ NEKONVEXNÍ
- Tvoří dítě obrazec tím :
 - A. Bere ho jako celek, udělá si hned jeden „velký“, pak ho popř. upraví. **KONCEPTUÁLNĚ**.
 - B. Jde po každé „tečce geoboardu“ a nad obrazcem přemýšlí, nejde mu hned. Hned ho nevidí. **PROCESUÁLNĚ**.
- Pro spolužáka tvoří těžší úlohu než pro sebe ANO - **NE**
- Když geoboard otočíš „z jiné strany“, proti dítěti, myslí si, že je obraz stále shodný se zadáním spolužáka? ANO – NE
- Nyní tvoří obrazce spíše **KONVEXNÍ – NEKONVEXNÍ**

- jako první vytvořila čtverec přes celý geoboard:



úkol: Vymodeluj něco, co podle tebe vymodeluje tvůj spolužák: (Katka postupuje experimentálně až dojde ke tvaru, který se jí líbí, zase ho předělá na jiný tvar, který se jí líbí (neustále manipuluje)



vytvořeno samostatně :

vytvořeno podle spolužáka (tohle neuměla)

=> Kiki že jí udělá lehčí (také neuměla)

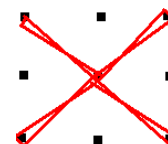
(poznámka: Katku to moc nebaví, dá se říct, že se nudí, asi pro neúspěch)

- Kiki se jí pokouší pomoc (diktuje jí, co má udělat př. teď to překřížíš...)



=> nakonec Katka obrázek postaví a udělá Kiki mega těžkou úlohu:

(Kiki jí nezvládne)



úkol: Udělat takový útvar, aby se tam nekřížila gumička a nadiktovat postup spolužákovi:

diktuje Kiki, Katka „navléká gumičku zespoda na tři“, potom „nahoru na levé straně navlíknout na dva, jako z levý strany navlíknout ze shora nahoru na dva“

Katka: „Jako mám prostředek na jednu stranu nebo jako tuhle?“

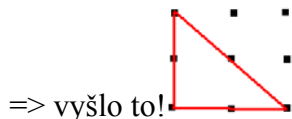
Kiki: „Přetáhni to přes prostřední, no doprostřed!“

Katka: „Jak doprostřed?“

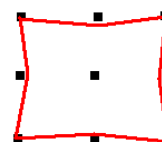
Kiki: „Uprostřed vzít gumičku a natáhnout doprostřed dolů“

Katka: „Tu gumičku co dám doprostřed?“

Kiki: „Máš to vprostředku, vezmeš tu gumičku a natáhneš jí nahoru“



Katka: „Jak to máš takhle, tak to dáš takhle...jako dáš tu gumičku doprostřed, ale né úplně doprostře. To samé dolní strana a levá i pravá => vyšlo, je to „skoročtverec“



takový

Kiki: „Navlíkni to odspoda do půlky čtverce, potom na téhle straně

(ukáže prstem) si vezmi z prostřední řady gumičku a natáhni ji na jeden hřebík nahoru hned

nad to, jak jdi to měla a pak tam máš takový půl trojúhelníku a tu půlku natáhni na prostřední

hřebík na horní straně

=> nevyšlo, zkusit znovu (obě děvčata začínají

být znuděná a nezaujatá prací)

- Katka musela odejít domů

Příloha č. 2

- ZÁZNAM EXPERIMENTU Č.5

Škola: Praha, ZŠ Jindřišská

Datum: 2. 4. 2008

Počet zkoumaných žáků: 2

Třída: 2., kroužek

Čas: odpoledne

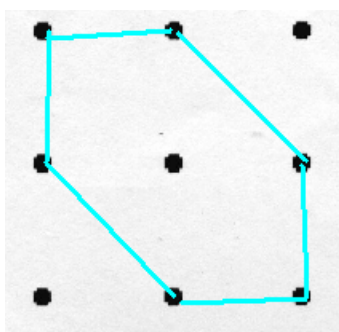
Poznámky: Přítomny byly ještě mé spolužačky z homogenní varianty a vyučující našeho semináře.

