

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko–fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Nina Klečková

Ocenění závazků  
z penzijního pojištění a připojištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jiří Fialka, PhD.

Studijní program: Matematika, Finanční a pojistná matematika

Na tomto místě bych ráda poděkovala RNDr. Jiřímu Fialkovi, PhD. za vedení diplomové práce, za cenné připomínky a za čas strávený na konzultacích.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 4. prosince 2005

Nina Klečková

*Nina Klečková*

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Penzijní připojištění</b>	<b>8</b>
2.1	Vývoj v České republice . . . . .	8
2.2	Penzijní plán . . . . .	9
2.2.1	Příspěvky . . . . .	9
2.2.2	Dávky . . . . .	10
2.2.3	Podíly na výnosech . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Klasifikace penzijních plánů</b>	<b>12</b>
3.1	Garance stejné ve všech penzijních plánech . . . . .	12
3.2	Penzijní fond Komerční banky, a.s. . . . .	13
3.2.1	Rozsah nabízených garancí a opcí . . . . .	13
3.2.2	Podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu . . . . .	14
3.2.3	Výpočet dávek . . . . .	14
3.2.4	Klasifikace smlouvy . . . . .	15
3.3	CREDIT SUISSE LIFE & PENSIONS PENZIJNÍ FOND, a.s. . . . .	16
3.3.1	Rozsah nabízených garancí a opcí . . . . .	16
3.3.2	Podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu . . . . .	17
3.3.3	Výpočet dávek . . . . .	17
3.3.4	Klasifikace smlouvy . . . . .	19
3.4	Allianz penzijní fond, a.s. (1) . . . . .	19
3.4.1	Rozsah nabízených garancí a opcí . . . . .	19
3.4.2	Podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu . . . . .	20
3.4.3	Výpočet dávek . . . . .	21
3.4.4	Klasifikace smlouvy . . . . .	22
3.5	Allianz penzijní fond, a.s. (2) . . . . .	23
3.5.1	Rozsah nabízených garancí a opcí . . . . .	23
3.5.2	Podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu . . . . .	24
3.5.3	Výpočet dávek . . . . .	24
3.5.4	Klasifikace smlouvy . . . . .	25

<b>4</b>	<b>Garantovaná důchodová opce</b>	<b>27</b>
4.1	Odvození vzorce . . . . .	27
4.2	Ohodnocení garantované důchodové opce . . . . .	36
4.3	Shrnutí . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>43</b>
	<b>Literatura</b>	<b>44</b>

**Název práce:** Ocenění závazků z penzijního pojištění a připojištění

**Autor:** Nina Klečková

**Katedra:** Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Vedoucí diplomové práce:** RNDr. Jiří Fialka, PhD.

**Abstrakt:** Tato diplomová práce se zabývá závazky z penzijního pojištění a připojištění. Shrnuje penzijní připojištění v České republice, popisuje vybrané penzijní plány a klasifikuje je mezi pojistné smlouvy a finanční instrumenty. Práce obsahuje popis garantované důchodové opce a odvození vzorce pro její ohodnocení. Odvození je založeno na jednofaktorovém Vašíčkově modelu. Zmíněna je i Dybvigova úprava Vašíčkova modelu. Součástí je příklad na ocenění závazku plynoucího z vložení garantované důchodové opce do produktu penzijního připojištění.

**Klíčová slova:** penze, jednorázové vyrovnání, technická úroková míra, garantovaná důchodová opce, call opce, dluhopis, deflátor

**Title:** Evaluation of Liabilities under Pension Insurance and Pension Additional Insurance

**Author:** Nina Klečková

**Department:** Department of Probability and Mathematical Statistics

**Supervisor:** RNDr. Jiří Fialka, PhD.

**Abstract:** This diploma thesis deals with liabilities under pension insurance and pension additional insurance. It sums up pension additional insurance in the Czech Republic. It describes chosen pension plans and it classifies the plans as an insurance contract or as an investment contract. The thesis contains description of guaranteed annuity option and derivation of option formula. The derivation is based on the one factor Vašíček model. Dybvig's adjustment of the Vašíček model is also mentioned. It includes an example for an evaluation of liability that follows from guaranteed annuity option.

**Key words:** pension, lump sum, technical interest rate, guaranteed annuity option, call option, bond, numeraire

# Kapitola 1

## Úvod

Penzijní fondy prodávají na českém pojistném trhu produkt, který je považován za spoření se státním příspěvkem. Jednotlivé penzijní plány přitom garantují doživotní penze, které jsou vypočítány podle různých algoritmů. Právě výpočtem penzí se penzijní plány výrazně odlišují. Garance dané účastníkům penzijního připojištění při sjednání smlouvy mohou mít velkou hodnotu, pokud se ocení reálnou hodnotou.

Mezinárodní účetní standardy klasifikují smlouvy prodávané pojišťovnami na pojistné smlouvy a finanční instrumenty. Produkty prodávané v České republice patří do obou těchto skupin.

V mnoha penzijních plánech se vyskytuje garantovaná důchodová opce, na jejímž základě garantuje penzijní fond účastníkovi převedení naspořených prostředků v doživotní penzi při pevně stanovené úrokové míře. V minulosti byla hodnota některých těchto opcí považována za zanedbatelnou. Později se ukázalo, že mohou vykazovat významné riziko pro pojišťovny.

Předmětem diplomové práce bylo popsat penzijní připojištění v České republice, garance, opce a způsob výpočtu dávek ve vybraných penzijních plánech a jejich klasifikace mezi pojistné smlouvy a finanční instrumenty. Práce se zaměřuje na garantovanou důchodovou opci a na její ocenění založené na jednofaktorovém Vašíčkově modelu. Součástí této práce je příklad na vyčíslení závazků plynoucích z garantované důchodové opce.

V druhé kapitole je shrnuto penzijní připojištění v České republice, jeho vývoj a podrobnější popis obsahu penzijního plánu.

V kapitole 3 se zaměřujeme na popis čtyř vybraných penzijních plánů a na jejich následnou klasifikaci mezi pojistné smlouvy a finanční instrumenty. Popisujeme zejména rozsah nabízených garancí a opcí, podíl účastníka na výnosech

hospodaření penzijního fondu a způsob výpočtu dávek. Pro toto zhodnocení jsme vybrali penzijní plán Penzijního fondu Komerční banky, a.s., penzijní plán CREDIT SUISSE LIFE & PENSIONS PENZIJNÍHO FONDU, a.s. a dva penzijní plány Allianz penzijního fondu, a.s.

Kapitola 4 se zaměřuje na garantovanou důchodovou opci v produktech penzijního připojištění. Na začátku je stručný popis této opce, následuje postupné odvození vzorce pro ohodnocení garantované důchodové opce na základě jednofaktorového Vašíčkova modelu. Odvození je založeno na skutečnosti, že tato opce je podobná call opci na dluhopis, jehož kupóny odpovídají výši garantované penze. Popsána je také Dybvigova úprava Vašíčkova modelu. Vzorec pro ohodnocení opce je v další části použit na konkrétním případě. K výpočtům a uvedeným grafům byl použit program Microsoft Office Excel 2003.

# Kapitola 2

## Penzijní připojištění

Penzijní připojištění v České republice vzniklo jako doplňkový produkt státního důchodového systému na základě zákona č. 42/1994 Sb., o penzijním připojištění se státním příspěvkem, který nabyl účinnosti dne 21. března 1994. Bylo založeno na principu dobrovolnosti a individuálnosti spočívajícím ve smluvním vztahu účastník – penzijní fond.

Penzijní připojištění je provozováno penzijními fondy, což jsou právnické osoby se sídlem na území České republiky, které mají právní formu akciové společnosti a kterým Ministerstvo financí ČR udělilo povolení ke vzniku a činnosti. Ministerstvo financí vykonává dozor nad činností penzijních fondů, dozor se týká legislativní, povolovací, schvalovací a kontrolní činnosti.

### 2.1 Vývoj v České republice

Většina penzijních fondů obdržela povolení ke svému vzniku v průběhu prvních dvou let fungování penzijního připojištění, tedy v letech 1994 a 1995. Bylo uděleno 46 licencí. Během let se počet penzijních fondů snižoval. Úbytek počtu penzijních fondů byl zejména důsledkem slučování některých z nich. Cílem slučování byla úspora provozních nákladů, možnost vyšších výnosů a stabilita. Do konce roku 2001 zaniklo důsledkem likvidace 12 penzijních fondů, od té doby nebylo přistoupeno k další likvidaci.

Zájem občanů o penzijní připojištění během prvních dvou let jeho existence byl velký. Naproti tomu v letech 1997 a 1998 počet účastníků penzijního připojištění nezaznamenal významný nárůst. Až na základě zákona č. 170/1999 Sb. vzrostl



znovu zájem občanů o penzijní připojištění. Tento zákon poskytl motivační prvky formou valorizace státního příspěvku a daňových úlev pro účastníky a jejich zaměstnavatele. K 31. 12. 2003 měly penzijní fondy téměř 2,7 milionu klientů, což je 50 % práceschopné populace. Průměrná výše měsíčního účastnického příspěvku v roce 2003 činila 384 Kč a průměrný věk připojištěných v roce 2003 přesahoval 47 let.

Míra zapojení české populace v systému penzijního připojištění je srovnatelná se zeměmi jako je Německo nebo Nizozemsko. Avšak v porovnání s některými evropskými zeměmi nedosahujeme srovnatelné výše účastnického příspěvku a ani podílu zapojení mladší generace do produktu.

Ke dni 1. 1. 2005 mělo v České republice povolení k činnosti 11 následujících penzijních fondů: Allianz penzijní fond, a.s., CREDIT SUISSE LIFE & PENSIONS PENZIJNÍ FOND, a.s., ČSOB Penzijní fond Progres, a.s., člen skupiny ČSOB, ČSOB Penzijní fond Stabilita, a.s., člen skupiny ČSOB, Generali penzijní fond, a.s., Hornický penzijní fond Ostrava, a.s., ING Penzijní fond, a.s., Penzijní fond České pojišťovny, a.s., Penzijní fond České Spořitelny, a.s., Penzijní fond Komerční banky a.s. a Zemský penzijní fond, a.s.

## 2.2 Penzijní plán

Penzijní plány jsou v ČR sestavovány jako příspěvkově definované. Výše penze v nich závisí na úhrnu příspěvků zaplacených ve prospěch účastníka, podílu účastníka na výnosech hospodaření penzijního fondu a věku, od kterého se penze poskytuje. Pouze invalidní penze může být za určitých podmínek stanovených zákonem definována dávkově.

Penzijní plán stanovuje vše o příspěvcích účastníků (jejich výše, pravidla a způsob placení, postup při neplacení a opožděném nebo nesprávném placení příspěvků, podmínky odkladu nebo přerušení placení příspěvků a změny jejich výše), dávkách (jejich druh, podmínky nároku na dávky a způsob výpočtu jejich výše) a podílu účastníků na výnosech hospodaření penzijního fondu. Penzijní plán přitom musí respektovat omezení daná zákonem.

### 2.2.1 Příspěvky

Výše **příspěvku účastníka** se stanoví na kalendářní měsíc v minimální výši 100 Kč, horní mez výše příspěvku není určena. Účastník nemůže platit příspěvek

na penzijní připojištění současně u více penzijních fondů. Za účastníka může platit příspěvek nebo jeho část třetí osoba. Na příspěvek placený zaměstnavatelem se neposkytuje státní příspěvek. Část příspěvku účastníka musí být určena na starobní penzi.

