Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Karel Pilař

Oceňování finančních derivátů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, Csc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu mé diplomové práce, Doc. RNDr. Janu Hurtovi, Csc., za cenné připomínky a podněty k této práci, poskytnutí potřebné literatury a čas strávený na konzultacích.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 14. 12. 2005 Karel Pilař

Obsah

Název práce: Oceňování finančních derivátů
Autor: Karel Pilař
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, Csc.
e-mail vedoucího: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Předložená práce prezentuje metody oceňování finančních derivátů, moderních a oblíbených finančních instrumentů. Tam, kde je to možné, odvodíme exaktní vzorce. V ostatních případech čtenáře seznámíme s numerickými metodami stanovení ceny finančních derivátů. V závěru předvedeme praktický výpočet ceny finančního derivátu na základě reálných dat (soubor je součástí diplomové práce).
Klíčová slova: oceňování finančních derivátů, forward, futures, swap, opce, binomický strom

Title: Valuation of financial derivatives
Author: Karel Pilař
Department: Department of probability and mathematical statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, Csc.
Supervisor's e-mail address: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This work describes methods of valuation of financial derivatives, modern and favourite financial instruments. If it is possible, we will deduce exact formulas. We demonstrate numerical procedures for valuation of other financial derivatives. Finally, we show practical calculation based on real data (CD-ROM attached).
Keywords: valuation of financial derivatives, forward, futures, swap, option, binomial tree

Kapitola 1

Úvod

Tato práce má za cíl seznámit čtenáře s metodami oceňování finančních derivátů. Odvodíme exaktní formule a předvedeme numerické metody. Nejprve si ovšem uvědomme, co jsou finanční deriváty. Tímto termínem označujeme kontrakty, jejichž cena závisí na ceně jiného finančního instrumentu. Obecně patří deriváty mezi *termínové kontrakty*, pro které je charakteristický časový rozdíl mezi okamžikem uzavření obchodu a jeho plněním.

Při uzavření termínového obchodu je nutné stanovit povinnost/právo koupit/prodat k stanovenému datu v budoucnosti (datum splatnosti) dohodnuté množství stanovených finančních instrumentů (podkladové aktivum) za dohodnutou cenu (realizační cena, cena dodávky).

Deriváty můžeme rozdělit podle vzájemného postavení obou účastníků kontraktu na pevné a podmíněné (opční).

- V případě *pevného (nepodmíněného) derivátu* jsou oba účastníci povinni k datu splatnosti obchod uskutečnit, ať je na trhu cena podkladového aktiva jakákoli. Uzavření pevného derivátu je obvykle pro oba účastníky bezplatné. O účastníkovi, který se zavázal k datu splatnosti koupit (resp. prodat) podkladové aktivum, se říká, že zaujal dlouhou (resp. krátkou) pozici.

- V případě *podmíněných (opčních) derivátů* získává jeden z účastníků právo tento obchod uskutečnit. Oproti tomu druhý účastník musí rozhodnutí podřídit. Za právo volby musí první účastník zaplatit určitý poplatek (opční prémii). Účastník, který zaplatil (obdržel) prémii, zaujal dlouhou (krátkou) pozici.

Mezi pevné deriváty řadíme *forwardy* (individuálně sjednané kontrakty na budoucí nákup či prodej podkladového aktiva), *futures* (forwardy, standardizované za účelem obchodování na burze) a swapy (dohody o budoucí směně úrokových plateb). Mezi opční deriváty řadíme opce. V následujících kapitolách se s deriváty seznámíme podrobněji z pohledu jak určit jejich hodnotu v průběhu jejich "života".

Kapitola 2

Forwardy a futures

2.1 Forwardy

Forwardy jsou individuálně sjednané termínové kontrakty na budoucí nákup či prodej daného podkladového aktiva (bazického instrumentu). Podkladovým aktivem budeme uvažovat dluhopis, akcii, směnný kurz nebo úrokovou míru. Forwardové kontrakty se sjednávají i nad jinými aktivy než finančními, těmi se ovšem tato práce nebude zabývat.

Vstoupit do dlouhé pozice ve forwardovém kontraktu znamená zavázat se ve stanoveném budoucím datu koupit podkladové aktivum za dohodnutou cenu. V souvislosti s forwardy se setkáváme se třemi základními pojmy - cenou dodávky, hodnotou dlouhé pozice forwardu a cenou forwardu.

Cenou dodávky K rozumíme cenu podkladového aktiva dohodnutou při sjednání forwardu. Cena dodávky se v průběhu trvání kontraktu nemění. Je-li k datu splatnosti vyšší než skutečná cena podkladového aktiva S_T, přinese forward účastníkovi v dlouhé pozici zisk ve výši $K - S_T$. Vzhledem k tomu, že je vstup do forwardového kontraktu pro oba dva účastníky bezplatný, vyjadřuje rozdíl $K - S_T$ jejich celkový zisk (resp. ztrátu).

Hodnota dlouhé pozice forwardu f_t v čase $t \leq T$ se určí jako okamžitý zisk (resp. ztráta), který vyplývá z dlouhé pozice v kontraktu. Hodnota dlouhé i krátké pozice na začátku forwardu je rovná nule. Zřejmě na konci kontraktu $f_T = S_T - K$.

Cena forwardu F_t v čase $t \leq T$ je taková cena dodávky, na níž by bylo nutné změnit v čase t cenu dodávky K, aby $f_t = 0$. Cena forwardu v okamžiku sjednání je proto rovna ceně dodávky($F_{t_0} = K$).

2.1.1 Oceňování forwardů

Při oceňování forwardů využijeme model *cost of carry (model čistých přenosových nákladů)*. Tento model vychází ze okamžité (spotové) ceny podkladového aktiva a k datu splatnosti eliminuje arbitrážní zisk. Nejprve si ukážeme oceňování některých speciálních forwardů a pak odvodíme obecnou formuli. Použijeme značení uvedené v předchozím odstavci a doplníme jej o bezrizikovou úrokovou míru r. Vztahy budeme odvozovat stejně jako T. Cipra [1] a J.C. Hull [4].

Forward na bezkuponový dluhopis

Jak napovídá název, je podkladovým aktivem tohoto forwardu bezkuponový dluhopis. Za účelem ocenění tohoto jednoduchého forwardu uvažujme dvě portfolia:

1. portfolio obsahující bezkuponový dluhopis s nominální hodnotou K.
2. portfolio obsahující dlouhou pozici ve forwardovém kontraktu na bezkuponový dluhopis uvažovaný v prvním portfoliu a finanční obnos ve výši $K \cdot e^{-r(T-t_0)}$.

Obě portfolia budou mít k datu splatnosti T stejnou hodnotu, protože finanční obnos v 2. portfoliu se zhodnotí na částku K, cenu dodávky jednoho bezkuponového dluhopisu. Za předpokladu eliminace arbitrážní příležitosti budou mít obě portfolia stejnou hodnotu i v čase t:

$$S_t = f_t + K \cdot e^{-r(T-t)}.$$

Potom je tedy hodnota forwardu

$$f_t = S_t - K \cdot e^{-r(T-t)}. \tag{2.1}$$

Vidíme, že v době sjednání forwardu, kdy $f_{t_0} = 0$, platí

$$F_{t_0} = K = S_{t_0} \cdot e^{r(T-t_0)}. \tag{2.2}$$

Forward na kuponový dluhopis

Ocenění forwardu na dluhopis s pevným výnosem je jednoduchým rozšířením předchozího případu. Označme si jako V_t hodnotu v čase t těch kuponů, které jsou vyplaceny od času t do splatnosti forwardu. Pro výpočet V_t použijeme příslušné bezrizikové úrokové míry. Opět uvažujme dvě portfolia:

1. portfolio obsahující dlouhou pozici ve forwardu a finanční obnos $K \cdot e^{-r(T-t)}$
2. portfolio obsahující kuponový dluhopis s okamžitým reinvestováním kuponů do téhož dluhopisu a přijatý úvěr ve výši V_t při bezrizikové úrokové míře r.

V čase T mají portfolia stejnou hodnotu, protože výnosy dluhopisu v portfoliu (2) zaplatí přijatý úvěr. Analogicky jako u bezkuponového dluhopisu v čase t platí

$$S_t - V_t = f_t + K \cdot e^{-r(T-t)}.$$

Odtud vyjádříme hodnotu dlouhé pozice ve forwardu v čase t

$$f_t = S_t - K \cdot e^{-r(T-t)}. \tag{2.3}$$

Speciálně pro datum sjednání dostáváme

$$F_{t_0} = K = (S_{t_0} - V_{t_0}) \cdot e^{r(T-t_0)}. \tag{2.4}$$

Forward na akcii

V tomto odstavci budeme uvažovat, že dividendy můžeme ve spojitém čase modelovat pomocí konstantní roční dividendové intenzity d vztažené k ceně akcie. Dividendový výnos budeme reinvestovat do téže akcie, čímž se nám akcie za čas $T-t$ zhodnotí na $S_t \cdot e^{d(T-t)}$. Pro výpočet hodnoty forwardu uvažujme následující portfolia:

1. portfolio složené z dlouhé pozice ve forwadovém kontraktu a finanční prostředky ve výši $K \cdot e^{-r(T-t_0)}$
2. portfolio obsahující takový díl akcie, aby poměr jeho ceny k ceně akcie byl $e^{-d(T-t_0)}$. Dividendy ihned reinvestujeme do téže akcie.