- Ex01: Dnes budeme pracovat společně. Pamatujete si, co jsme dělali minule?
- D01: Hlásí se. (ve třídě je slyšet kvikot)
- K01: Gumičkovaná!
- Ex 02: Já jsme pro vás dnes něco přinesla. Jak byste to nazvaly? (*vytahuje geoboardy*)
- D02: Tvary, gumičkovaná, tvarovina, čtverec, střílená do oka ...
- Ex03: Tak budeme hlasovat. Kdo je pro gumičkovanou?
- D03: Většina zvedá ruce.
- Ex03: Dobře, tak tomu budeme říkat gumičkovaná.
- D04: Každé dítě dostává svůj geoboard.
- A01: Můžu si vzít tu obyčejnou?
- B01: Já chci ten červený!
- D05: Každý má geoboard před sebou.
- Ex04: Co byste si na tom mohli postavit?
- D06: Zkouší vymodelovávat tvary s gumičkou.
- C01: Auto na ovládání s anténou. To jsem dostal k narozkám.
- E01: Domeček.
- F01: Jednička. Jé, povedlo se mi číslo!
- G01: Otevřená konzerva.
- Ex05: Kdo si zkusil tvary, tak vytáhne gumičku. Zkusíme si teď vymodelovat nějaký obrazec. Jeden z dvojice ho postaví, druhý ho zkusí podle něj vymodelovat.

Pozorování dvojice chlapce „C“ a dívky „D“

- U01: Tak začni třeba ty D.

- C01: *Sám si staví tvary.*
- U02: Řeklo se, že D začíná, tak co to děláš?
- C02: Zkouším si, než to udělá.
- D01: *Staví a modeluje, vymýšlí tvary.*
 Motýlek, mašlička. Pokládá na lavici.
- C03: *Pracuje, zkouší.*
- D02: Já jsem to dělala jinak.
- U03: D, má to dobře?
- D03: No, má to jinak zamotaný. *Jinak překřížené gumičky uprostřed.*
- C04: To je přeci jedno, jak to udělám, hlavně, že je to stejný tvar, ne?
- D04: Hm.
- C05: Teď dělám já. *Vymýšlí a zkouší tvary.*
- D04: To vypadá jako kamen.
- C06: Já mám doma takový úlomek, plátek minerálu (obr. X). Vypadá to podobně.



Obr.X

- D05: Hotovo, to je dost lehký.
- C07: No, ale kdyby se spojilo víc gumiček dohromady, tak by to bylo obrovský.
- U04: Zkusíme ještě něco vymodelovat.
- C8: Jooo, jo a potom zase já. Já si zatím něco zkusím. Mám přesýpací hodiny, kříž nebo X_faktor. Joo, X_faktor, na to se koukám.
- D6: Modeluje. *Snaží se o těžký tvar*
- U5: Tak už to dodělej, ať může C tvořit.
- D7: *Rychle utvoří obraz a nechá ho tak.*
- C7: Modeluje podle předlohy.
- D8: Postavil.
- C8: Teď já.

- D9: *Modeluje.*
- C9: Poradím ti první krok. Až budeš mít čtverec, tak ...
- U6: Počkej, neříkej jí to.
- D10: *Postavila obraze.*
- U7: Má to dobře C?
- C10: Ukaž! *Bere její geoboard a zkoumá ho, převrací, otáčí.*
- U8: Proč to C otáčíš?
- C11: Abych věděl, jestli to je opravdu stejné.
- Ex6: Zkuste postavit tvar, kde se gumičky nebudou křížit a nebudou ani nadvakrát.
Zkuste si to.
- C12: Takhle? *Ukazuje obrazec a za chvíli dělá nový.*
- Ex7: Ano.
- D11: Hmmm.
- Ex8: Ale tady se to už kříží D. To brát nebudem, jo?
- D12: Hm.
- Ex9: Sedněte si k sobě zády, zkus C něco postavit, kdy se gumička nekříží. A potom to D zkus nadiktovat jako do telefonu, jako když jí nevidíš. Zvládnete to? Je to docela těžké!
- C12: Tak už.
- D13: Hm.
- C13: Nahore, když uděláš čtverec, tak jsou tři, ale ty uděláš jen dva. Potom udělej celou čáru zprava, nahoru, doleva, nahoru na další tečku. To je konec.
- D14: Staví, není jí to jasné.
- U09: Zkus to ještě jednou.
- C14: Když já to neumím popsat. *Smutný povzdech.*
- D15: Já nevím.
- C15: Tak já se kouknu.
- U10: Ne, zkuste to radši ještě jednou.
- C16: Udělej čtverec, jak je tady takhle. Vpravo, jak je ten knoflíček, tak dáš gumičku doprostřed dolu.
- D16: *Přemýšlí a staví.*
- C17: Máš to?
- D17: Hm.
- U11: Tak se na to podívejte, zda je to stejné.