**Státní příspěvky** se poskytují ze státního rozpočtu ve prospěch účastníka. Účastníkovi s řádně zaplaceným příspěvkem náleží na každý měsíc jeden státní příspěvek. Výše státního příspěvku je stanovena zákonem podle měsíční výše příspěvku účastníka.

## 2.2.2 Dávky

Z penzijního připojištění se poskytují následující dávky:

(1) **Penze**, což je pravidelná výplata peněžní částky. Jde-li o pozůstalostní penzi, peněžní částka je vyplácena po dobu stanovenou penzijním plánem. Ostatní penze jsou vypláceny doživotně. Mohou být poskytovány tyto penze:

- **starobní penze**, podmínkou nároku na starobní penzi je dosažení věku stanoveného penzijním plánem a placení příspěvku po dobu stanovenou penzijním plánem, která musí respektovat omezení daná zákonem;
- **invalidní penze**, podmínkou nároku na invalidní penzi je přiznání plného invalidního důchodu z důchodového pojištění a placení příspěvku po dobu stanovenou penzijním plánem, která musí respektovat omezení daná zákonem;
- **výsluhová penze**, podmínkou nároku na výsluhovou penzi je placení příspěvku po dobu stanovenou penzijním plánem, která musí respektovat omezení daná zákonem;
- **pozůstalostní penze**, podmínkou nároku na pozůstalostní penzi je úmrtí účastníka a placení příspěvku po dobu stanovenou penzijním plánem, která musí respektovat omezení daná zákonem.

Starobní, invalidní a výsluhová penze náleží pouze účastníkovi. Pozůstalostní penze náleží fyzické osobě, kterou určil účastník ve smlouvě.

(2) **Jednorázové vyrovnání** lze vyplatit místo penze za podmínek určených penzijním plánem. Výše jednorázového vyrovnání se stanoví jako úhrn příspěvků účastníka, státních příspěvků a podílu na výnosech hospodaření penzijního fondu odpovídajícího výši příspěvků účastníka a státu po odečtení již vyplacených dávek.

(3) **Odbytné** podle zákona náleží:

- účastníkovi, který zaplatil příspěvky alespoň za 12 kalendářních měsíců, jehož penzijní připojištění zaniklo výpovědí nebo dohodou, není mu vyplácena penze a nedošlo k převodu příslušných prostředků do penzijního připojištění u jiného fondu;
- fyzickým osobám určeným ve smlouvě, pokud účastník zemřel a nebyla mu vyplácena penze nebo jednorázové vyrovnání a nevznikl nárok na pozůstatní penzi.

Výše odbytného se stanoví jako úhrn příspěvků účastníka a podílu na výnosech hospodaření penzijního fondu odpovídajícího výši zaplacených příspěvků.

### **2.2.3 Podíly na výnosech**

Podle zákona musí penzijní fond rozdělovat zisk tak, že nejméně 5 % připadá do rezervního fondu a nejvíce 10 % se rozděluje podle rozhodnutí valné hromady. Zbylá část se použije ve prospěch účastníků a osob, jejichž penzijní připojištění zaniklo v roce, za který se zisk rozděluje.

# Kapitola 3

## Klasifikace penzijních plánů

Jednotlivé penzijní plány nabízejí různý rozsah garancí a opcí. Zejména výpočet penzí je oblast, kde se penzijní plány výrazně odlišují. Garancemi a opcemi v penzijních plánech se rozumí možnost volby mezi jednorázovým vyrovnáním a penzí, garance technické úrokové míry, garance úmrtnostních tabulek, nabízených druhů penzí a výše vyplácené penze, garance krytí nákladů, možnost navýšení příspěvků, garance odbytného a možnost převodu účtu penzijního připojištění.

V této kapitole budeme posuzovat rozsah nabízených garancí a opcí ve vybraných penzijních plánech a podle mezinárodních účetních standardů klasifikovat jednotlivé penzijní plány na pojistné a finanční smlouvy. Popíšeme také, jakým způsobem a v jaké výši je účastníkům připisován podíl na výnosech hospodaření penzijních fondů, a způsob výpočtu dávek.

### 3.1 Garance stejné ve všech penzijních plánech

**Garance krytí nákladů:** Náklady na chod penzijního fondu přibližně odpovídají 1 % výnosu z investic všech prostředků, které penzijní fond získá od klientů a státu. Proto garantuje-li penzijní fond např. 3 % technickou úrokovou míru, musí být jeho výnos alespoň 4 %, aby pokryl náklady fondu a podíly na výnosech hospodaření připadající účastníkům. Čím větší má penzijní fond kmen, tím menší procento výnosu z hospodaření na pokrytí nákladů potřebuje (ekonomie z rozsahu). Tento pokles nejde k nule, jisté procento je potřeba vždy.

**Možnost převodu účtu penzijního připojištění:** Podle zákona má účastník, jehož penzijní připojištění zaniklo a jemuž nevznikl nárok na penzi a nebylo



vyplaceno odbytné, nárok převést prostředky evidované na svém osobním účtu do penzijního připojištění u jiného penzijního fondu, pokud s tím tento penzijní fond souhlasí.

## 3.2 Penzijní fond Komerční banky, a.s.

### 3.2.1 Rozsah nabízených garancí a opcí

Penzijní plán č. 3 Penzijního fondu Komerční banky, a.s. poskytuje tyto penze: penzi starobní, invalidní a výsluhovou, které jsou ve formě penze doživotní nebo penze doživotní se zaručenou dobou výplaty nebo penze doživotní spojené s nárokem na výplatu penze pozůstalostní a penzi pozůstalostní ve formě penzí dočasných. Zaručená doba výplaty doživotních penzí činí 10 let.

**Podmínky a vznik nároku na jednotlivé penze:** Nárok na starobní penzi vznikne účastníkovi, který platil příspěvky na tuto penzi nejméně 60 kalendářních měsíců a dosáhl věku 60 let nebo mu byl přiznán starobní důchod z důchodového pojištění. Nárok na invalidní penzi, byla-li sjednána, má účastník, kterému byl přiznán plný invalidní důchod z důchodového pojištění, jestliže platil příspěvky po sjednání této penze alespoň 36 kalendářních měsíců. Nárok na výsluhovou penzi, byla-li sjednána, má účastník, který platil příspěvky na tuto penzi alespoň 180 kalendářních měsíců. Penzijní plán rozlišuje tři typy pozůstalostní penze. Nárok na výplatu pozůstalostní penze typu A vznikne fyzické osobě při úmrtí účastníka, který platil příspěvky po sjednání této penze alespoň 36 kalendářních měsíců a kterému nebyla ještě vyplacena starobní nebo invalidní penze nebo jednorázové vyrovnání místo starobní nebo invalidní penze. Nárok na výplatu pozůstalostní penze typu B vznikne fyzické osobě při úmrtí účastníka, který pobíral některou doživotní penzi spojenou s nárokem na výplatu penze pozůstalostní. Nárok na výplatu pozůstalostní penze typu C vznikne fyzické osobě při úmrtí účastníka, který pobíral některou doživotní penzi se zaručenou dobou výplaty, přičemž zaručená doba výplaty penze dosud neuplynula.

**Možnost volby mezi jednorázovým vyrovnáním a penzí:** Nárok na jednorázové vyrovnání má účastník, který splnil podmínky pro vznik nároku na starobní, invalidní nebo výsluhovou penzi, nebo účastník, kterému je vyplácena některá doživotní penze, jestliže ukončil trvalý pobyt na území ČR.

**Garance odbytného:** Nárok na odbytné a jeho výše je dána zákonem.

**Možnost navýšení příspěvků:** Účastník může změnit výši svého příspěvku,

navýšení není shora omezené a změna je možná pouze do budoucna.

**Garance úmrtnostních tabulek:** Výše dávek doživotních penzí se stanoví podle pojistně matematických zásad s použitím aktuálních úmrtnostních tabulek Českého statistického úřadu (ČSÚ), zvláště pro muže a ženy. Aktuálními úmrtnostními tabulkami se myslí populační tabulky ČR, které jsou platné při zahájení výplaty penze.

**Garance technické úrokové míry:** Technická úroková míra není na počátku garantována. Při výpočtu penze se použije roční technická úroková míra stanovená podle uvážení penzijního fondu, která je platná na začátku výplaty penze.

### 3.2.2 Podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu

Podíl účastníka na výnosech hospodaření penzijního fondu, který je plátcem příspěvků, se určí jako součin průměrné denní výše stavu na jeho individuálním účtu za dané účetní období a celkové míry zhodnocení příspěvků účastníků dosažené penzijním fondem za dané účetní období. Účastníkům, kteří jsou příjemci penzí se podíly na výnosech hospodaření penzijního fondu vyplácejí jako součást penzí ve výši technické úrokové míry použité k výpočtu jejich penze.

Penzijní fond Komerční banky, a.s. rozdělil hospodářský výsledek za rok 2003 následujícím způsobem: 5 % připadlo do rezervního fondu, 88,08 % bylo připsáno účastníkům a zbylých 6,92 % se rozdělilo podle rozhodnutí valné hromady.

### 3.2.3 Výpočet dávek

Měsíční výše dávek starobní, invalidní a výsluhové penze se stanoví na základě příspěvkového principu a závisí na celkové výši finančních prostředků určených na příslušnou penzi, na formě účastníkem zvolené příslušné penze, pohlaví a věku účastníka, od kterého se penze poskytuje. Výše dávek pozůstalostní penze typu A závisí na celkové výši finančních prostředků a je vyplácena po sjednanou dobu nejméně 36 kalendářních měsíců. Pozůstalostní penze typu B je vyplácena po dobu 2 let ve výši příslušné doživotní penze zemřelého. Pozůstalostní penze typu C je vyplácena po zbytek zaručené doby ve výši příslušné doživotní penze zemřelého.

Výpočty garantují účastníkovi, který si zvolil výplatu doživotní penze, zhodnocení prostředků technickou úrokovou mírou použitou při výpočtu jeho penze. Zhodnocení odpovídající této úrokové míře vyplatí penzijní fond v každém případě.

### Vzorce pro výpočet:

Výše doživotní penze vyplácené měsíčně

$$P_1 = \frac{CPV}{12\ddot{a}_x^{(12)}},$$

kde  $\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{11}{24}$ .

Výše doživotní penze vyplácené měsíčně se zaručenou dobou výplaty po dobu 10 let

$$P_2 = \frac{CPV}{12[\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(12)} + {}_{10|}\ddot{a}_x^{(12)}]},$$

kde  $\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(12)} = \frac{1-v^{10}}{12(1-v^{1/12})}$ ,  ${}_{10|}\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{N_{x+10}}{D_x} - \frac{11}{24} \frac{D_{x+10}}{D_x}$ .

Výše doživotní penze vyplácené měsíčně s nárokem na výplatu pozůstalostní penze po dobu 2 let od úmrtí účastníka

$$P_3 = \frac{CPV}{12[\ddot{a}_x^{(12)} + \frac{M_x}{D_x}(1+v)]}.$$

Výše dočasné pozůstalostní penze vyplácené měsíčně po dobu  $n$  let

$$P_4 = \frac{CPV}{12\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(12)}}.$$

### Význam symbolů:

- $CPV$  celková výše prostředků, z nichž se stanovuje penze  
 $v$  diskontní faktor odpovídající roční technické úrokové míře  
 $x$  věk účastníka při přiznání penze  
 $D_x, M_x, N_x$  komutační čísla

## 3.2.4 Klasifikace smlouvy

Smlouva uzavřená mezi účastníkem a Penzijním fondem Komerční banky, a.s. je (podle Guidance on Implementing IFRS 4 Insurance Contracts, IG2, Contract type 1.6) od počátku pojistná smlouva, jelikož si účastník může po splnění nároku na doživotní penzi zvolit výplatu příslušné penze, která je vypočtena pomocí úrokové

míry běžné na začátku výplaty penze a pomocí úmrtnostních tabulek vydaných ČSÚ. Penzijní fond tedy nemá možnost bez omezení měnit způsob výpočtu penze. Účastníkovi jsou během spořicí fáze připisovány dodatečné podíly na zisku podle uvážení, discretionary participation feature (DPF).