Podobně jako v předchozích případech budou mít za předpokladu vyloučení arbitráže obě portfolia v čase T hodnotu jedné akcie. Potom tedy v čase t platí

$$S_t \cdot e^{-d(T-t)} = f_t + K \cdot e^{-r(T-t)}.$$

Odtud dostáváme hodnotu dlouhé pozice ve forwardovém kontraktu v čase t a cenu forwardu na počátku kontraktu

$$\begin{aligned} f_t &= S_t \cdot e^{-d(T-t)} - K \cdot e^{-r(T-t)}, &(2.5)\\ F_{t_0} &= K = S_{t_0} \cdot e^{(r-d)(T-t_0)}. &(2.6)\end{aligned}$$

Měnový forward

V případě forwardu na cizí měnu oceňovaného v domácí měně budeme postupovat analogicky. Zavedeme r_c jako bezrizikovou úrokovou míru cizí měny a r jako bezrizikovou úrokovou míru domácí měny. V tomto případě K a S_t neodpovídá ceně dluhopisu či akcie, ale směnnému kurzu pro nákup cizí měny. Vytvoříme dvě portfolia:

1. portfolio obsahuje dlouhou pozici ve forwardu a finanční částku v domácí měně ve výši $K \cdot e^{-r(T-t_0)}$
2. portfolio obsahuje finanční částku v cizí měně v takové výši, aby její poměr k ceně dodávky byl $e^{-r_c(T-t_0)}$.

Potom analogicky

$$f_t = S_t \cdot e^{-r_c(T-t)} - K \cdot e^{-r(T-t)}, \tag{2.7}$$
$$F_{t_0} = K = S_{t_0} \cdot e^{(r-r_c)(T-t_0)}. \tag{2.8}$$

FRA, forward na úrokovou míru

V případě FRA *(forward rate agreement)* je podkladovým aktivem úroková míra pro půjčování, či vypůjčování peněz na určitou dobu. FRA umožňuje zajistit pro určité budoucí období pevnou úrokovou míru namísto tržní. Ve skutečnosti nedojde k poskytnutí úvěru za danou úrokovou míru, ale subjekty mezi sebou pouze vyrovnají úrokový rozdíl mezi FRA-sazbou a tržní (referenční sazbou) i_{ref}.

Banky nabízí FRA pro určitá pevně daná období. Např. FRA_{6x12} označuje kontrakt na úrokovou sazbu na půlroční vklad/úvěr platnou za šest měsíců. FRA-sazba se ze $zero - coupon$ sazeb vypočítává tak, aby nebyla možná arbitráž. Uvažujme, že $t < T < T^*$. Označíme-li i_T jako bezrizikovou úrokovou míru v čase t se splatností v čase T, potom platí rovnost

$$1 + i_{T^*} \cdot (T^* - t)/360 = [1 + i_T \cdot (T - t)/360] \cdot [1 + i_{FRA} \cdot (T^* - T)/360].$$

Odtud dostáváme

$$i_{FRA}(t) = \frac{i_{T^*}(T^* - t) - i_T(T - t)}{1 + i_T(T - t)/360} \cdot \frac{1}{T^* - T},$$

Budeme-li uvažovat N jako nominální hodnotu kontraktu, potom kupující FRA zaplatí v čase T druhé straně platbu *(kompenzační platba)* ve výši

$$K_{FRA} = N \cdot \frac{(i_{ref} - i_{FRA}) \cdot (T^* - T)/360}{1 + i_{ref} \cdot (T^* - T)/360}.$$

Hodnotu dlouhé FRA pozice (toho, kdo koupil FRA) v čase $t \in (t_0; T\rangle$ určíme stejně jako v předchozích případech, tedy

$$N \cdot (i_{ref}(T) - i_{FRA}(t)) \cdot (T^* - T) \cdot e^{-r(T-t)} = f_t + N \cdot (i_{ref}(T) - i_{FRA}(t_0)) \cdot (T^* - T) \cdot e^{-r(T-t)},$$

odtud

$$f_t = N \cdot (i_{FRA}(t_0) - i_{FRA}(t)) \cdot e^{-r(T-t)}. \tag{2.9}$$

2.2 Futures

Futures jsou standardizované forwardové kontrakty. Ke standardizaci došlo za účelem možnosti obchodovat s nimi masově na burze. Standardizace přináší výhody, ale i nevýhody. Z kladných vlastností jmenujme zejména průběžné zúčtování zisků a ztrát v každý obchodní den a eliminaci rizika defaultu. Další výhodou je možnost odstoupit od sjednaného kontraktu jeho odprodejem na sekundárním trhu nebo vstupem do kontraktu v opačné pozici. Nevýhodou se může jevit omezení na standardizovaný typ a množství podkladového aktiva, standardizované datum splatnosti a kótování ceny.

Zmiňovaných výhod se dosahuje právě pomocí denního vyrovnávání zisků a ztrát. Cena futures se během obchodního dne mění. Zatímco majitel forwardu sleduje v průběhu trvání kontraktu pouze hypotetický zisk/ztrátu, u futures dojde na konci obchodního dne k fyzickému vyúčtování. Účtuje se tak, že subjektu v dlouhé pozici se navýší účet o rozdíl mezi cenou futures na konci aktuálního a předchozího obchodního dne. Denní ceny futures určuje *clearingový dům*, který také přerozděluje peníze mezi protistranami.

Standardizované ceně futures se také říká *kurz futures (termínový kurz),* zatímco aktuální cena podkladového aktiva se označuje jako *promptní (okamžitý) kurz*. Kurzem futures se stejně jako u forwardů rozumí cena podkladového aktiva, na kterou by se měla změnit původní cena, kdyby futures nyní měnil majitele. Kurz futures se většinou stanovuje relativně v procentech z nominální hodnoty kontraktu.

2.2.1 Oceňování futures

Vzhledem k tomu, že futures jsou standardizované forwardy, platí pro ně stejné principy. Vycházíme tady z okamžité ceny podkladového aktiva a k datu splatnosti eliminujeme arbitrážní zisk. V modelu počítáme s *čistými refinančními náklady* (tzn. náklady spojené se vstupem do určité pozice v termínovém kontraktu musí odpovídat nákladům, které by bylo nutné vynaložit na trhu k dosažení téhož výsledku). Ve skutečnosti vstupují do hry i očekávání trhu o budoucí ceně, likvidita trhu, volatilita okamžitého kurzu a struktura nabídky a poptávky. Výpočtem ceny futures F_t získáme *teoretický termínový kurz*, který se od skutečného většinou odlišuje. Setkáváme se proto s následujícími pojmy:

- *kurzová báze* vyjadřující skutečný rozdíl mezi okamžitým a termínovým kurzem

$$\textit{kurzová báze} = \textit{okamžitý kurz - skutečný termínový kurz}$$

- *carry báze* zohledňující čisté refinanční náklady mezi okamžitým a termínovým kurzem

$$\textit{carry báze} = \textit{okamžitý kurz - teoretický termínový kurz}$$

- *value báze* zohledňující tržní faktory odlišné od cost of carry faktorů

$$\textit{value báze} = \textit{teoretický termínový kurz - skutečný termínový kurz} = \\ = \textit{kurzová báze - carry báze}$$

Blížíme-li se k datu splatnosti futures, konvergují všechny báze k nule. Jinak bychom v okamžiku splatnosti mohli realizovat arbitrážní zisk. Ze vztahu $F_T = S_T$ vyplývá nulovost carry báze v okamžiku splatnosti. Dále je zřejmé, že nulovost kurzové a carry báze implikuje nulovost value báze. Před datem splatnosti rozlišujeme dvě situace:

- *nadsazení* termínového kurzu nad okamžitý kurz; kurzová báze zůstává před datem splatnosti záporná (okamžitý kurz je menší než skutečný termínový kurz)

- *zaostávání* termínového kurzu za okamžitým kurzem; kurzová báze zůstává kladná

Kapitola 3

Swapy

Swap představuje dohodu o budoucí výměně předem stanovených cash-flow mezi dvěma (či více) protistranami. Plnění tedy narozdíl od forwardů, futures nebo opcí není jednorázové, ale opakované. Podle charakteru peněžních toků rozlišujeme dvě základní kategorie swapů:

- *úrokové swapy (IRS - interest rate swap)*, v jejichž případě si protistrany vyměňují úrokové platby vztažené ke stejné nominální hodnotě (například pevný úrok oproti LIBORu). Nominální hodnota se stanovuje pouze pro určení výše plateb, nesměňuje se ani na počátku ani na konci swapu. Ve skutečnosti se nevyměňují ani úrokové platby, ale pouze se vyrovnávají úrokové rozdíly.

- *měnové swapy (CCS - cross curency swap)*, v jejichž případě si protistrany vyměňují platby v různých měnách (jak úrokové platby tak i nominální částky).

Pozn.: "LIBOR - London Interbank Offer Rate. LIBOR je aritmetickým průměrem úrokových měr z depozit nad 10 mil. GBP na určitou dobu, které nabízí v 11 hod. dopoledne londýnské referenční banky (běžně National Westmister, Bank of Tokyo, Deusche Bank, Banque Nationale de Paris a Morgan Guaranty Trust) londýnským clearingovým bankám. Velké banky platí za zdroje o něco méně než činí LIBOR a tyto zdroje půjčují se ziskem menším bankám. Malé banky půjčují prostředky podnikům, které platí určitou přirážku nad LIBOR. Široce akceptovaný LIBOR je výhodný, protože snad všechny úrokové míry krátkodobých a střednědobých úvěrů a půjček na euroměnovém trhu se stanovují na základě LIBOR. Úrokové míry pro splatnosti od jednoho dne (overnight) až po jeden rok pro všechny hlavní eurooměny denně publikuje Financial Times." [10]

3.1 Úrokové swapy

Motivací k uzavření úrokového swapu může být spekulace na vývoj úrokových měr nebo zajištění proti riziku úrokových měr přechodem na jinou úrokovou bázi. Úrokový swap lze využít pro získání úvěru (investice) při pevné úrokové míře, zatímco na trhu je subjekt schopen získat úvěr pouze při proměnlivé úrokové míře a naopak, případně lze využitím *komparativní výhody* získat levněji úvěr.