- D, C 18: Jůůů!
- D19: To bylo lehký.
- C19: Vždyť si to před tím neměla, ne? Cos měla před tím?
- D20: Něco jinýho, já už nevím.
- D21, C20: *Modelují, dělají různé tvary.*
- U12: Tak teď zkusí něco D.
- D22: Hm, tak jo. *Modeluje.*
- D23: Tak pravou ...
- C20: Už??? Nejsm připravenej...
- D24: Jakoby čtverec, tak vpravo nahoře dej doprostřed ... (*říká a přitom modeluje*)
- U13: D, musíš to vymodelovat, a pak už to neměnit.
- D25: Hm. (*modeluje různé tvary*)
- D26: Vpravo nahoře dej doprostřed.
- C21: Ano, už mám.
- D27: Vlevo nahoře taky dej doprostřed ...
- C22: *pracuje*
- D28: A pak úplně dole uprostřed dej doprostřed.
- C23: Úplně dole ... (*přemýšlí a soustředěně pracuje*) Aha, už to mám.
- D29, C24: *Otočí se k sobě. Mají různé tvary.*
- D30: Ono se mu to kříží!
- C25: No jo, jenže jsem to postavil podle toho, jak si to diktovala! Hele, takhle jsem to udělal ..
- U14: Zkus to znova říct D. Pamatuješ si to?
- D31: Jo. (*Rozmýšlí se.*) No, hm. Udělej čtverec, pak si měl takhle tu čáru dát doprostřed.
- C26: Ale to by vzniklo tohle! (*názorně modeluje na geoboardu*).
- D32: Hm. (*porovnává*)
- C27: Takže já jsme to měl vlastně podle toho, jak to diktovala.
- C28: Tak ještě jednou. Jinej tvar.
- D33: Přemýšlí, zkouší modelovat různé tvary. (*i překřížené*) Udělá „mašličku“, *asi se jí líbí, tak na tvar chvíli kouká.*
Tak už.
- U15: Ono se řeklo, že se to nesmí křížit, vid'?
- D34: Hmm. (*Její to asi líto, předělá tvar.*) *Stále zkouší křížící se tvary.*

- U16: Tak už to máš?
- D35: Hm. Začni čtverec a celou tu horní část ...
- U17: D, to se ti ale kříží.
- D36: Hm. *(předělá to)*
Tak vpravo nahoře to dej doprostřed a pod dolem doprostřed nahoru ...
- C29: Ale, jak mám začít? Já nic nechápu. *(zní podrážděně)*
- D37: Ze čtverce. Vlevo nahoře a uprostřed nahoře.
- C30: Uprostřed nahoře ale nic není!
- D38: Já vím, ale tu gumu, jak tam je, dej nakřivo. No, nějak tak.
- C31: Jak nakřivo? *(začíná se zlobit, že tomu nerozumí)*
- D39: Ta guma tam zůstane a bude nakřivo.
- C32: Nejdřív řekneš pravá, pak levá. Tak co mám teď tady teda dělat?
- D40: Ta pravá tam zůstane a ta levá vlevo a nahoře uprostřed to otvírej a pustit.
- C33: Pustit ...
- D41: Pak to dej doprostřed.
- C34: Zkouší to. To nejde! To se kříží! Ukaž!
Otočí se a nevydrží to. Je nervózní, vytrhává jí geoboard z ruky.
- C35: Vždyť je to jiné!
- U18: Chyba je tady. Akorát tady, ne?
- D42: Ne, vždyť jsem mu říkala, že tady to zůstane a tady to bude nakřivo.
- U19: Ale ty jsi neřekla, kam nakřivo. To je potom těžký. To by mohlo být klidně sem, sem.
- D43: Ale on věděl, že se to nekříží!
- U20: To jo.
- D44: Hm.
- C36: Tak můžu to teď zkusit já?
- U21: No jasně, můžeš.

Příloha č.3