DPF je smluvní právo účastníka získat dodatečné příjmy, které jsou pravděpodobně významnou součástí celkových smluvních příjmů, jejichž množství nebo načasování smluvně závisí na rozhodnutí penzijního fondu a které jsou smluvně založeny na zisku nebo ztrátě penzijního fondu.

### **3.3 CREDIT SUISSE LIFE & PENSIONS PENZIJNÍ FOND, a.s.**

#### **3.3.1 Rozsah nabízených garancí a opcí**

Z penzijního připojištění se podle penzijního plánu CREDIT SUISSE LIFE & PENSIONS PENZIJNÍHO FONDU, a.s., který byl schválen Ministerstvem financí dne 30. 8. 2002, poskytují tyto penze: starobní, výsluhová, invalidní a pozůstalostní.

**Podmínky a vznik nároku na jednotlivé penze:** Podmínkou pro vznik nároku na starobní penzi je splnění pojištěné doby nejméně 60 kalendářních měsíců a přiznání starobního důchodu z důchodového pojištění nebo dosažení věku účastníka nejméně 60 let. Nárok na výsluhovou penzi má účastník po uplynutí pojištěné doby 180 měsíců. Nárok na invalidní penzi vznikne, pokud je splněna pojištěná doba nejméně 36 kalendářních měsíců, pokud účastník prokázal, že mu byl přiznán plný invalidní důchod z důchodového pojištění, a pokud do zahájení výplaty penze nevznikl účastníkovi nárok na starobní penzi. Příjemci invalidní penze nemůže vzniknout nárok na starobní nebo výsluhovou penzi. Nárok na pozůstalostní penzi vznikne oprávněným osobám, zemřeli-li účastník, který měl sjednanu pozůstalostní penzi a který pobíral některou doživotní penzi nebo nebyl příjemcem penze a jeho pojištěná doba činila nejméně 36 kalendářních měsíců.

**Možnost volby mezi jednorázovým vyrovnáním a penzí:** Jednorázové vyrovnání náleží účastníkovi místo penze při vzniku nároku na penzi před zahájením její výplaty nebo v průběhu výplaty při ukončení trvalého pobytu účastníka na území ČR.

**Garance odbytného:** Nárok na odbytné a jeho výše je dána zákonem. Penzijní fond navíc garantuje odbytné účastníkovi, který nesplnil podmínky nároku na penzi, při zrušení penzijního fondu bez právního nástupce, pokud se penzijní



fond nedohodne s účastníkem na převedení prostředků do penzijního připojištění u jiného penzijního fondu.

**Možnost navýšení příspěvků:** Účastník má právo změnit výši svého příspěvku, navýšení příspěvku není shora omezené a změna je možná pouze do budoucna.

**Garance úmrtnostních tabulek:** Penzijní fond stanoví výše dávek doživotních penzí podle pojistně matematických zásad s použitím nejnovějších úmrtnostních tabulek populace ČR vydávaných ČSÚ.

**Garance technické úrokové míry:** Technická úroková míra není na počátku garantovaná. Při výpočtu penze se používá aktuální minimální výnosová míra schválená valnou hromadou.

### 3.3.2 Podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu

Podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu určený účastníkům se rozděljuje mezi jednotlivé účastníky včetně příjemců doživotních penzí. Tyto výnosy se rozdělují jednotlivým účastníkům podle objemu prostředků na jejich účtu v daném účetním období. Příjemci doživotních penzí se v době od zahájení výplaty penze do skončení očekávané doby výplaty penze stanovené při výpočtu penze podílejí na výnosech hospodaření penzijního fondu. Jejich penze je po připsání podílu na výnosech hospodaření přepočítána podle aktuálního stavu účtu účastníka. Pokud je stav účtu účastníka vyšší než nezbytný objem prostředků na budoucí výplaty penze, je přebytek na účtu účastníka využit k úpravě penze.

CREDIT SUISSE LIFE & PENSIONS PENZIJNÍ FOND, a.s. rozdělil hospodářský výsledek za rok 2003 následujícím způsobem: 5 % připadlo do rezervního fondu, 93,28 % bylo připsáno účastníkům a zbylých 1,72 % se rozdělilo podle rozhodnutí valné hromady.

### 3.3.3 Výpočet dávek

Výše doživotních penzí závisí na stavu účtu dané penze, na věku účastníka při zahájení výplaty penze a na minimální výnosové míře pro další roční období schválené valnou hromadou. Pozůstalostní penze vyplácená oprávněným osobám v případě úmrtí účastníka, který pobíral některou doživotní penzi, se vyplácí ve výši poslední penze po dobu 36 měsíců. Pozůstalostní penze vyplácená oprávněným osobám v případě úmrtí účastníka, který nebyl příjemcem penze a jeho pojištěná doba činila nejméně 36 měsíců, se stanoví z úhrnu všech prostředků na účtu

účastníka a závisí na smluvené době výplaty.

Výpočty dávek garantují zhodnocení prostředků na osobním účtu účastníka minimální výnosovou mírou platnou na počátku výplaty penze. Zhodnocení odpovídající této minimální výnosové míře vyplatí penzijní fond v každém případě. Je-li skutečné zhodnocení vyšší, je vzniklý přebytek zdrojem dalšího podílu na výnosech ve prospěch účastníků.

### Vzorce pro výpočet:

Očekávaný počet let výplaty doživotní penze v roce  $t_0$  (2001) pro věk  $x$

$$\begin{aligned} r_{x,t_0} &= 86,0 - 1,02x, & \text{pro } x < 60 \text{ let,} \\ r_{x,t_0} &= 74,0 - 0,82x, & \text{pro } 60 \leq x \leq 80 \text{ let,} \\ r_{x,t_0} &= \max(34,0 - 0,32x; 1), & \text{pro } x > 80 \text{ let.} \end{aligned}$$

Očekávaný počet let výplaty doživotní penze v kalendářním roce  $t$  pro věk  $x$

$$r_{x,t} = r_{x,t_0} \left[ 1 + \frac{e_{60,t-1} - e_{60,t_0}}{e_{60,t_0}} \min(0,00744x + 0,13; 0,732) \right].$$

Výše roční doživotní penze

$$\beta = \frac{VZ}{\ddot{a}_{r,n}},$$

kde  $\ddot{a}_{r,n} = \frac{1-v^{r_{x,t}}}{1-v} + v^{r_{x,t}}n_u.$

Výše roční pozůstalostní penze po zemřelém účastníkovi, který nebyl příjemcem penze

$$\beta = \frac{VZ}{\frac{n}{12}}.$$

Výše penze vyplácené měsíčně

$$\beta^{(12)} = \frac{\beta}{12}.$$

### Význam symbolů:

$VZ$	částka evidovaná na účtu účastníka ve prospěch příslušné penze
$e_{x,t}$	střední doba dožití ve věku $x$ , v kalendářním roce $t$ podle nejnovějších úmrtnostních tabulek populace ČR vydaných ČSÚ
$v$	diskontní činitel odpovídající aktuální minimální výnosové míře
$n_u$	počet roků výplaty pozůstalostní penze v případě úmrtí účastníka – příjemce

	penze
$n$	počet měsíců výplaty pozůstalostní penze v případě úmrtí účastníka ve spořicí fázi
$x$	věk účastníka ke dni přepočtu penze

### 3.3.4 Klasifikace smlouvy

Smlouva uzavřená mezi účastníkem a CREDIT SUISSE LIFE & PENSIONS PENZIJNÍM FONDEM, a.s. je (podle Guidance on Implementing IFRS 4 Insurance Contracts, IG2, Contract type 1.6) od počátku pojistná smlouva. Tato klasifikace je daná možností účastníka, který splní podmínky vzniku nároku na některou doživotní penzi, zvolit si výplatu příslušné penze, která je vypočtena pomocí fixní aktuální minimální výnosové míry a nejnovějších úmrtnostních tabulek vydaných ČSÚ. Penzijní fond tedy nemůže bez omezení měnit způsob výpočtu penze. DPF jsou účastníkovi připisovány na jeho účet během spořicí fáze a ve výplatní fázi v době od zahájení výplaty penze do skončení očekávané doby výplaty penze stanovené při výpočtu penze.

## 3.4 Allianz penzijní fond, a.s. (1)

V této podkapitole zhodnotíme penzijní plán Allianz penzijního fondu, a.s., který nabyl účinnosti dne 1. 5. 2001.

### 3.4.1 Rozsah nabízených garancí a opcí

Penzijní plán poskytuje tyto penze: penzi starobní, invalidní a výsluhovou, které jsou ve formě doživotní penze, doživotní penze s pozůstalostní penzí nebo doživotní penze se zaručenou dobou výplaty, a penzi pozůstalostní.

**Podmínky a vznik nároku na jednotlivé penze:** Nárok na starobní penzi má účastník, pokud mu byl přiznán starobní důchod z důchodového pojištění nebo dosáhl věku 60 let a doba placení příspěvků činila nejméně 60 kalendářních měsíců. Nárok na invalidní penzi má účastník, pokud mu byl přiznán plný invalidní důchod z důchodového pojištění a pojištěná doba činí nejméně 36 kalendářních měsíců. Nárok na výsluhovou penzi má účastník, pokud pojištěná doba činí nejméně 180 kalendářních měsíců. Nárok na pozůstalostní penzi má oprávněná osoba, pokud

účastník zemřel a nebyla mu vyplácena starobní penze nebo vyplaceno jednorázové vyrovnání místo starobní penze a uplynula pojištěná doba nejméně 36 kalendářních měsíců. Nárok na pozůstalostní penzi vzniká také v případě, že účastník, který měl sjednanou doživotní výplatu penze s pozůstalostní penzí, zemřel po zahájení výplaty penze anebo v případě, že účastník měl sjednanu doživotní výplatu penze se zaručenou dobou výplaty a zemřel před uplynutím sjednané zaručené doby. Doba výplaty pozůstalostní penze může být od 1 roku do 15-ti let.

**Možnost volby mezi jednorázovým vyrovnáním a penzí:** Nárok na jednorázové vyrovnání má účastník, který splnil podmínky nároku na penzi. Účastník obdrží jednorázové vyrovnání místo penze před zahájením její výplaty nebo při ukončení trvalého pobytu účastníka na území České republiky a dále v případě zrušení penzijního fondu bez právního nástupce.

**Garance odbytného:** Nárok na odbytné a jeho výše je dána zákonem. Tento penzijní fond garantuje odbytné také účastníkovi, který nesplnil podmínky nároku na penzi v době zrušení penzijního fondu bez právního nástupce a nedohodl se s penzijním fondem na převedení prostředků do penzijního připojištění u jiného penzijního fondu.

**Možnost navýšení příspěvků:** Účastník má právo změnit výši svého příspěvku, navýšení příspěvku není shora omezené. Tato změna je možná pouze do budoucna.

**Garance úmrtnostních tabulek:** Výše dávek doživotních penzí se stanoví podle pojistně matematických zásad s použitím aktuálních úmrtnostních tabulek ČSÚ, zvláště pro muže a ženy. Aktuálními úmrtnostními tabulkami se myslí populační tabulky ČR, které jsou platné při zahájení výplaty penze.