Na základě úrokových sazeb určujících výši peněžních toků (cash flows) ve swapu rozlišujeme:

- *fix-to-float swapy*, kdy jedna strana platí pevný úrok a druhá pohyblivou sazbu odvozenou od tržní sazby (nejčastěji LIBOR).
- *float-to-float swapy*, kdy obě strany platí pohyblivé sazby (rozdíl může být v druhu vyměňovaných sazeb, nebo v četnosti plateb, kdy jedna strana například platí dvakrát ročně pololetní LIBOR a druhá strana platí jednou ročně roční LIBOR)

Vztah mezi kupónovým dluhopisem a úrokovým swapem

Již jsme zmínili, že nominální hodnota (objem swapu, angl. notional amount) se ve swapovém kontraktu nevyměňuje. Zahrneme-li ovšem do peněžních toků i výměnu nominální hodnoty na konci kontraktu, hodnota swapu se nezmění. Díky této úpravě se můžeme na swap dívat jako na dvě dluhopisové pozice.

Pro názornou ukázku uvažujme tříletý swap uzavřený 1. února 2001. Firma A se zavazuje platit firmě B 5% p.a. z nominální hodnoty 1 milion EUR a firma B se zavazuje platit firmě A šestiměsíční LIBOR. Platby se realizují pololetně.

Pro ocenění swapu využijeme princip současné hodnoty sjednaných peněžních toků. K diskontování se obvykle používá LIBOR sazba, protože rizika spojená se swapem jsou stejná s riziky spojenými s půjčkou na bankovním trhu. Hodnotu swapu (z pohledu strany A) potom určíme jako rozdíl současných hodnot obou částí, tedy

$$f_t = PV_{A,t} - PV_{B,t},$$

kde PV_A je současná hodnota cash-flow přijímaného a PV_B cash-flow placeného. Pro potřeby výpočtu označme

PV_{fl}: současná hodnota dluhopisu s pohyblivou úrokovou mírou (PV_A)

PV_{fix}: současná hodnota dluhopisu s pevnou úrokovou mírou (PV_B)

Tabulka 3.1: Platby z pohledu firmy A

Datum	6M-LIBOR	Cash-flow obdržený	Cash-flow placený	čistý cash-flow
1. únor 2001	4,5%			
1. srpen 2001	4,8%	22 500	- 25 000	- 2 500
1. únor 2002	5,1%	24 000	- 25 000	- 1 000
1. srpen 2002	5,6%	25 500	- 25 000	+ 500
1. únor 2003	5,4%	28 000	- 25 000	+ 3 000
1. srpen 2003	5,6%	27 000	- 25 000	+ 2 000
1. únor 2004	5,7%	28 000	- 25 000	+ 3 000

t_i: doby do okamžiků, kdy dochází k výměně plateb ($1 \leq i \leq n$)

K: nominální hodnota

r_i: diskontní úroková míra pro období (t, t_i)

F: fixní platba v každém období

n: počet plateb do konce swapu.

Současnou hodnotu PV_{fix} spočítáme snadno jako

$$PV_{fix} = \sum_{i=1}^{n} F \cdot e^{-r_i t_i} + K \cdot e^{-r_n t_n}. \tag{3.1}$$

Zamysleme se nyní nad dluhopisem s pohyblivou úrokovou mírou. Ihned po datu platby je shodný s nově uzavřeným dluhopisem. Uvažujme, že se hodnota dluhopisu mezi platbami nemění a je stále rovna nominální hodnotě K. Bezprostředně před další platbou je hodnota rovna $K + k^*$, kde k^* je swapová platba, v této době již známá. Doba do další platby je t_1, proto hodnota dluhopisu dnes je jeho hodnota těsně před další platbou, diskontovaná mírou r_1 po dobu t_1, současná hodnota dluhopisu je proto rovna

$$PV_{fl} = (K + k^*)^{-r_1 t_1}. \tag{3.2}$$

Z uvedených rovnic dostáváme hodnotu swapu z pohledu firmy A jako

$$f_t = PV_{fl} - PV_{fix} = (K + k^*)^{-r_1 t_1} - \sum_{i=1}^{n} F \cdot e^{-r_i t_i} + K \cdot e^{-r_n t_n}. \tag{3.3}$$

Obecně platí, že při uzavření a na konci je hodnota swapu nulová. V průběhu života swapu může nabývat nenulových hodnot.

Vztah mezi swapem a FRA

Jiný pohled na swapy nabízí srovnání s forwardy na úrokovou míru. Připomeňme si, co je FRA (Forward Rate Agreement). FRA představuje dohodu mezi dvěma protistranami, jakou úrokovou míru aplikují v dohodnutém období na dohodnutý objem podkladového aktiva, přičšmž k datu splatnosti dojde k vyrovnání úrokového rozdílu mezi dohodnutou FRA sazbou a referenční sazbou. Odtud vidíme, že swap je vlastně portfolio různých FRA.

Cenu swapu v tomto případě určíme jako hodnotu portfolia těchto FRA. Jak jsme výše uvedli, sestavujeme swap tak, aby měl na počátku nulovou hodnotu. To však neznamená, že všechny FRA mají nutně nulovou hodnotu. Naopak, některé ji mají kladnou, jiné zápornou a navzájem se kompenzují.

Výpočet hodnoty swapu je následující:

1. Vypočítají se FRA-sazby pro všechna období swapu.
2. Spočítají peněžní toky swapu za předpokladu, že LIBOR-sazby se rovnají vypočteným FRA-sazbám.
3. Hodnotu swapu určíme jako současnou hodnotu těchto peněžních toků.

3.2 Měnové swapy

Měnový swap ve své nejjednodušší formě představuje výměnu nominální hodnoty a úrokových plateb v jedné měně za nominální hodnotu a úrokové platby v druhé měně. Nominální hodnoty se vyměňují na počátku a konci swapu. Jejich výši obvykle stanovíme tak, aby si za použití směnného kurzu platného na počátku swapu, přibližně odpovídaly.

Pro názornost uvažujme pětiletý měnový swap mezi firmou A a B sjednaný 1.února 1999. Společnost A platí B fixní úrok 8% p.a. v dolarech a získává fixní úrok 11% p.a. korunách. Platby probíhají jednou ročně a příslušné nominální částky činí 29 mil. CZK a 1 mil. USD. Tabulka 3.2 ukazuje peněžní toky z pohledu společnosti A.

Srovnání měnového swapu s dluhopisem

Na měnový swap můžeme podobně jako v případě úrokového nahlížet jako na dvě dluhopisové pozice. Hodnota swapu je na počátku kontraktu nulová. Jsou-li obě nominální částky v navzájem si odpovídající výši, potom je po jejich úvodní výměně hodnota swapu opět nulová. Uvažme situaci společnosti A v tabulce 3.2 krátce po první výměně.

Tabulka 3.2: Platby z pohledu firmy A

Datum	cash-flow v mil. USD	Cash-flow v mil. CZK
1. únor 1999	+ 1,00	- 29,00
1. únor 2000	- 0,08	+ 3,19
1. únor 2001	- 0,08	+ 3,19
1. únor 2002	- 0,08	+ 3,19
1. únor 2003	- 0,08	+ 3,19
1. únor 2004	- 1,08	+ 32,19

Vidíme, že je v krátké pozici v korunovém dluhopisu s úrokem 11% p.a. a v dlouhé pozici v dolarovém dluhopisu s úrokem 8% p.a.

Jestliže definujeme f_t jako hodnotu swapu v čase t vyjádřenou v domácí měně, kdy platíme úroky v cizí měně a dostáváme měnu domácí, potom

$$f_t = PV_D - S_0 \cdot PV_C. \tag{3.4}$$

Přičemž PV_D vyjadřuje současnou hodnotu korunového dluhopisu vyjádřenou v korunách, PV_C je hodnota dolarového dluhopisu vyjádřená v dolarech a S_0 označuje aktuální spotový směnný kurz (myšleno počet jednotek domácí měny za jednotku měny cizí).

Příklad 3.1: Vraťme se k situaci z tabulky 3.2 a uvažujme, že kontraktu zbývají tři roky života, LIBOR sazby jsou po celé tři roky konstantní ve výši 4% pro koruny a 6% pro dolary a aktuální kurz činí 31,25 CZK/USD. V tomto případě

$$\begin{aligned} PV_D &= 3,19 \cdot e^{-0,04\times 1} + 3,19 \cdot e^{-0,04\times 2} + 32,19 \cdot e^{-0,04\times 3} = \ 34\ 559\ 628 \text{ CZK}, \\ PV_C &= 0,08 \cdot e^{-0,06\times 1} + 0,08 \cdot e^{-0,06\times 2} + 1,08 \cdot e^{-0,06\times 3} = \ 1\ 048\ 386 \text{ USD}, \\ f_t &= 34\ 559\ 628 - 31,25 \cdot 1\ 048\ 386 = \ 1\ 797\ 546 \text{ CZK}. \end{aligned}$$

Na základě výpočtu vidíme, že pozice ve swapu je pro firmu A tři roky před koncem kontraktu zisková (zisk ve výši 1 797 546 CZK).