**Garance technické úrokové míry:** Při výpočtu penzí se použije roční pojistně technická úroková míra ve výši 0,03 p.a.

### 3.4.2 Podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu

Příspěvající účastníkům je podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu připisován na jejich účty. Účastníci, kteří jsou příjemci penzí, se na výnosech hospodaření penzijního fondu podílejí formou valorizace, podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu jim je připisován k úhrnu prostředků evidovaných ve prospěch příslušné penze. Penze vyplácené účastníkům jsou následně zvýšeny o tolik procent, o kolik aktuální stav prostředků evidovaných ve prospěch příjemců penzí po připsání podílu na výnosech hospodaření penzijního fondu převyšuje úhrn



prostředků stanovených ve prospěch příjemců těchto penzí.

Pokud by podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu určený účastníkům byl nižší než garantovaná technická úroková míra, rozdělil by se rovnoměrně mezi spořicí účastníky a příjemce penzí. Rozdíl mezi garantovanou technickou úrokovou mírou a podílem na výnosech by penzijní fond připsal příjemcům penzí ze svých zdrojů.

Allianz penzijní fond, a.s. rozdělil hospodářský výsledek za rok 2003 následujícím způsobem: 6,54 % připadlo do rezervního fondu, 83,46 % bylo připsáno účastníkům a zbylých 10 % se rozdělilo podle rozhodnutí valné hromady.

### 3.4.3 Výpočet dávek

Jednotlivé penze se stanoví na základě příspěvkového principu z úhrnu prostředků, které penzijní fond eviduje ve prospěch účastníka. Výše doživotních penzí závisí na pohlaví, věku, od kterého se penze vyplácí, a případně délce sjednané pozůstalostní penze nebo zaručené doby výplaty. Výše pozůstalostní penze závisí na době vyplácení této penze.

Uvedené výpočty dávek garantují zhodnocení prostředků na osobním účtu účastníka předem zaručenou technickou úrokovou mírou ve výši 3 % p.a. Zhodnocení, které odpovídá této technické úrokové míře, vyplatí penzijní fond v každém případě, tedy i pokud je skutečné zhodnocení nižší než zaručená technická úroková míra. Je-li skutečné zhodnocení vyšší než zaručená technická úroková míra, je vzniklý přebytek zdrojem dalšího podílu na výnosech ve prospěch účastníků.

#### Vzorce pro výpočet:

Výše doživotní penze s pozůstalostní penzí na  $r$  let

$$P_1 = \frac{K}{\frac{N_x}{D_x} + \ddot{a}_{\overline{r}|} \frac{M_x}{D_x}}.$$

Výše doživotní penze se zaručenou dobou výplaty po dobu  $s$  let

$$P_1 = \frac{K}{\frac{N_{x+s}}{D_x} + \ddot{a}_{\overline{s}|}}.$$

Výše pozůstalostní penze na  $r$  let, pokud účastník zemřel před vznikem nároku na výplatu penze

$$P_1 = \frac{K}{\ddot{a}_{\bar{r}|} + \frac{k(1-v_j) - (1-v_j^k)v_j^{12r-k}}{1-v_j^{12}}}$$

Výše příslušné penze vyplácené měsíčně předlůtně

$$P_t^m = P_t \frac{1-v_j}{1-v_j^{12}}$$

Výše prostředků, které penzijní fond eviduje ve prospěch účastníka na příslušnou penzi

$$H = P_t \left( \frac{N_{x+k}}{D_x} + \ddot{a}_{\bar{k}|} + \ddot{a}_{\bar{r}|} \frac{M_x}{D_x} \right),$$

kde  $k = s - e$ , je-li  $s - e > 0$ ,  
 $k = 0$ , jinak,  
 $r = 0$  nebo  $s = 0$ .

Výše prostředků, které penzijní fond eviduje ve prospěch pozůstalých osob po smrti účastníka po dobu trvání nároků na výplatu pozůstalostní penze

$$H = P_t (\ddot{a}_{\overline{(r-d)}|} + \ddot{a}_{\overline{(s-e)}|}),$$

kde buď  $r = 0$  nebo  $s = 0$ .

#### Význam symbolů:

- $x$  věk účastníka k datu příslušného výpočtu
- $d$  uplynulá doba výplaty pozůstalostní penze v letech
- $e$  uplynulá celková doba výplaty penze v letech
- $k$  doba mezi vznikem nároku na pozůstalostní penzi a vznikem nároku na její výplatu
- $v_j$  diskontní faktor odpovídající měsíční technické úrokové míře
- $D_x, M_x, N_x$  komutační čísla
- $K$  úhrnný objem naspořených příspěvků na příslušnou penzi
- $P_t$  výše příslušné roční penze v roce  $t$

### 3.4.4 Klasifikace smlouvy

Smlouvu uzavřenou mezi účastníkem a Allianz penzijním fondem, a.s. klasifikujeme (podle Guidance on Implementing IFRS 4 Insurance Contracts, IG2, Contract

type 1.6) od počátku jako pojistnou smlouvu, jelikož si účastník může po dosažení nároku na doživotní penzi zvolit výplatu příslušné penze, která je vypočtena pomocí úrokové míry garantované na počátku pojištění a pomocí úmrtnostních tabulek vydaných ČSÚ. Penzijní fond tedy nemůže změnit způsob výpočtu penze bez omezení. DPF jsou účastníkovi připisovány na jeho účet během spořicí i výplatní fáze.

## 3.5 Allianz penzijní fond, a.s. (2)

Nyní zhodnotíme penzijní plán Allianz penzijního fondu, a.s., který nabyl účinnosti dne 1. 10. 2004 a porovnáme jej s předchozím penzijním plánem.

### 3.5.1 Rozsah nabízených garancí a opcí

Penzijní plán poskytuje tyto penze: penzi starobní, invalidní, výsluhovou a pozůstalostní. Penze starobní, invalidní a výsluhové jsou ve formě penze doživotní, penze doživotní s pozůstalostní penzí, penze doživotní se zaručenou dobou výplaty, penze doživotní se sjednanou částkou pro případ smrti nebo penze doživotní s lineárně rostoucí výší.

**Podmínky a vznik nároku na jednotlivé penze:** Tyto podmínky jsou totožné s podmínkami předchozího penzijního plánu Allianz penzijního fondu, a.s. s výjimkou nároku na starobní penzi, který účastník má, pokud dosáhl věku 60 let a současně pojištěná doba činí nejméně 60 kalendářních měsíců.

**Možnost volby mezi jednorázovým vyrovnáním a penzí:** Nárok na jednorázové vyrovnání má účastník, který splnil podmínky nároku na penzi, místo penze před zahájením její výplaty a při zrušení penzijního fondu bez právního nástupce.

**Garance odbytného:** Nárok na odbytné zůstává vzhledem k předchozímu penzijnímu plánu Allianz penzijního fondu, a.s. nezměněn.

**Možnost navýšení příspěvků:** Účastník může měnit výši svého příspěvku, navýšení příspěvků není shora omezené a tato změna je možná pouze do budoucna.

**Garance úmrtnostních tabulek:** K výpočtu starobní, invalidní a výsluhové penze se použijí úmrtnostní tabulky ČSÚ projektované do budoucnosti na základě údajů z projekcí obyvatelstva ČR vydané ČSÚ ( $q_{x,rok}^{CSU}$ ). Ve výsledné hodnotě úmrt-

nosti je dále zahrnut sociální selekční faktor určený jako podíl skutečné a očekávané úmrtnosti aktivních účastníků s daným penzijním plánem ( $sf s_{x,rok}$ ) a medicínský selekční faktor ( $sf m_{x,rok}$ ), jehož hodnota spadá do intervalu [70%, 100%]. Pravděpodobnost úmrtí používaná pro výpočet doživotních penzí plyne z rovnice:  $q_{x,rok} = q_{x,rok}^{CSU} sf s_{x,rok} sf m_{x,rok}$ , kde  $rok$  značí kalendářní rok.

**Garance technické úrokové míry:** Technická úroková míra není na počátku garantovaná. Při výpočtu starobní, invalidní a výsluhové penze se použije aktuální technická úroková míra stanovená podle uvážení penzijního fondu.

### 3.5.2 Podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu

Podíl účastníka na výnosech hospodaření penzijního fondu je stejný jako u předchozího penzijního plánu Allianz penzijního fondu, a.s. Navíc se účastník, kterému je vyplácena penze, může rozhodnout, zda se mu podíl na výnosech hospodaření penzijního fondu připisuje formou valorizace nebo jednorázovou výplatou mimořádné penze.

### 3.5.3 Výpočet dávek

Jednotlivé penze se stanoví stejným způsobem jako v předchozím penzijním plánu Allianz penzijního fondu, a.s.

#### Vzorce pro výpočet:

Výše doživotní penze s pozůstalostní penzí na  $r$  let a výše doživotní penze se zaručenou dobou výplaty po dobu  $s$  let se vypočítají ze vzorce uvedeného v předchozím penzijním plánu Allianz penzijního fondu, a.s.

Výše doživotní penze se sjednanou částkou pro případ smrti

$$P_1 = \frac{K - PC \frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}}.$$

Výše doživotní penze s lineárně rostoucí výší

$$P_1 = \frac{K}{\frac{N_x}{D_x} + \frac{p}{100} \frac{S_x - N_x}{D_x}}.$$



Výše pozůstalostní penze na  $r$  let, pokud účastník zemřel před vznikem nároku na výplatu starobní penze

$$P_1 = \frac{K}{\ddot{a}_{\bar{r}|}}$$

Výše příslušné penze vyplácené měsíčně předlhučně

$$P_t^m = \frac{P_t}{12}$$

Výše prostředků, které penzijní fond eviduje ve prospěch účastníka na doživotní penzi s pozůstalostní penzí

$$H_t = P_t \left( \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} + \ddot{a}_{\bar{r}|} \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \right).$$

Výše prostředků, které penzijní fond eviduje ve prospěch účastníka na ostatní druhy penzí se vypočte obdobným způsobem.

#### **Význam symbolů:**

$PC$	sjednaná částka
$p$	sjednané procento ročního navýšení penze
$t$	pořadový rok vyplácení penze od počátku její výplaty
$S_x$	komutační číslo

Ve vzorcích jsou navíc použity symboly, které jsou vysvětleny v části 3.4.3.

### **3.5.4 Klasifikace smlouvy**

Smlouvu uzavřenou mezi účastníkem a Allianz penzijním fondem, a.s. podle penzijního plánu, který nabyl účinnosti 1. 10. 2004, klasifikujeme (podle Guidance on Implementing IFRS 4 Insurance Contracts, IG2, Contract type 1.7) na počátku jako finanční smlouvu s DPF, jelikož si účastník může po dosažení nároku na doživotní penzi zvolit výplatu příslušné penze, která je vypočtena pomocí fixní technické úrokové míry běžné na počátku výplaty penze. Smlouva se stane pojistnou smlouvou v případě, že si účastník zvolí výplatu doživotní penze. DPF jsou účastníkovi připisovány na jeho účet během spořicí i výplatní fáze.

Smlouvu na počátku klasifikujeme jako finanční smlouvu na základě předpokladu, že penzijní fond může přehodnotit úmrtnostní riziko bez omezení. Výpočet

doživotní penze totiž závisí na technické úrokové míře běžné v době výpočtu a na úmrtnostních tabulkách, které si, podle mého názoru, penzijní fond může pro jednotlivé roky libovolně stanovit.

# Kapitola 4

## Garantovaná důchodová opce

Garantovaná důchodová opce (guaranteed annuity option) je opce, na jejímž základě garantuje penzijní fond účastníkovi možnost převedení úhrnu naspořených prostředků v doživotní penzi. Je vypočtená pomocí pevně stanovené úrokové míry a je garantovaná, pokud účastník splní podmínky pro vznik nároku na penzi. Tato garance se vyskytuje v mnoha pojistných produktech a byla velmi populární v produktech penzijního připojištění v letech 1970 až 1990 ve Velké Británii, kdy byly dlouhodobé úrokové míry vysoké. S rostoucím rozdílem mezi garantovanou úrokovou mírou a tržní úrokovou mírou rostou penzijnímu fondu závazky plynoucí z této garance. Tyto garance ohrožovaly v devadesátých letech dvacátého století solventnost některých společností.

Garantovaná doživotní penze závisí na předpokládané úrokové míře a předpokládané úmrtnostní míře. Velký propad dlouhodobých úrokových měr v devadesátých letech dvacátého století, výrazné zlepšení úmrtnosti účastníků, kteří si sjednali tyto garance v letech 1970 až 2000, a silná výnosnost na akciových trzích jsou hlavními faktory, které během posledních období přispěly k růstu závazků penzijních fondů plynoucích z garantovaných důchodových opcí. Silná výnosnost na akciových trzích ve Velké Británii znamenala výrazný nárůst prostředků, na které se garance vztahují.

### 4.1 Odvození vzorce

V této části odvodíme vzorec pro ohodnocení garantované důchodové opce. Využijeme skutečnosti, že garantovaná důchodová opce je podobná call opci na dluhopis, jehož kupóny odpovídají výši garantované penze. Budeme předpokládat,

že úmrtnostní riziko je nezávislé na finančním riziku.

Nejprve ohodnotíme základní kontrakt. Předpokládejme, že cena v čase  $t$  bezkupónového dluhopisu s výplatou jedné jednotky v čase  $s \geq t$  je  $D(t, s)$  a že úroková míra je náhodná veličina. Dále předpokládejme existenci bezarbitrážního finančního trhu. V čase  $t$  známe všechny tržní ceny bezkupónových dluhopisů s dobou splatnosti v  $s \geq t$ . Uvažujme kontrakt s jednotkovými platbami v časech  $(T + j)$ , kde  $j = 1, 2, \dots, k$  a  $T > t$ .

Tržní hodnota tohoto kontraktu v čase  $t$  je

$$V(t) = \sum_{j=1}^k D(t, T + j).$$

K ohodnocení tohoto výrazu v čase  $t < T$  použijeme nyní přístup založený na deflátoch. Každá tržní cena deflatovaná vhodným deflátorem je martingal. Jako deflátor můžeme použít libovolné obchodovatelné aktivum, jehož cena je vždy kladná. My použijeme jako deflátor bezkupónový dluhopis s dobou splatnosti v čase  $T$  a označíme sdruženou pravděpodobnostní míru symbolem  $Q_T$ .  $Q_T$  se obvykle nazývá forwardová míra.

$D(s, T)$ , kde  $s \leq T$ , použijeme jako deflátor.  $X_s = \frac{V(s)}{D(s, T)}$  je martingal při pravděpodobnostní míře  $Q_T$ , takže  $E_{Q_T}[X_s | F_t] = X_t$  pro všechna  $s$  taková, že  $t \leq s \leq T$ . Jevové pole  $F_t$  je soubor jevů, o nichž je v čase  $t$  dáno, zda nastaly nebo nenastaly. Platí, že  $D(T, T) = 1$ .

Pro současnou tržní cenu tohoto kontraktu tedy platí

$$\frac{V(t)}{D(t, T)} = E_{Q_T} \left[ \frac{V(T)}{D(T, T)} | F_t \right] = E_{Q_T}[V(T) | F_t],$$

$$V(t) = D(t, T) E_{Q_T}[V(T) | F_t].$$

Stejný vzorec můžeme použít pro ohodnocení střední hodnoty dluhopisu s dobou splatnosti  $\geq T$  vzhledem ke  $Q_T$ .

$$E_{Q_T}[D(T, T + j) | F_t] = \frac{D(t, T + j)}{D(t, T)}.$$

Nyní budeme uvažovat také úmrtnost. Hodnota doživotní penze v čase  $T$ , která je vyplácena od času  $T$  účastníkovi, který je v čase  $T$  ve věku  $R$ , je dána vztahem

$$a_R(T) = \sum_{j=1}^J j p_R D(T, T + j),$$

kde  ${}_j p_R$  je pravděpodobnost přežití z věku  $R$  o  $j$  let a  $J = \omega - R$ , kde  $\omega$  je maximální věk uvedený v úmrtnostních tabulkách.

Uvažujme náhodnou veličinu  $Y(\tau|T) = \sum_{j=1}^{\tau} D(T, T+j)$ , kde  $\tau = 1, 2, \dots$  je zbývající doba života účastníka ve věku  $R$  v čase  $T$ . Platí, že  $Y(0|T) = 0$ . Tato náhodná veličina odpovídá tržní hodnotě jisté penze vyplácené po dobu  $\tau$  let. Pravděpodobnost, že  $\tau \in (k-1, k]$  je  ${}_{k-1} p_R q_{R+k-1}$ , kde  $q_{R+k-1}$  je pravděpodobnost úmrtí účastníka ve věku  $R+k-1$ . Střední hodnota penze vyplácené po zbývající dobu života je

$$E_{P_S}[Y(\tau|T)] = \sum_{k=1}^J {}_{k-1} p_R q_{R+k-1} Y((k-1)|T),$$

kde  $P_S$  jsou pravděpodobnosti přežití.

Nyní odvodíme hodnotu odložené penze v čase  $t$ . Uvažujme účastníka ve věku  $x$  v čase  $t$ . V čase  $T \geq t$  bude účastník ve věku  $R = x + (T - t)$  za předpokladu, že přežije do času  $T$ . Budoucí platby odložené penze jsou v čase  $t$  náhodné veličiny vzhledem k úmrtnosti a úrokové míře. Budeme předpokládat, že pravděpodobnosti úmrtí jsou deterministické. Z tohoto předpokladu dostáváme nezávislost rizika z úrokové míry na riziku z úmrtnosti. Dále v čase  $t$  známe rozdělení zbývající doby života za podmínky dosažení věku  $R$ . To znamená, že můžeme předpovědět pravděpodobnosti úmrtí, které nastanou během období  $[T, T+J)$ .

Tržní hodnotu v čase  $t$  odložené penze, která začne být vyplácena v čase  $T$ , označíme  $V(t)$ .

$$\frac{V(t)}{D(t, T)} = E[(Y(\tau|T) 1_{\tau_x > (T-t)}) | F_t]$$

Střední hodnotu uvažujeme přes společné rozdělení  $P_S$  a  $Q_T$ .  $\tau_x$  je zbývající doba života účastníka ve věku  $x$  v čase  $t$ .  $1_{\tau_x > (T-t)}$  značí indikátor jevu, že  $\tau_x > (T-t)$ . Pomocí vlastností rizika z úmrtnosti můžeme psát, že

$$\begin{aligned} \frac{V(t)}{D(t, T)} &= {}_{(T-t)} p_x \sum_{j=1}^J {}_j p_R E_{Q_T}[D(T, T+j) | F_t] = \\ &= {}_{(T-t)} p_x \sum_{j=1}^J {}_j p_R \frac{D(t, T+j)}{D(t, T)}, \\ V(t) &= {}_{(T-t)} p_x \sum_{j=1}^J {}_j p_R D(t, T+j). \end{aligned}$$

Tržní hodnota v čase  $t$  odložené penze může být vyjádřena jako lineární kombinace bezkupónových dluhopisů.

Nyní ohodnotíme garantovanou důchodovou opci. Hodnota této opce v době splatnosti se rovná

$$G(T) = \frac{S(T)(a_R(T) - g)^+}{g} \mathbf{1}_{\tau_x > T_d},$$

kde  $S(T)$  je celková výše prostředků, z nichž se stanovuje účastníkovi penze.  $a_R(T)$  je střední současná hodnota v čase  $T$  doživotní tržní penze s jednotkovými platbami vyplácenými jednou ročně účastníkovi ve věku  $R$  (v čase  $T$ ).  $g$  je střední současná hodnota garantované doživotní jednotkové penze a  $T_d = (T - t)$ .

$$\frac{G(t)}{D(t, T)} = {}_{(T-t)}p_x E_{Q_T} \left[ \frac{S(T)(a_R(T) - g)^+}{g} | F_t \right]$$

Nakonec budeme ještě předpokládat, že hodnota  $S(T)$  je nezávislá na úrokové míře. Na základě tohoto předpokladu můžeme psát

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{{}_{(T-t)}p_x D(t, T) E_{Q_T}[S(T)|F_t]}{g} E_{Q_T} [(a_R(T) - g)^+ | F_t] = \\ &= \frac{{}_{(T-t)}p_x S(t)}{g} E_{Q_T} [(a_R(T) - g)^+ | F_t]. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z rovnice

$$\frac{S(t)}{D(t, T)} = E_{Q_T} [S(T) | F_t].$$

Užitím výrazu pro  $a_R(T)$  dostaneme

$$E_{Q_T} [(a_R(T) - g)^+ | F_t] = E_{Q_T} \left[ \left( \sum_{j=1}^J {}_j p_R D(T, T + j) - g \right)^+ | F_t \right].$$

Výraz ve střední hodnotě na pravé straně rovnice odpovídá call opci na kupónový dluhopis s platbami  ${}_j p_R$  v čase  $(T + j)$ , kde  $j = 1, 2, \dots, J$ . Předpokládejme, že pohyby úrokové intenzity (short term interest rate) jsou generovány jedním faktorem, konkrétně jednofaktorovým Ornstein–Uhlenbeckovým procesem, jak předpokládal Vašíček. Jamshidian (1989) ukázal, že v případě jednofaktorového modelu úrokové intenzity může být hodnota této opce vyjádřena jako hodnota portfolia opcí na bezkupónový dluhopis. Označme  $a_j = {}_j p_R$ .

Hodnota kupónového dluhopisu v čase  $T$

$$\sum_{j=1}^J a_j D(T, T + j).$$

Tržní hodnota kupónového dluhopisu v čase  $t$

$$P(t) = \sum_{j=1}^J a_j D(t, T + j).$$



Hodnota call opce v čase  $T$  se rovná  $(P(T) - g)^+$ .