Dekompozice swapu na forwardové kontrakty

Měnový swap můžeme stejně jako úrokový swap rozložit na jednotlivé měnové forwardové kontrakty. Uvažme situaci z tabulky 3.2. V jednotlivých okamžicích plateb se firma A zavázala zaplatit 0,08 mil USD za přijmout 3,19 mil. CZK. Respektive na konci swapu zaplatit 1,08 mil USD a přijmout 32,19 mil. CZK. Každou tuto směnu lze reprezentovat jako měnový forwardový kontrakt. Hodnotu swapu potom snadno určíme jako součet hodnot těchto forwardů.

Příklad 3.2: Mějme stejnou situaci jako v příkladu 3.1. Aktuální směnný kurz činí 31,25 CZK/USD, dolarová LIBOR sazba 6% a korunová 4%. Použitím rovnice 2.8 snadno vypočteme příslušné forwardové směnné kurzy pro období za jeden, dva a tři roky.

$$
\begin{aligned}
31,25 \cdot e^{(0,04-0,06)\times 1} &= 30,631, \\
31,25 \cdot e^{(0,04-0,06)\times 2} &= 30,024, \\
31,25 \cdot e^{(0,04-0,06)\times 3} &= 29,430.
\end{aligned}
$$

Forwardové kontrakty oceníme za předpokladu, že vypočtené směnné kurzy budou realizovány. Hodnoty forwardů souvisejících s výměnami úroků jsou

$$
\begin{aligned}
(3\ 190\ 000 - 80\ 000 \times 30,631) \cdot e^{-0,04\times 1} &= 710\ 506 \text{ CZK}, \\
(3\ 190\ 000 - 80\ 000 \times 30,631) \cdot e^{-0,04\times 1} &= 727\ 440 \text{ CZK}, \\
(32\ 190\ 000 - 1\ 080\ 000 \times 30,631) \cdot e^{-0,04\times 1} &= 359\ 600 \text{ CZK}.
\end{aligned}
$$

Hodnota swapu z pohledu firmy A (dostává úroky v korunách a platí dolary) je rovna 710 506 + 727 440 + 359 600 = 1 797 546 CZK, což odpovídá výsledku výpočtu v příkladu 3.1.

Další příklady swapů

Swap ve své podstatě představuje výměnu peněžních toků závislých na jedné nebo více proměnných. Proto se setkáváme s dalšími typy swapů, nicméně pro jejich ocenění platí stejná pravidla, jako v předchozích částech.

V našich příkladech jsme uvažovali jako referenční sazbu jednoletý LIBOR, v praxi se však využívají i jiné pohyblivé úrokové míry, jako např. půlroční LIBOR nebo úrok státních pokladničních poukázek.

Nominální hodnota se nemusí být stálá po celou dobu swapu. Její výše se může snižovat podle předem dohodnutého scénáře *("amortizing" swapu)*, případně může narůstat *("step-up" swap)*. Další možností je posunutí první platby do určitého budoucího data *(odložený swap, forwardový swap)*.

V případě měnového swapu můžeme vyměňovat pevnou úrokovou sazbu v jedné měně oproti pohyblivé sazbě v měně jiné. Tato kombinace úrokového a měnového swapu je známá jako *cross-surrency swap.*

Dále se můžeme setkat s *extendable swapem*, v němž má jedna strana právo prodloužit život swapu. V případě *puttable swapu* má naopak jedna strana právo ukončit swap před koncem života. V případě *swaptions*, opcí na swapy, má jedna strana právo vstoupit do předem stanoveného *fix-to-float swapu*. O dalších typech swapů hovoří J.C.Hull [4].

Kapitola 4

Opce

Opce je kontrakt, který straně v dlouhé pozici *(držitel opce, kupující opce)* dává právo koupit *(call opce)* nebo prodat *(put opce)* v daný okamžik v budoucnosti *(evropská opce)* nebo kdykoliv do toho data *(americká opce)* dané podkladové aktivum za předem sjednanou cenu. Strana v krátké pozici *(upisovatel, prodávající opce)* se musí podřídit rozhodnutí držitele opce. Strany kontraktu nejsou na počátku vyrovnané, proto vstup do dlouhé pozice není bezplatný, ale realizuje se koupí opce za *opční prémii (cenu opce)*.

Rozhodování držitele opce v čase t se řídí rozdílem mezi realizační cenou opce X a tržní cenou podkladového aktiva S_t. Rozlišujeme tři stavy:

- opce je *na penězích (at-the-money)*, je-li realizační cena rovna ceně podkladového aktiva ($X = S_t$);
- opce je *v penězích (in-the-money)*, je-li realizační cena pro držitele opce výhodnější než cena podkladového aktiva ($X < S_t$ pro call opce a $X > S_t$ pro put);
- opce je *mimo peníze (out-of-money)*, je-li $X > S_t$ pro call a $X < S_t$ pro put.

Držitel opce pak má tři možnosti, jak se rozhodnout:

1. může opci uplatnit, tzn. skutečně koupit (resp. prodat) podkladové aktivum za realizační cenu,
2. může prodat opci a takto vyrovnat svou otevřenou dlouhou pozici podobně jako v případě futures,
3. může opci neuplatnit a nechat ji propadnout.

Akcie vyplácející spojitý dividendový výnos

V následujících odstavcích si předvedeme základní oceňovací modely opcí. Pro názornost budeme nejprve pracovat s opcí na akcii. Zamysleme se proto nad rozdílem mezi akcií vyplácející a nevyplácející dividendy. Obě akcie by měly vynést stejnou částku (dividendy a kapitálový výnos). Vyplácení spojité dividendy způsobuje pomalejsí růst ceny akcie. Jestliže stoupne cena akcie se spojitým dividendovým výnosem q z S_0 na S_T, potom v případě nevyplpácení dividendy by cena vzrostla z S_0 na $S_T \cdot e^{qT}$, respektive z $S_0 \cdot e^{-qT}$ na S_T. Toto pozorování nám ukazuje, že není rozdílu v praděpodobnostním rozdělení ceny akcie v čase T pro následující situace:

1. Akcie má v čase $t = 0$ cenu S_0 a vyplácí spojitý dividendový výnos q.
2. Akcie má v čase $t = 0$ cenu $S_0 \cdot e^{-qT}$ a nevyplácí žádnou dividendu.

Odtud dostáváme jednoduché pravidlo. Oceňujeme-li evropskou opci s maturitou v T a akcie vyplácí známou spojitou dividendu q, můžeme přejít z ceny S_0 na $S_0 \cdot e^{-qT}$ a oceňovat, jako by se jednalo o opci na akcii nevyplácející dividendy.

Vniřní a časová hodnota opce

Opční prémie (cena opce) se skládá ze dvou složek

$$\textit{cena opce} = \textit{vnitřní hodnota opce} + \textit{časová hodnota opce.}$$

Vnitřní hodnota opce v čase t je kladná část potenciálního zisku, který by plynul z okamžitého uplatnění opce. Závisí tedy na okamžité ceně podkladového aktiva S_t a realizační cenou X, její výše se pro call opce vyjádří jako $\max(0, S_t - X)$, resp. $\max(0, X - S_t)$.

Časová hodnota opce v čase t je odměna, kterou by byl držitel opce ochoten zaplatit upisovateliza potenciální možnost, že během doby do splatnosti se cena podkladového aktiva změní v jeho prospěch. S rostoucím t časová hodnota opce klesá (pravděpodobnost příznivé změny se s klesající dobou do splatnosti zmenšuje). Časová hodnota závisí na mnoha faktorech. Její hodnotu lze vyjádřit pouze aproximativně. S tímto problémem se nejlépe vypořádává Blackův-Scholesův vzorec, původně odvozený pro evropskou opci na akcii nevyplácející dividendy.

Omezení opční prémie

Pro opční prémii (cenu opce) C_t (resp. P_t) lze odvodit horní a dolní mez. K odvození využijeme předpoklady pro eliminaci arbitráže. Stejně jako v předchozích odstavcích využijeme spojité úročení.

Uvažujme *evropskou opci call na akcii nevyplácející dividendy*. Potom platí

$$\max(S_t - X \cdot e^{-r(T-t)}, 0) \leq C_t \leq S_t. \tag{4.1}$$

Nerovnosti $0 \leq C_t \leq S_t$ jsou zřejmé. Nerovnost $C_t \geq S_t - X \cdot e^{-r(T-t)}$ dokážeme jednoduše. Mějme 1. portfolio tvořené jednou akcií a 2. portfolio tvořené uvažovanou opcí a částkou $X \cdot e^{-r(T-t)}$. V čase T má 1. portfolio hodnotu S_T a 2. portfolio hodnotu $\max(S_T, X)$. Protože evropská opce nemůže být uplatněna předčasně a $S_T \leq \max(S_T, X)$, musí pro hodnoty portfolií i v čase t platit $S_t \leq C_t + X \cdot e^{-r(T-t)}$.

Nerovnosti pro *evropskou put opci na akcii nevyplácející dividendy* odvodíme analogicky

$$\max(X \cdot e^{-r(T-t)} - S_t, 0) \leq P_t \leq X \cdot e^{-r(T-t)}. \tag{4.2}$$

V případě, kdy akcie vyplácí dividendy, označíme D_t jako současnou hodnotu dividend D_{t_j} vyplácených v okamžicích $t_j \in (t, T)$. Potom na základě předchozích nerovností dostaneme vztahy i pro *evropskou call opci na akcii vyplácející dividendy*

$$\max(S_t - X \cdot e^{-r(T-t)} - D_t, 0) \leq C_t \leq S_t - D_t \tag{4.3}$$

a pro *evropskou put opci na akcii vyplácející dividendy*

$$\max(X \cdot e^{-r(T-t)} - S_t + D_t, 0) \leq P_t \leq X \cdot e^{-r(T-t)} + D_t. \tag{4.4}$$

Představme si nyní *americkou call opci na akcii nevyplácející dividendy*. Její opční prémie a tudíž i vztah (4.1) jsou shodné s odpovídající evropskou opcí, protože

- americká opce v sobě obsahuje jako speciální případ i odpovídající evropskou opci. Proto nemůže být cena americké opce nižší než cena evropské,
- kdyby cena americké opce byla vyšší než cena evropské, bylo by pro držitele výhodné opci předčasně uplatnit. Pro $t < T$ je ale podle nerovnosti (4.1) $C_t \geq S_t - X \cdot e^{-r(T-t)} > S_t - X$, kde $S_t - X$ je zisk z předčasného uplatnění opce, proto by bylo místo uplatnění výhodnější opci prodat. Možnost jejího předčasného uplatnění proto nepřináší žádnou výhodu.