Úrokovou intenzitu, pro kterou platí  $\sum_{j=1}^J a_j D^*(T, T + j) = g$ , označíme  $r_T^*$ .  $D^*$  značí bezkupónový dluhopis ohodnocený pomocí  $r_T^*$ . Definujme  $K_j$  tak, že  $K_j = D^*(T, T + j)$ . Jamshidian tedy dokázal následující rovnost

$$C[P(t), g, t] = \sum_{j=1}^J a_j C[D(t, T + j), K_j, t].$$

$C[P(t), g, t]$  je cena call opce v čase  $t$  na kupónový dluhopis se střední současnou hodnotou  $g$  a  $C[D(t, T + j), K_j, t]$  je hodnota call opce v čase  $t$  na bezkupónový dluhopis s dobou splatnosti v  $T + j$  a střední současnou hodnotou  $K_j$ .

$$\frac{C[P(t), g, t]}{D(t, T)} = E_{Q_T} [(P(T) - g)^+ | F_t]$$

Spojením předchozích částí dohromady dostáváme

$$G(t) = \frac{(T-t)p_x S(t)}{g} \frac{\sum_{j=1}^J a_j C[D(t, T + j), K_j, t]}{D(t, T)}.$$

Nyní budeme předpokládat, že  $D(T, T + j)$  má při forwardové míře  $Q_T$  logaritmicko-normální rozdělení. Pro zjednodušení budeme považovat dobu od  $t$  do  $T$  za jednotkovou délku. Dále platí, že  $\text{Var}_{Q_T}(\log(D(T, T + j)) | F_t) = \sigma_D^2$  a  $E_{Q_T} \left[ \log \frac{D(T, T + j)}{D(t, T + j)} | F_t \right] = \mu_D$ . Poznamenejme, že hodnota  $\sigma_D$  se mění v závislosti na  $j$ . Z vlastností deflátorů víme, že

$$E_{Q_T} \left[ \frac{D(T, T + j)}{D(t, T)} | F_t \right] = \frac{D(t, T + j)}{D(t, T)},$$

a z logaritmicko-normálního rozdělení dostáváme

$$\begin{aligned} E_{Q_T} [D(T, T + j) | F_t] &= E_{Q_T} \left[ \frac{D(T, T + j)}{D(t, T + j)} D(t, T + j) | F_t \right] = \\ &= \exp \left( \mu_D + \frac{\sigma_D^2}{2} \right) D(t, T + j). \end{aligned}$$

Dosazením dostáváme

$$\exp \left( \mu_D + \frac{\sigma_D^2}{2} \right) = \frac{1}{D(t, T)}.$$

Pomocí Black-Scholesovy formule ohodnotíme call opci

$$C[D(t, T + j), K_j, t] = D(t, T) E_{Q_T} [(D(T, T + j) - K_j)^+ | F_t].$$

Pro proces  $\{D(t, T + j), t \geq 0\}$  lze odvodit dvě rozložení. První rozložení je rozložení s parametry Brownova pohybu  $\mu_D, \sigma_D^2$ , které jsme do teď uvažovali. Druhé rozložení je rozložení s parametry Brownova pohybu  $\rho - \frac{1}{2}\sigma_D^2, \sigma_D^2$ , které označíme  $Q$  a budeme se jím nyní zabývat. Při rozložení  $Q$  nadále platí, že  $E_Q [D(T, T + j)|F_t] = \frac{D(t, T+j)}{D(t, T)}$ . Označíme  $s = D(t, T+j)$ . Vyjádříme  $D(T, T + j) = \exp(B_T)$  a  $D(t, T + j) = \exp(B_t)$ . Proces  $\{B_t, t \geq 0\}$  se spojitými trajektoriemi, který má nezávislé přírůstky, kde  $(B_T - B_t) \sim N(\rho - \frac{1}{2}\sigma_D^2, \sigma_D^2)$ , se nazývá procesem Brownova pohybu s lokálním posunutím  $\rho - \frac{1}{2}\sigma_D^2$  a koeficientem difúze  $\sigma_D^2$ .  $\rho$  je bezriziková úroková intenzita a platí, že  $D(t, T) = \exp(-\rho)$ .

$$\begin{aligned} E_Q [(D(T, T + j) - K_j)^+ | F_t] &= E_Q \left[ \left( \frac{\exp(B_T) \exp(B_t)}{\exp(B_t)} - K_j \right)^+ | F_t \right] = \\ &= E_Q [(s \exp(B_T - B_t) - K_j)^+ | F_t] \end{aligned}$$

Výraz ve střední hodnotě jsme vyjádřili tak, aby byl nezávislý na  $F_t$ . Připomeneme, že  $(B_T - B_t) \sim N(\rho - \frac{1}{2}\sigma_D^2, \sigma_D^2)$ , a budeme uvažovat náhodnou veličinu  $X$  takovou, že  $X \sim N(-\frac{1}{2}\sigma_D^2, \sigma_D^2)$ . Platí tedy  $\exp(B_T - B_t) = \exp(X + \rho)$ .

$$\begin{aligned} C[D(t, T + j), K_j, t] &= D(t, T) E_Q [(s \exp(B_T - B_t) - K_j)^+ | F_t] = \\ &= \exp(-\rho) \int_{-\infty}^{+\infty} (s \exp(x + \rho) - K_j)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_D^2}} \exp\left(-\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma_D^2)^2}{2\sigma_D^2}\right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (s \exp(x) - K_j \exp(-\rho))^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_D^2}} \exp\left(-\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma_D^2)^2}{2\sigma_D^2}\right) dx = \\ &= s \int_{\log \frac{D(t, T)K_j}{D(t, T+j)}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_D^2}} \exp\left(-\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma_D^2)^2 - 2\sigma_D^2 x}{2\sigma_D^2}\right) dx - \\ &\quad - D(t, T)K_j \int_{\log \frac{D(t, T)K_j}{D(t, T+j)}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_D^2}} \exp\left(-\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma_D^2)^2}{2\sigma_D^2}\right) dx = \\ &= s \left( 1 - \Phi\left(\frac{\log \frac{D(t, T)K_j}{D(t, T+j)} - \frac{1}{2}\sigma_D^2}{\sigma_D}\right) \right) - \\ &\quad - D(t, T)K_j \left( 1 - \Phi\left(\frac{\log \frac{D(t, T)K_j}{D(t, T+j)} + \frac{1}{2}\sigma_D^2}{\sigma_D}\right) \right) = \\ &= D(t, T + j) \Phi\left(\frac{\log \frac{D(t, T+j)}{D(t, T)K_j} + \frac{\sigma_D}{2}}{\sigma_D}\right) - D(t, T)K_j \Phi\left(\frac{\log \frac{D(t, T+j)}{D(t, T)K_j} - \frac{\sigma_D}{2}}{\sigma_D}\right). \end{aligned}$$

Tímto jsme odvodili vzorec pro ohodnocení opce podle Vašíčkova modelu, který můžeme psát také ve tvaru

$$C[D(t, T + j), K_j, t] = D(t, T + j)\Phi(h_1(j)) - K_j D(t, T)\Phi(h_2(j)),$$



kde

$$h_1(j) = \frac{\log \frac{D(t,T+j)}{D(t,T)K_j}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_D}{2},$$

$$h_2(j) = \frac{\log \frac{D(t,T+j)}{D(t,T)K_j}}{\sigma_D} - \frac{\sigma_D}{2},$$

$$\sigma_D = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \frac{1 - e^{-\kappa j}}{\kappa}}.$$

Parametry  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  charakterizují dynamiku úrokové intenzity určené na základě Vašíčkova procesu.  $\Phi$  značí distribuční funkci normovaného normálního rozdělení.

Nyní odvodíme cenu bezkupónového dluhopisu  $D(t, t+s)$ . Vycházíme z okamžité úrokové intenzity  $r(t)$ , která podle předpokladu plyne z rovnice

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW_t,$$

kde  $W_t$  je Wienerův proces. Rovnici vyřešíme následujícím způsobem

$$dr(t) + \kappa r(t)dt = \kappa\theta dt + \sigma dW_t.$$

Obě strany rovnice vynásobíme  $e^{\kappa t}$

$$e^{\kappa t} dr(t) + e^{\kappa t} \kappa r(t)dt = e^{\kappa t} \kappa\theta dt + e^{\kappa t} \sigma dW_t,$$

$$(e^{\kappa t} r(t))' dt = e^{\kappa t} \kappa\theta dt + e^{\kappa t} \sigma dW_t.$$

Odtud dostaneme

$$e^{\kappa t} r(t) - r(0) = \kappa\theta \int_0^t e^{\kappa s} ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dW_s.$$

Výpočtem integrálu a následným podělením obou stran rovnice  $e^{\kappa t}$  dostáváme

$$e^{\kappa t} r(t) = \theta(e^{\kappa t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dW_s + r(0),$$

$$r(t) = \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dW_s + r(0)e^{-\kappa t}.$$

Rovnice pro okamžitou úrokovou intenzitu v čase  $t$

$$r(t) = \theta + e^{-\kappa t}(r(0) - \theta) + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s.$$

Víme, že

$$D(t, t+s) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_t^{t+s} r(u) du \right) | F_t \right].$$

K výpočtu  $D(t, t + s)$  potřebujeme znát  $\int_t^{t+s} r(u)du$ . Označme  $\bar{W}_u = W_{t+u} - W_t$ .

$$\begin{aligned} \int_t^{t+s} r(u)du &= \int_0^s r(t+u)du = \\ &= \int_0^s \left( \theta + e^{-\kappa u}(r(t) - \theta) + \sigma \int_t^{t+u} e^{-\kappa(t+u-z)} dW_z \right) du = \\ &= \theta s + \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa s})(r(t) - \theta) + \frac{\sigma}{\kappa} \int_0^s (1 - e^{-\kappa(s-z)}) d\bar{W}_z \end{aligned}$$

Integrál má normální rozdělení se střední hodnotou

$$E \int_t^{t+s} r(u)du = \theta s + \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa s})(r(t) - \theta)$$

a rozptylem

$$\text{Var} \int_t^{t+s} r(u)du = \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \int_0^s (1 - e^{-\kappa(s-u)})^2 du.$$

Proto platí

$$D(t, t + s) = \exp \left( -E \left( \int_t^{t+s} r(u)du \right) + \frac{1}{2} \text{Var} \left( \int_t^{t+s} r(u)du \right) \right).$$

Přímým výpočtem  $\text{Var} \int_t^{t+s} r(u)du$  a následným dosazením dostaneme

$$D(t, t + s) = \exp \left[ -\theta s - (r(t) - \theta) \left( \frac{1 - e^{-\kappa s}}{\kappa} \right) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (4e^{-\kappa s} - e^{-2\kappa s} + 2\kappa s - 3) \right].$$

Dosud jsme předpokládali, že tržní cena modelovaného bezkupónového dluhopisu je rovna modelované ceně, což není vhodné pro jednofaktorový model s konstantními parametry. Tento model neodpovídá tvaru výnosové křivky v daném čase a změnám výnosové křivky v průběhu času.

Nyní popíšeme Dybvigovu úpravu našeho dosavadního modelu. Úprava je platná pouze v konkrétním časovém okamžiku. Dybvig předpokládal, že tržní cena a modelovaná cena jsou určeny dvěma procesy úrokové intenzity, které se liší pouze deterministickým procesem. Tento deterministický proces označíme  $r^b(u)$ . Proces uvažujeme jako korekční faktor, který pozměňuje modelovanou cenu tak, aby souhlasila s tržní cenou. Tržní cenu bezkupónového dluhopisu s maturitou v  $s$  označíme  $D_{mar}(t, s)$  a modelovanou cenu  $D_{mod}(t, s)$ . Pro  $r^b(u)$  platí, že  $e^{-\int_t^s r^b(u)du} = \frac{D_{mar}(t, s)}{D_{mod}(t, s)}$ ,  $\forall s \geq t$ .

V souvislosti s garantovanou důchodovou opcí se zajímáme o ohodnocení opce s maturitou v čase  $T$ , platbami  $a_j$  v časech  $(T + j)$ , kde  $1 \leq j \leq J$ , a se střední současnou hodnotou garantovaných budoucích jednotkových plateb  $g$ .

Rádi bychom správně ocenili bezkupónový dluhopis v čase  $t$  pomocí jednofaktorového modelu úrokové intenzity. Hodnota této opce v době splatnosti  $T$  je

$$\max\left(\sum_{j=1}^J a_j D_{mar}(T, T+j) - g, 0\right).$$

Tato opce má stejnou cenu v čase  $t$  jako pomocná opce, jejíž výnos v čase  $T$  se rovná  $e^{-\int_t^T r^b(u)du} \max\left(\sum_{j=1}^J a_j e^{-\int_T^{T+j} r^b(u)du} D_{mod}(T, T+j) - g, 0\right)$ .

Užijeme Jamshidianův trik a označíme si  $r_T^*$  úrokovou intenzitu ve Vašíčkově modelu, pro kterou platí  $\sum_{j=1}^J b_j D_{mod}^*(T, T+j) = g$ , kde  $b_j = a_j e^{-\int_T^{T+j} r^b(u)du}$ .  $D_{mod}^*(T, T+j)$  je hodnota bezkupónového dluhopisu v čase  $T$  podle Vašíčkova modelu, pokud úroková intenzita v čase  $T$  je  $r_T^*$ . Označíme si  $\kappa_j = D_{mod}^*(T, T+j)$ . Stále uvažujeme, že průběh úrokové intenzity je dán jednofaktorovým Vašíčkovým modelem. Tržní cena opce na kupónový dluhopis je

$$C[P_{mar}(t), g, t] = Z(t, T) \sum_{j=1}^J b_j C[D_{mod}(t, T+j), \kappa_j, t],$$

kde

$$P_{mar}(t) = \sum_{j=1}^J a_j D_{mar}(t, T+j),$$

$$Z(t, T) = e^{-\int_t^T r^b(u)du} = \frac{D_{mar}(t, T)}{D_{mod}(t, T)}.$$

$P_{mar}(t)$  je současná tržní cena dluhopisu a  $C[D_{mod}(t, T+j), \kappa_j, t]$  je vzorec pro cenu call opce na bezkupónový dluhopis při užití Vašíčkova modelu.

Z předchozích výsledků plynou následující vzorce.

$$\begin{aligned} \frac{C[P_{mar}(t), g, t]}{D_{mar}(t, T)} &= \frac{Z(t, T)}{D_{mar}(t, T)} \sum_{j=1}^J b_j C[D_{mod}(t, T+j), \kappa_j, t] = \\ &= \frac{1}{D_{mod}(t, T)} \sum_{j=1}^J b_j C[D_{mod}(t, T+j), \kappa_j, t] \end{aligned}$$

Cena garantované důchodové opce (Dybvig)

$$G(t) = \frac{(T-t)p_x S(t)}{g} \frac{\sum_{j=1}^J b_j C[D_{mod}(t, T+j), \kappa_j, t]}{D_{mod}(t, T)}.$$

Pokud se modelovaná cena rovná tržní ceně,  $b_j = a_j$  pro všechna  $j$ .

Tento vzorec pro garantovanou důchodovou opci se v čase  $t$  shoduje se strukturou ceny bezkupónového dluhopisu, ale později v čase  $(t + h)$  bude tržní cena změněna a my budeme muset přehodnotit model podle nových informací.

V této části jsme odvodili vzorec pro garantovanou důchodovou opci, který je založen na jednofaktorovém Vašíčkově modelu úrokové intenzity. Vzorec je odvozen za předpokladu nezávislosti mezi cenou akcií a úrokovou intenzitou. Dále jsme předpokládali, že riziko z úmrtnosti lze předpovědět.

## 4.2 Ohodnocení garantované důchodové opce

V této části namodeluji časovou řadu tržních hodnot garancí, které jsou založeny na vzorci odvozeném v předchozí části. Zaměřím se na případ, kdy rozumné odhady tržních hodnot garancí mohou být odvozeny z jednofaktorového stochastického modelu úrokové intenzity. Budu předpokládat, že tržní cena bezkupónového dluhopisu se rovná modelované ceně.

Budu uvažovat dva případy, pro které spočítám hodnoty garancí v jednotlivých letech spořicí fáze smlouvy. V prvním případě uvažuji muže, který k 1. 1. 2004 uzavřel penzijní připojištění u Allianz penzijního fondu, a.s. podle penzijního plánu, který na nabytí platnosti 1. 5. 2001. K 1. 1. 2005 ohodnotím garantovanou důchodovou opci v následujících letech spořicí fáze. V roce 2005 je účastník ve věku 50 let. Výše jeho měsíčního příspěvku činí 500 Kč a státní příspěvek je ve výši 150 Kč. Předpokládám, že výše příspěvků se po dobu spoření nezmění. Prostředky naspořené od doby uzavření smlouvy do 1. 1. 2005 zanedbávám. Penzijní fond mu garantuje technickou úrokovou míru ve výši 3 %, dodatečné podíly na zisku a valorizaci penze v době výplaty neuvažuji. Předpokládám, že účastník bude spořit po dobu příštích 10 let a poté si vybere doživotní penzi, pokud je současná hodnota penze větší než jednorázové vyrovnání; v opačném případě si vybere jednorázové vyrovnání. Druhý případ se liší od prvního pouze v tom, že účastník vloží na konci doby spoření jednorázový vklad ve výši 70 000 Kč. Tuto částku jsem zvolila, protože odpovídá průměrné výši naspořených prostředků jedince v ČR. Výpočty jsou založeny na úmrtnostních tabulkách vydaných ČSÚ.

Nyní popíši postup, jakým jsem spočítala hodnoty garancí výše popsaných příkladů. K výpočtům a k vykreslení grafů jsem použila program Microsoft Office Excel 2003. Výsledné hodnoty a grafy jsou uvedeny ke konci této podkapitoly.

Nejprve jsem musela stanovit okamžitou úrokovou intenzitu  $r(t)$  pro  $t = 1, \dots, 9$ , která je potřeba pro výpočet bezkupónového dluhopisu  $D(t, t + s)$ .

Intenzita  $r(t)$  se modeluje pomocí Uhlenbeckova procesu

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW_t,$$

kde  $\kappa, \theta, \sigma$  jsou konstanty a  $W_t$  je standardizovaný Brownův pohyb (Wienerův proces) při pravděpodobnostní míře  $Q$ . Jak už jsem odvodila, řešením je rovnice

$$r(t) = \theta + e^{-\kappa t}(r(0) - \theta) + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s.$$

Předpokládám, že znám okamžitou úrokovou intenzitu v čase  $t$  a chci stanovit její hodnotu v čase  $t + dt$ . K ohodnocení použiji následující rovnici

$$r(t + dt) = \theta + e^{-\kappa dt}(r(t) - \theta) + \sigma \int_t^{t+dt} e^{-\kappa(t+dt-s)} dW_s.$$

Integrál na pravé straně rovnice nahradím integrálním součtem. V tomto případě bude mít integrální součet pouze jednoho sčítance, jelikož předpokládám, že  $dt$  je dosti malé.

$$r(t + dt) = \theta + e^{-\kappa dt}(r(t) - \theta) + \sigma e^{-\kappa dt}(W_{t+dt} - W_t)$$

Pro Wienerův proces platí, že  $(W_{t+dt} - W_t) \sim N(0, dt)$ . Ke stanovení  $(W_{t+dt} - W_t)$  jsem použila náhodnou veličinu  $X$  s normovaným normálním rozdělením, kterou jsem získala pomocí Box – Mülerovy metody, vynásobenou  $\sqrt{dt}$ .

$$X = (-2 \log(1 - R_1))^2 \cos(2\pi R_2),$$

kde  $R_1$  a  $R_2$  jsou náhodné veličiny z intervalu  $[0,1)$ .

Parametry  $\kappa, \theta, \sigma$  použité pro výpočet tržních hodnot garantované důchodové opce nebyly kalibrovány na trh. Uvedené příklady jsou tedy pouze ilustrativní.

Parametr	Hodnota
$\kappa$	0,313631
$\theta$	0,0288
$\sigma$	0,000802

Parametry  $\kappa$  a  $\sigma$  jsou srovnatelné s odhady, které byly získány z dat v České republice za poslední dva roky. Pro nastavení správných parametrů a následný výpočet skutečných hodnot garantované důchodové opce by bylo třeba charakterizovat delší časové řady.

Uvedeným postupem jsem nasimulovala tisíc hodnot okamžité úrokové intenzity  $r(t)$  pro každé  $t = 1, \dots, 9$ . Jako hodnotu  $r(t)$  určenou pro výpočet garantované důchodové opce jsem použila průměr nasimulovaných hodnot okamžitých

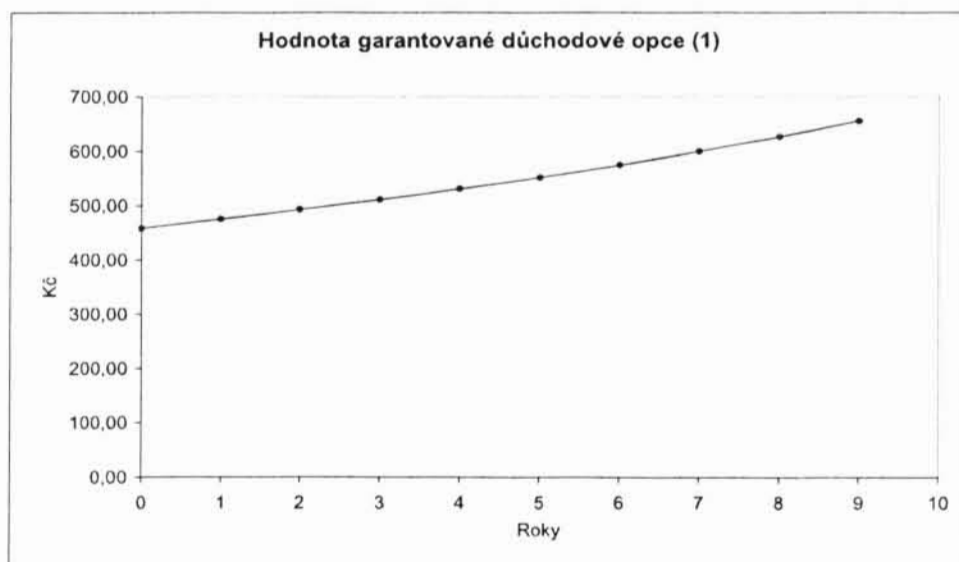


úrokových intenzit v jednotlivých časech. Získané hodnoty intenzit jsem spolu s parametry  $\kappa, \theta, \sigma$  dosadila do vzorce pro výpočet garantované důchodové opce stanoveného na základě Vašíčkova modelu.

Hodnoty garantované důchodové opce v Kč v následujících devíti letech jsou pro oba případy uvedeny v tabulkách. Výsledky jsou znázorněny také v grafu.