Odlišná situace nastává pro *americkou put opci na akcii nevypláccející dividendy*. Její opční prémie může být i ostře větší než opční prémie odpovídající evropské opce. Předčasné uplatnění americké opce je totiž někdy výhodné. Částka X získaná předčasným uplatněním opce se během zbývající doby do splatnosti zhodnotí na částku $X \cdot e^{r(T-t)}$, která může být vyšší než $\max(S_T, X)$. Nerovnost (4.2) se tímto změní na

$$\max(X - S_t, 0) \leq P_t \leq X. \tag{4.5}$$

V případě americké opce na akcii vyplácející dividendu již ovšem neplatí, že bylo jednoznačně nevýhodné ji uplatnit předčasně. Za určitých podmínek může být například výhodné realizovat opci těsně před výplatou dividendy, pokud $D_{t_j} > X(1 - e^{-r(T-t_j)})$, $j = 1, \ldots, n$.

Put-call parita

Termínem *put-call parita* označujeme vztah mezi opčními prémiemi dvou navzájem si odpovídajících opcí put a call (tzn. stejné podkladové aktivum, stejná realizační cena, stejná splatnost).

Představme si dvě portfolia, první obsahuje akcii nevyplácející dividendy a evropskou opci put na tuto akcii; druhé portfolio tvoří částka $X \cdot e^{-r(T-t)}$ a evropská call opce na uvažovanou akcii. Obě portfolia mají v čase T stejnou hodnotu $\max(S_T, X)$. Opce jsou evropské a nemohou být uplatněny předčasně, proto musí mít i v čase t stejnou hodnotu a tedy platí rovnost $P_t + S_t = C_t + X \cdot e^{-r(T-t)}$.
Odtud dostáváme *put-call paritu pro evropské opce na akcii nevyplácející dividendy*

$$P_t = C_t + X \cdot e^{-r(T-t)} - S_t. \tag{4.6}$$

Analogicky se odvodí i vztahy pro *evropské opce na akcii vyplácející dividendy*:

$$P_t = C_t + X \cdot e^{-r(T-t)} - S_t + D_t. \tag{4.7}$$

Pro americké opce dostaneme nerovnosti:

$$S_t - X \leq C_t - P_t \leq S_t - X \cdot e^{-r(T-t)}, \tag{4.8}$$
$$S_t - X - D_t \leq C_t - P_t \leq S_t - X \cdot e^{-r(T-t)}. \tag{4.9}$$

4.1 Blackův-Scholesův vzorec

4.1.1 Evropská opce na akcii nevyplácející dividendy

Blackův-Scholesův vzorec vyjadřuje cenu opce jako matematickou funkci pěti proměnných: tržní ceny akcie S_t, realizační ceny opce X, doby do splatnosti opce $(T-t)$, volatility ceny akcie σ (míry průměrné výchylky od průměrného výnosu akcie) a bezrizikové úrokové míry r.

$$\begin{aligned} C_t &= S_t\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \\ P_t &= Xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1), \end{aligned} \tag{4.10}$$

kde $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce normálního rozdělení a

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_t/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Opční prémie vypočtená pomocí pomocí Blackova-Scholesova vzorce (4.10) se nazývá *teoretická opční prémie* a v praxi se využívá jako aproximace skutečné opční prémie. Blackův-Scholesův vzorec vychází ze tří základních předpokladů. Kromě předpokladu neexistence arbitráže je to předpoklad konstantní úrokové míry pro všechna období, konstantní volatility pro různé realizační ceny a předpoklad, že cena akcie vyhovuje modelu

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \tag{4.11}$$

kde μ je očekávaný růst nebo pokles ceny akcie v čase a $\varepsilon \sim N(0,1)$. Pro $\Delta t \to 0$ pak tento model přechází na zobecněný Wienerův proces

$$\mathrm{d}S = \mu S \mathrm{d}t + \sigma S \mathrm{d}W,$$

kde W je Wienerův proces. Podrobnější informace o odvození Blackova-Scholesova vzorce lze najít např. v [6].
Upravíme-li rovnici Wienerova procesu na tvar

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W,$$

lze aplikací Itôova lemmatu [2] odvodit, že

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N((\mu - \sigma^2/2)(T-t), \sigma^2(T-t)),$$

tzn. že logaritmický výnos akcie má logaritmicko-normální rozdělení.

4.1.2 Evropská opce na akcii vyplácející dividendy

Na začátku kapitoly jsme uvedli způsob, jak se snadno vypořádat s problematikou vyplácení spojité dividendy q. Aplikujme jej nyní do oceňovací formule, tzn. místo S_t budeme používat $S_t e^{-q(T-t)}$. Potom Blackova-Scholesova formule bude mít tvar

$$\begin{aligned} C_t &= S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2), \\ P_t &= X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-d_1), \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\text{kde} \qquad \begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_t/X) + (r - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

4.1.3 Evropské opce na měnu

Podkladovým aktivem opce na cizí měnu je spotový kurz dvou měn $S_t = S_{A,B}(t)$ (hodnota jednotky v měně B, vyjádřená v měně A). Předpokládejme, že se měnové kurzy S_t řídí stejným modelem jako ceny akcií vyplácejících dividendu. V tomto případě je dividendový výnos roven bezrizikové úrokové míře r_c v cizí měně. Za těchto předpokladů lze určit opční prémii pomocí vzorce

$$\begin{aligned} C_t &= S_t e^{-r_c(T-t)}\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \\ P_t &= Xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t e^{-r_c(T-t)}\Phi(-d_1), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\text{kde} \quad \begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_t/X) + (r - r_c + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Tato modifikace Blackova-Scholesova vzorce se nazývá *Garmanův-Kohlhagenův vzorec* [3].

4.1.4 Opce na futures

Opce na futures je možné sjednat pro jakýkoliv typ futures. Uplatněním opce call (resp. put) získá držitel opce dlouhou (resp. krátkou) pozici v příslušném futures kontraktu a finanční obnos ve výši rozdílu mezi cenou daného futures v okamžiku uplatnění opce a realizační cenou opce. Hodnota futures se uplatněním opce vynuluje, proto je možné hned po uplatnění opce získanou pozici ve futures bez jakéhokoliv vyrovnávání uzavřít.

K výpočtu opční prémie evropské opce na futures lze použít modifikovaný Blackův-Scholesův vzorec ve tvaru

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)} \cdot [F_t \cdot \Phi(d_1) - X \cdot \Phi(d_2)], \\ P_t &= C_t + e^{-r(T-t)} \cdot (X - F_t), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\text{kde} \quad \begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(F_t/X) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

a F_t je

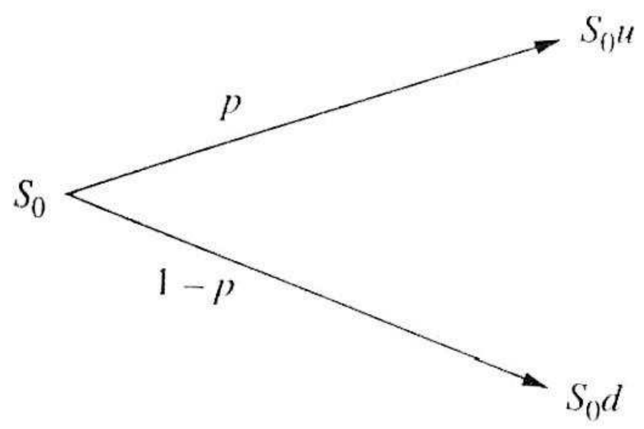
cena futures (kurs futures) v čase t a σ je volatilita ceny podkladového aktiva futures. Výše uvedené vztahy vyplývají z předchozích dosazením $S_t = F_t \cdot e^{-r(T-t)}$.

4.2 Binomické stromy

Vzorce z předchozí kapitoly lze použít pro opce uplatňované v okamžiku splatnosti, tedy evropské opce, respektive americké call opce na akcie nevyplácející dividendy, které se, jak jsme si již ukázali dříve, nevyplatí uplatnit předčasně. Ostatní druhy opcí se oceňují pomocí numerických procedur. V této kapitole se seznámíme s oceňováním za využití binomických stromů, jak je ve své knize prezentuje J.C.Hull [4].

Jak probíhá ocenění opce na základě binomických stromů si ukážeme na jednoduchém případě opce na akcii nevyplácející dividendy. Začneme tím, že "dobu života opce" rozdělíme na velké množství malých časových intervalů délky Δt. Dále budeme předpokládat, že v každém intervalu se cena akcie změní z počáteční hodnoty S_0 na jednu ze dvou nových hodnot S_0u a S_0d. Předpokládáme, že $u > 1$ a $d < 1$, a proto změně z S_0 na S_0u říkáme *nárůst ceny* a změně z S_0 na S_0d *pokles ceny.* Pravděpodobnost nárůstu ceny označíme p a pravděpodobnost poklesu $1 - p$.

Obrázek 4.1: Pohyb ceny akcie v binomickém stromu v časovém intervalu Δt



Binomické stromy jsou navrženy pro reprezentaci ceny akcie na rizikově neutrálním trhu (risk-neutral world). Proto můžeme předpokládat, že očekávaný výnos ze všech obchodů je bezriziková úroková míra (risk-free interest rate) a že budoucí cash-flows mohou být oceňovány diskontováním bezrizikovou úrokovou mírou.

4.2.1 Stanovení p, u a d

Parametry p, u a d se obvykle stanovují tak, aby výsledky byly ekvivalentní spojitému modelu, tedy střední hodnota a rozptyl změn v ceně akcie v průběhu intervalu délky

Δt byly shodné. Za tímto účelem se zaměřme na interval $(t, t + \Delta t)$. Postupujme stejně jako [9]. Ve spojitém, Blackově-Scholesově, modelu je podmíněné rozdělení $S_{t+\Delta t}$ za podmínky S_t logaritmicko-normální $\text{LN}(\ln S_t + (\mu - 1/\sigma^2)\Delta t, \sigma^2 \Delta t)$. V rizikově neutrálním světě se μ rovná bezrizikové úrokové míře r. Odtud dostáváme

$$E_c := E(S_{t+\Delta t}|S_t) = S_t e^{r\Delta t}.$$

V diskrétním binomickém modelu předpokládáme, že se cena akcie S_t změní na dvě nové hodnoty $S_t u$ nebo $S_t d$ s pravděpodobnostmi p a $1-p$. V tomto případě

$$E_b := E(S_{t+\Delta t}|S_t) = S_t(pu + (1-p)d).$$

Podmínka shodnosti střední hodnoty ($E_c = E_b$) říká

$$S_t e^{r\Delta t} = pS_t u + (1-p)S_t d, \tag{4.15}$$

respektive

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d. \tag{4.16}$$

Jak uvádí J.C.Hull [4], stochastický proces uvažovaný ve spojitém modelu pro cenu akcie implikuje, že rozptyl proporcionální změny v ceně akcie v malém časovém intervalu délky Δt je roven $\sigma^2 \Delta t$, viz vztah (4.11). Víme, že rozptyl náhodné veličiny X je definován jako $E(X^2) - [E(X)]^2$. Odtud

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = \sigma^2 \Delta t.$$

Dosazením p z rovnice (4.16) dostaneme

$$e^{r\Delta t}(u + d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t. \tag{4.17}$$

Rovnice (4.16) a (4.17) určují dvě podmínky pro p, u a d. Nejjednodušší třetí podmínku stanovili Jarrow a Rud, kteří položili $p = 1/2$. My zde odvodíme vzorce pro jinou podmínku, kterou navrhli Cox, Ross a Rubinstein, když položili

$$u = \frac{1}{d}.$$

Z těchto tří podmínek odvodíme

$$p = \frac{a-d}{u-d}, \tag{4.18}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{4.19}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{4.20}$$

kde a nazýváme *růstový faktor* (growth factor) a je vyjádřen jako

$$a = e^{r\Delta t} \tag{4.21}$$

Rovnice (4.18) a (4.21) splňují podmínku (4.16) přesně. Budeme-li v Taylorově rozvoji ignorovat vyšší mocniny Δt, potom

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t \qquad e^{2r\Delta t} = 1 + 2r\Delta t,$$
$$d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t \qquad e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t.$$

Odtud vidíme, že zanedbáme-li vyšší mocniny Δt, splňují rovnice (4.19) a (4.20) podmínku (4.17).

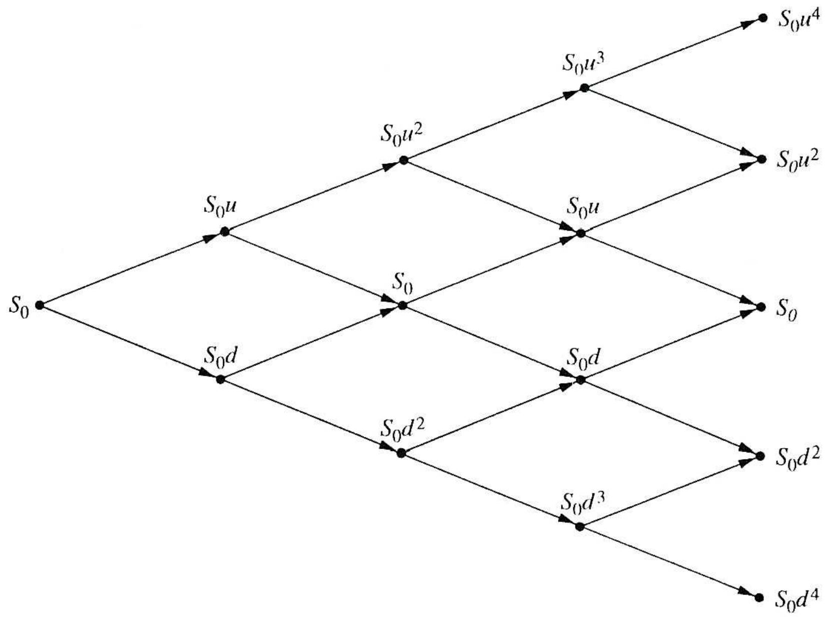
4.2.2 Práce s binomickým stromem

Na počátku je cena akcie rovna známé ceně S_0. V čase Δt máme dvě možnosti její ceny, S_0u a S_0d. V čase $2\Delta t$ máme tři možnosti, S_0u^2, S_0 a S_0d^2 a analogicky v dalších časech. Obecně máme v čase $i\Delta t$, $i+1$ variant ceny akcie, které jsou rovny

$$S_0u^jd^{i-j} \qquad j = 0, 1, \ldots, i.$$

Vzhledem k tomu, že předpokládáme $u = 1/d$, dostáváme, že nárůst a následný pokles ceny nás dovede na výchozí cenu akcie, tedy např. $S_0ud^2 = S_0d$.

Obrázek 4.2: Binomický strom zachycující cenu akcie



Opce se oceňují tak, že se začne na konci stromu (tedy v čase T) a procházíme stromem zpět proti času. Hodnotu opce v čase T známe. Pro call opci je to max($X -$

$S_T, 0)$ a pro put opci $\max(S_T - X, 0)$, kde S_T je cena akcie na trhu v čase T a X je realizační cena. Vzhledem k tomu, že předpokládáme existenci bezrizikového trhu, můžeme vyjádřit cenu opce v každém uzlu v čase $T-\Delta t$ jako očekávanou hodnotu opce v čase T diskontovanou úrokovou mírou r přes časový interval Δt. Analogicky vypočteme cenu opce ve všech uzlech v čase $T - 2\Delta t$ jako očekávanou cenu opce v čase $T - \Delta t$ diskontovanou úrokovou mírou r přes časový interval délky Δt. Stejným způsobem vypočteme hodnoty v dalších uzlech. V případě americké opce je nutné sledovat v každém uzlu, zda se opci vyplatí uplatnit nebo s uplatněním počkat do dalšího okamžiku. Nakonec tímto postupem vyjádříme cenu opce v čase 0.

4.2.3 Praktický výpočet

Výpočet si ukážeme na příkladu, který uvádí J.C.Hull [4]. Mějme pětiměsíční americkou put opci na akcii nevyplácející dividendy. Tržní cena akcie $S_0 = 50$ USD, realizační cena $X = 50$ USD, bezriziková úroková míra r činí 10% p.a. a volatilita ceny akcie σ je 40% p.a. Pro potřeby konstrukce binomického stromu, rozdělíme dobu života akcie na pět intervalů délky jednoho měsíce (=0,0833 roku). Potom $\Delta t = 0,0833$ a užitím rovnic (4.18) až (4.21) vypočteme

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1,1224 \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0,8909,$$

$$a = e^{r\Delta t} = 1,0084 \qquad p = \frac{a-d}{u-d} = 0,5073.$$

Obrázek (4.3) ukazuje binomický strom pro uvažovanou americkou put opci. V každém uzlu jsou dvě čísla, horní vyjadřuje cenu akcie v uzlu a dolní cenu opce v uzlu. Pravděpodobnost nárůstu ceny akcie je v každém uzlu 0,5073 a pravděpodobnost poklesu je pokaždé 0,4927. Cena akcie se v j-tém uzlu $(j = 1, 2, \ldots, i)$ v čase $i\Delta t(i = 1, \ldots, 5)$ vypočítá jako $S_0 u^j d^{i-j}$. Ceny opcí v posledních uzlech vypočítáme jako $\max(X - S_T, 0)$. Například v uzlu G je cena opce rovna $50 - 35,36 = 14,64$. Hodnotu opce v předposledních uzlech spočítáme z hodnot v posledních uzlech. Nejprve neuvažujeme možnost uplatnění opce. To znamená, že cena opce se vypočte jako současná hodnota očekávané ceny opce v následujícím kroku. Například v uzlu E je cena opce vypočtena jako

$$(0,5073 \times 0 + 0,4927 \times 5,45)e^{-0,10 \times 0,0833} = 2,66,$$

zatímco cena opce v uzlu A je vypočtena jako

$$(0,5073 \times 5,45 + 0,4927 \times 14,64)e^{-0,10 \times 0,0833} = 9,90.$$

Poté projdeme uzly a zkontrolujeme, zda je výhodné uplatnit opci předčasně. Například v uzlu E by uplatnění opce nepřineslo žádný zisk, neboť realizační cena se rovná ceně tržní. Z toho důvodu je vypočtená cena opce 2,66 správná. Naproti tomu v uzlu A uplatnění opce přinese zisk $50 - 39,69 = 10,31$. To je více než vypočtená hodnota 9,90, proto je správná hodnota opce v uzlu A rovna 10,31 USD. Analogicky vypočteme hodnoty ve zbývajících uzlech a nakonec vypočteme cenu opce na počátku.

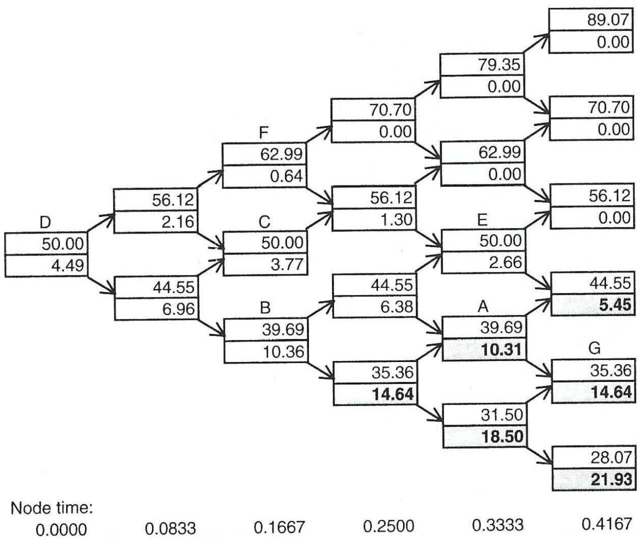
4.2.4 Algebraické vyjádření

Hodnoty opce je možné vyjádřit vzorcem. Představme si, že jsme držiteli americké put opce na akcii nevyplácející dividendy, jejíž doba do splatnosti je rozdělena na N intervalů délky Δt. Na j-tý uzel v čase $i\Delta t$ se budeme odkazovat jako na uzel (i, j) pro $(0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq i)$. Definujme $f_{i,j}$ jako hodnotu opce v uzlu (i, j). Cena akcie v tomto uzlu je rovna $S_0 u^j d^{i-j}$. Vzhledem k tomu, že hodnota opce na konci platnosti je $\max(X - S_T, 0)$, dostaneme

$$f_{N,j} = \max(X - S_0 u^j d^{N-j}, 0) \qquad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Pravděpodobnost přechodu z uzlu (i, j) v čase $i\Delta t$ do uzlu $(i+1, j+1)$ v čase $(i+1)\Delta t$ je p a pravděpodobnost přechodu do uzlu $(i+1, j)$ je $1-p$. Jestliže nebudeme

Obrázek 4.3: Binomický strom pro americkou opci na akcii nevyplácející dividendy, převzato z J.C. Hull [4]



brát v úvahu možnost předčasného uplatnění opce, dostaneme

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}] \qquad 0 \leq i \leq N-1 \qquad 0 \leq j \leq i.$$

Přibereme-li rozhodování o předčasném uplatnění opce, musíme porovnávat vypočtenou cenu $f_{i,j}$ s hodnotou získanou uplatněním opce, tedy

$$f_{i,j} = \max\{X - S_0 u^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]\}.$$

Tato rekurentní formule dává pro $\Delta t \to 0$ přesnou hodnotu americké put opce. V praxi, dle J.C. Hulla [4], dostáváme přijatelné výsledky pro $N = 30$. Jak však ukazuje Shaw [7], nemusí stačit ani několik set kroků.

4.2.5 Binomický strom pro další druhy amerických opcí

Binomický model pro opci na akcii nevyplácející dividendy můžeme poměrně snadno rozšířit na další druhy podkladových aktiv.

Začněme americkou opcí na akcii vyplácející dividendy. Předpokládáme-li růst ceny akcie vyjádřený spojitým výnosem r, potom spojitá dividendová platba q, kterou akcie přináší, způsobí snížení očekávaného růstu ceny akcie. Růst ceny akcie tedy nebude r ale $r - q$. Odtud dostaneme obměnu rovnic, které jsme odvodili pro akcii nevyplácející dividendy

$$Se^{(r-q)\Delta t} = pSu + (1-p)Sd,$$

$$e^{(r-q)\Delta t} = pu + (1-p)d,$$

$$e^{(r-q)\Delta t}(u+d) - ud - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t.$$

Na základě postupu z kapitoly 4.2.1 čtenář snadno sám dokáže, že vztahy pro výpočet p, u a d zůstávají v platnosti i v tomto případě, přičemž $a = e^{(r-q)\Delta t}$. Potom, vezmeme-li v úvahu nové a, můžeme použít proceduru z předchozí části.

Pro potřeby výpočtu Blackovy-Scholesovy formule jsme předpokládali, že akciové indexy, směnné kurzy a futures kontrakty se chovají stejně jako akcie vyplácející dividendy. V případě akciových indexů je příslušným dividendovým výnosem dividendový výnos portfolia akcií v indexu zahrnutých. Pro měnové kurzy rozumíme dividendovým výnosem bezrizikovou úrokovou míru cizí měny a v případě futures kontraktů je to vnitřní bezriziková úroková míra. Přijmeme-li tento předpoklad, můžeme využít binomické stromy i pro americké opce na tato podkladová aktiva.

4.2.6 Další numerické metody a vylepšení

Vylepšení binomického modelu

Předpoklad konstantní úrokové míry se může zdát nevyhovující. Vylepšení v tomto směru přináší zavedení časové závislosti úrokových měr. Jako úrokovou míru pro budoucí intervaly můžeme použít forwardové úrokové míry pro příslušné časové intervaly.

Při konstrukci binomického stromu jsme zavedli podmínku $u = 1/d$. Místo toho můžeme předpokládat, že pravděpodobnosti nárůstu a poklesu ceny jsou stejné, tedy $p = 0,5$. Z tohoto předpokladu můžeme odvodit

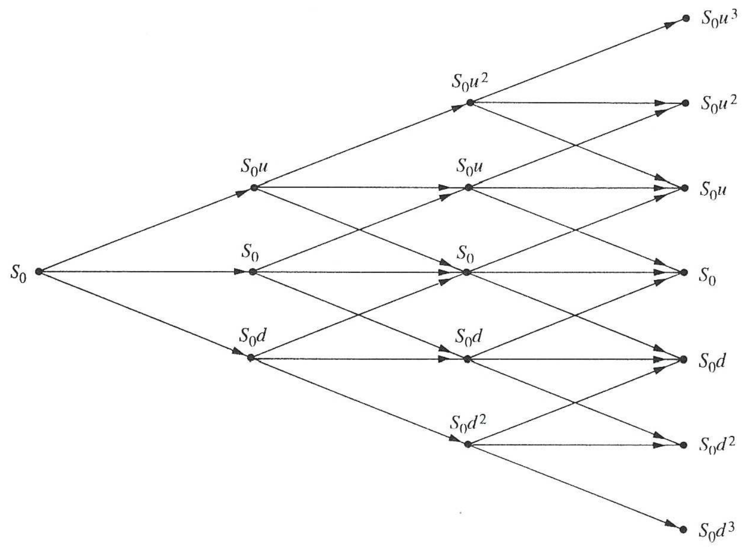
$$\begin{aligned} u &= e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}, \\ d &= e^{r-\sigma^2/2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \end{aligned}$$

kdy zanedbáváme vyšší mocniny Δt.

Trinomické stromy

Přidáme-li v binomickém stromu ještě jednu alternativu pohybu ceny akcie a to její setrvání na stejné hodnotě, dostaneme tzv. *trinomické stromy*. Vývoj trinomického stromu ukazuje obrázek (4.4).

Obrázek 4.4: Trinomický strom



Pro akcii nevplácející dividendy dostaneme za dodržení podmínky na střední hodnotu a rozptyl změny ceny akcie následující rovnice

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}, \\
d &= \frac{1}{u}, \\
p_d &= -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}, \\
p_m &= \frac{2}{3}, \\
p_u &= \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{1}{6},
\end{aligned}
$$

kde p_u je pravděpodobnost nárůstu ceny, p_d poklesu ceny a p_m je pravděpodobnost setrvání ceny na stejné hodnotě.

Pro akcie vyplácející spojitou dividendu q nahradíme r stejně jako v případě binomických stromů za $r-q$. Cenu opce vypočteme analogicky jako v případě binomických stromů. Více informací o trinomických stromech čtenář nalezne v [4].

Simulace Monte-Carlo

Další způsob, jak určit opční prémii nabízejí simulační metody Monte-Carlo. Předpokládejme, že cena finančního derivátu závisí pouze na ceně podkladového aktiva S a poskytuje platbu v čase T. Potom lze princip těchto metod shrnout do pěti kroků

1. Vygenerujeme cenu S v čase T.
2. Spočítáme platbu vyplývající z finančního derivátu.
3. Budeme opakovat kroky (1) a (2), abychom dostali dostatečné množství očekávaných plateb.
4. Spočteme průměr hodnot získaných v kroku (3).
5. Tento průměr diskontujeme do současnosti.

Více informací o tom, jak generovat vývoj ceny S v čase a o metodách Monte-Carlo čtenář nalezne v [5] a [4].

Kapitola 5

Analýza reálných dat

V této kapitole si předvedeme, jak výše uvedené postupy použít v praxi při analýze reálných dat. Analyzovaným finančním derivátem bude evropská put opce na index. Sledovaným indexem je DJ Euro Stoxx 50, realizační cena opce je 3500 a splatnost opce 20.1.2006. Index DJ Euro Stoxx 50 zahrnuje padesátku akcií předních společností eurozóny. Index obsahuje například akcie společností Nokia, Siemens, Deutsche Bank, Allianz, Ahold nebo Volkswagen.

5.1 Vstupní data

Část vstupních dat poskytlo finanční oddělení Allianz pojišťovny. Získali jsme časovou řadu vývoje hodnoty indexu DJ Euro Stoxx 50 a časovou řadu tržní ceny uvedené opce. Na internetových stránkách [11] můžeme nalézt soubor dat s volatilitou indexu DJ Euro Stoxx 50. Volatility jsou zde určeny pro každý obchodní den. Jelikož budeme cenu opce počítat pomocí Blackovy-Scholesovy formule, potřebujeme ještě bezrizikovou úrokovou míru. Již dříve jsme uvedli, že jako bezriziková úroková míra se v praxi používá LIBOR sazba. Ve výpočtech budeme používat LIBOR sazby zveřejněné na internetových stránkách British Bankers' Association [12].

K výpočtu ceny opce budeme používat Blackův-Scholesův vzorec ve tvaru:

$$\begin{aligned} P_t &= Xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1), \\ d_1 &= \frac{\ln(S_t/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad \text{a} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

kde $X = 3500$, σ je volatilita indexu a r je bezriziková úroková míra (LIBOR).

Výpočet provádíme v tabulkovém kalkulátoru MS Excel (soubor je součástí). Na listy "VSTOXX", "LIBOR" a "vstupy" umístíme do vyznačených polí vstupní data.

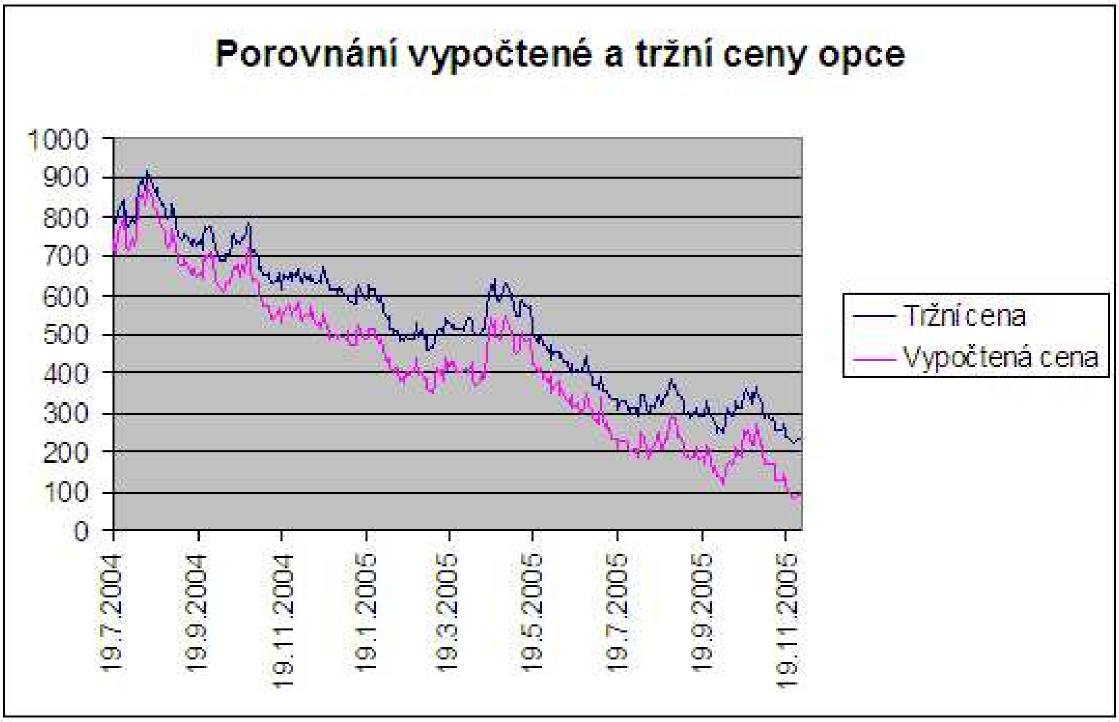
Na list calculate se automaticky přenáší potřebná data a ve sloupci Pt počítáme pomocí Blackova - Scholesova vzorce cenu evropské put opce. Na listu compare porovnáváme vypočtené hodnoty s reálnými.

5.2 Vyhodnocení výstupu

Pomocí Blackovy-Scholesovy formule jsme vypočítali teoretickou cenu opce. Jak vidíme na obrázku (5.1) vypočtená cena je menší než cena tržní. Nižší hodnota vypočtené ceny opce má několik vysvětlení:

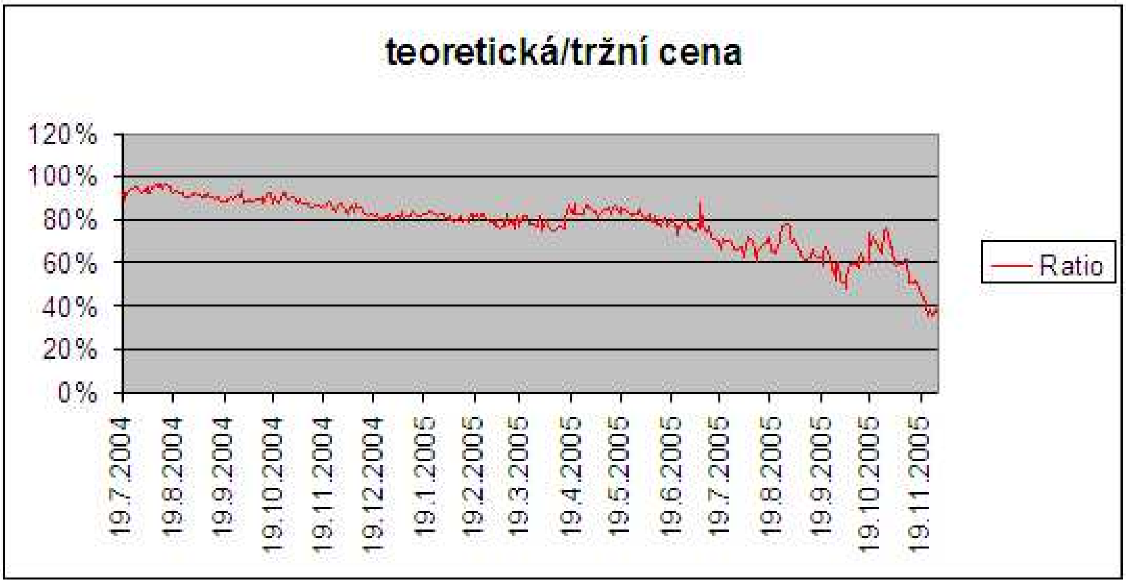
- Výpočet nezahrnuje přirážky k ceně opce (bezpečnostní přirážka, odměna pro bankovní dům apod.).
- Tržní cena opce zohledňuje očekávání investorů. Zvýšená poptávka způsobuje i růst ceny opce, který model nezachycuje.

Obrázek 5.1: Porovnání tržní a vypočtené ceny opce



Z grafu taktéž vidíme, že jak se v čase blížíme k datu splatnosti opce, rozdíl mezi vypočtenou a tržní cenou narůstá. Vypočtená cena opce klesá, zatímco tržní cena zůstává relativně vysoká. Graf (5.2) ukazuje, že na konci sledovaného období je vypočtená cena proti tržní ceně opce třetinová. Z těchto hodnot můžeme usoudit, že investoři očekávají významný pokles hodnoty indexu, protože jsou ochotni za zajištění proti poklesu hodnoty zaplatit vyšší cenu, než kolik bychom na základě výpočtu předpokládali.

Obrázek 5.2: Poměr teoretická cena/tržní cena opce



Výpočet poskytuje teoretickou cenu opce, díky níž můžeme získat zajímavé informace o tržní ceně opce, nicméně některé skutečnosti (významný rozdíl v ceně při blížícím se okamžiku splatnosti opce) zůstávají neznámé.

Kapitola 6

Závěr

V této práci jsme čtenáře seznámili s klasickými metodami oceňování finančních derivátů. Tam, kde to bylo možné, jsme odvodili vzorce, které umožňují výpočet ceny derivátu. Pro jednoduché typy opcí se nám taktéž podařilo odvodit vzorce pro výpočet opční prémie. Složitější situace nastala u amerických opcí, pro než jsme představili některé druhy simulačních metod umožňujících získat přibližnou cenu opce.

Další metody oceňování finančních derivátů, stejně jako metody oceňování tzv. exotických opcí čtenář nalezne v literatuře ([2], [4], [7] a [8]).

Jak ukázal praktický výpočet a srovnání s reálnými daty, situace na trhu neodpovídá vždy přesně našim očekáváním. Při aplikaci prezentovaných metod je proto nutné mít tento fakt stále na mysli a podrobně analyzovat příčiny těchto odchylek.

Literatura

[1] Cipra T.(2000): Matematika cenných papírů. Edice HZ, Praha.

[2] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J.(2002): Stochastic Modeling in Economics and Finance. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[3] Franěk P. a Janečková H.(2003): Finanční Matematika I. Seminář pro pracovníky BD ČNB, Praha.

[4] Hull J.C.(2000): Options, Futures and other Derivative Securities. 4^{th} ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River.

[5] Hurt J.(1982): Simulační metody. Skripta SPN, Praha.

[6] Mandl P., Šťástková M.(2003): Seminář z aktuárských věd 2002/03. MATFYZPRESS, Praha.

[7] Shaw W.(1998): Modeling Financial Derivatives with Mathematica. Cambridge University Press, Cambridge.

[8] Zhang P.(1997): Exotic options. World Scientific Publishing, London.

[9] www.karlin.mff.cuni.cz/∼hurt

[10] www.finance.cz

[11] www.stoxx.com

[12] www.bba.org.uk