### Příklad 1

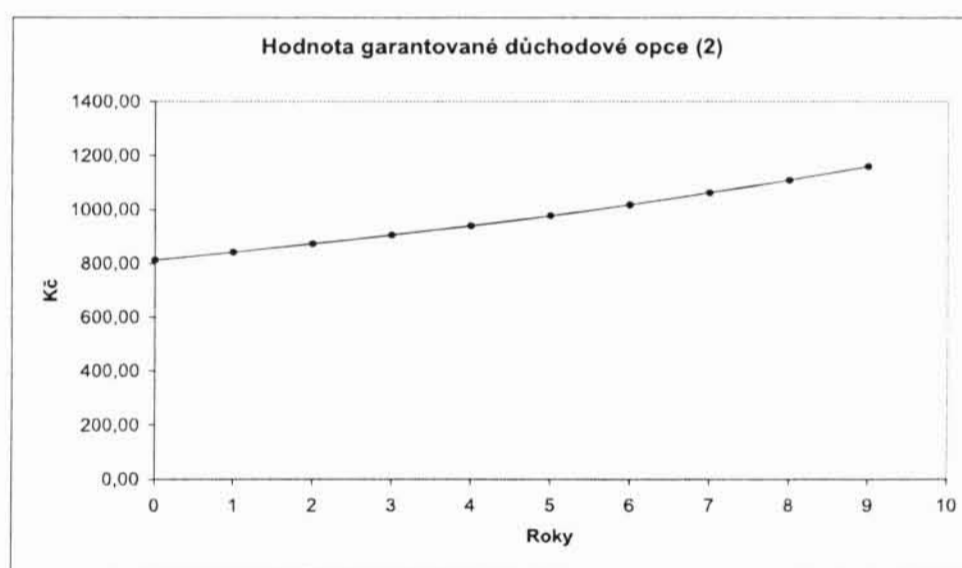
Rok	Hodnota
0	458,99
1	475,38
2	492,83
3	511,21
4	530,45
5	551,52
6	574,57
7	599,75
8	626,22
9	655,00



Obrázek 4.1: Hodnota garantované důchodové opce pro příklad 1

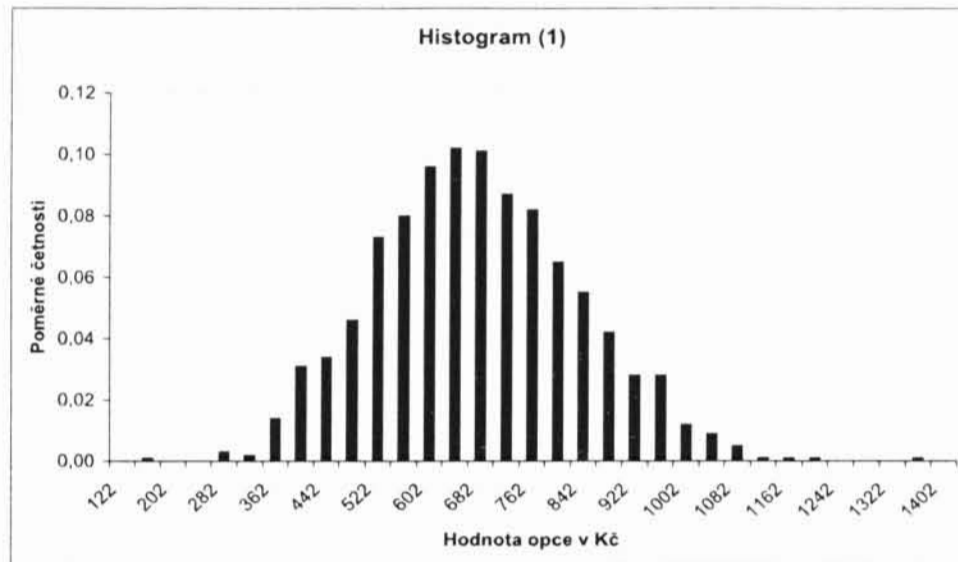
## Příklad 2

Rok	Hodnota
0	812,56
1	841,58
2	872,48
3	905,00
4	939,07
5	976,38
6	1017,17
7	1061,75
8	1108,61
9	1159,57

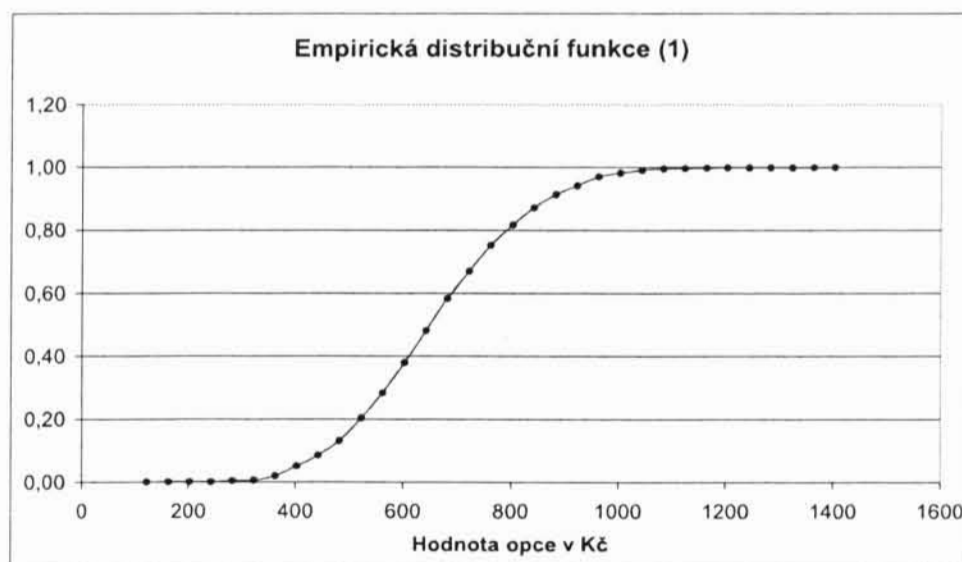


Obrázek 4.2: Hodnota garantované důchodové opce pro příklad 2

Pro získání představy o tvaru hustoty a distribuční funkce hodnoty garantované důchodové opce k 1. 1. 2014, tedy k počátku posledního roku spořicí fáze, jsem zkonstruovala histogram a empirickou distribuční funkci. Pro získání přesnějšího tvaru histogramu a empirické funkce by bylo třeba použít k jejich konstrukci většího počtu hodnot. Nedostatek hodnot je způsoben softwarem, který jich nedokázal nasimulovat více. Histogram a empirická distribuční funkce pro oba příklady jsou znázorněny na obrázcích 4.3, 4.4, 4.5, 4.6.

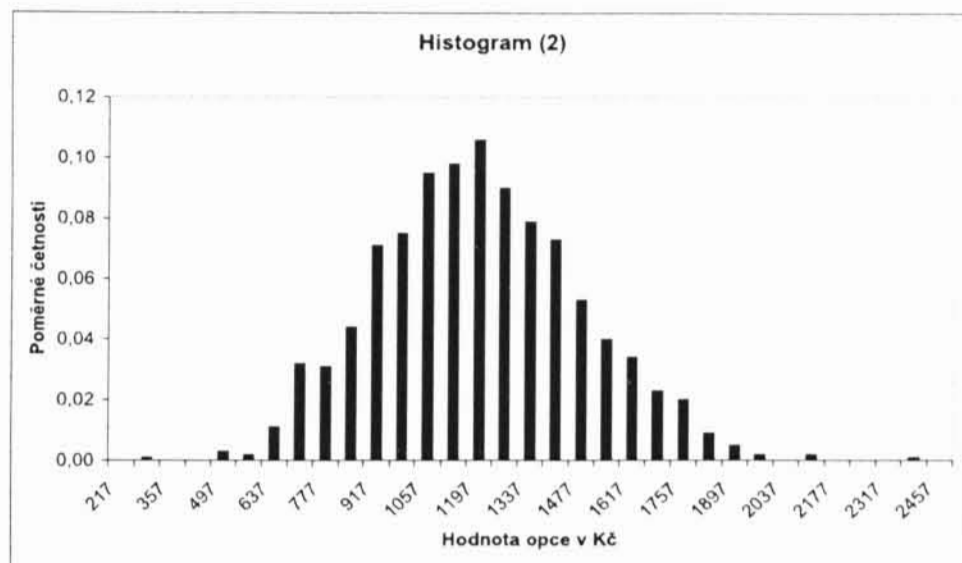


Obrázek 4.3: Histogram pro příklad 1

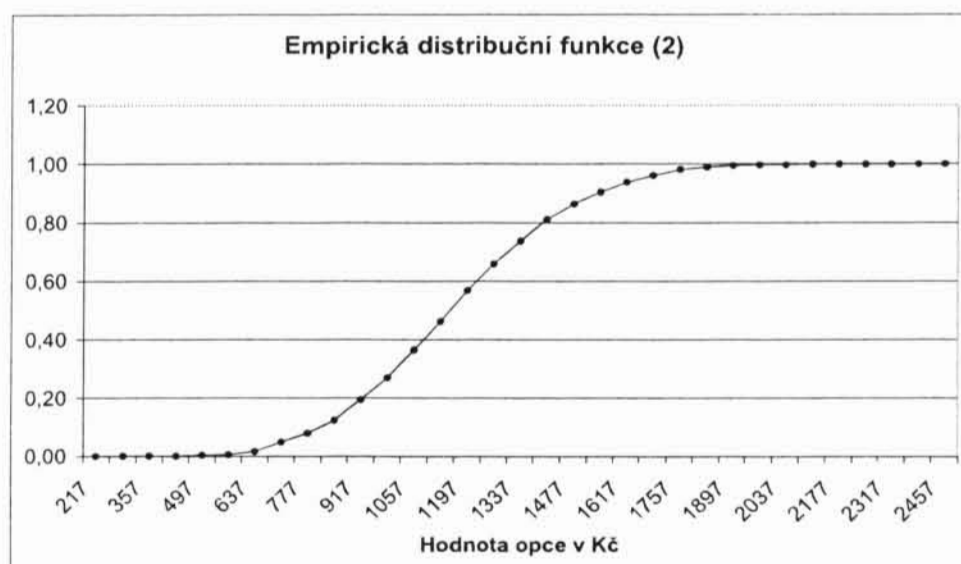


Obrázek 4.4: Empirická distribuční funkce pro příklad 1





Obrázek 4.5: Histogram pro příklad 2



Obrázek 4.6: Empirická distribuční funkce pro příklad 2

## 4.3 Shrnutí

V našem konkrétním případě je zřejmé, že závazky plynoucí z garantované důchodové opce, která je daná účastníkovi penzijního připojištění při sjednání smlouvy, mají velkou hodnotu. Pokud si účastník v době splatnosti zvolí doživotní důchod a nezemře dříve než se předpokládá podle zvolených úmrtnostních tabulek, nebude úhrn prostředků evidovaných v jeho prospěch dostatečný na výplatu jeho penze. Penzijní fond bude muset po vyčerpání prostředků na účtu účastníka vyplácet penze z vlastních zdrojů nebo snížit DPF pro ostatní účastníky. Toto platí za předpokladu, že uvedené odhady hodnot garantovaných důchodových opcí jsou rozumné.

Výše závazku se zvýší, pokud účastník bude žít déle než se předpokládá na základě úmrtnostních tabulek vydaných ČSÚ. Pravděpodobnost, že účastník bude žít déle, je vysoká, jelikož úmrtnostní tabulky ČSÚ platí pro celou Českou republiku, ale je známo, že účastníci vstupující do penzijního připojištění se dožívají vyššího věku.

Existují čtyři hlavní metody, jak mohou společnosti, které mají ve svém portfoliu produkty s garantovanou důchodovou opcí, zacházet s rizikem plynoucím z jejího upsání. První metodou je navýšení rezerv tak, aby závazky z garantované důchodové opce byly s velkou pravděpodobností pokryty. Závazky se odhadnou pomocí stochastických simulací. Simulace se použijí na odhad distribuční funkce cen garancí. Z pravděpodobnostního rozdělení se spočítá výše počáteční rezervy tak, aby závazky byly pokryty z 99 %. Druhou možností je zajistit tento závazek u zajišťovny. Třetí přístup je založení replikačního portfolia obchodovatelných aktiv tak, aby doby splatnosti aktiv v portfoliu odpovídaly dobám splatnosti závazků z garantované důchodové opce. Poslední možností je převedení smlouvy, jejíž součástí je garantovaná důchodová opce, na novou smlouvu, která tuto opci již neobsahuje. Převedení smlouvy je možné pouze po dohodě s účastníkem.

# Kapitola 5

## Závěr

Jak již bylo zmíněno, na českém pojistném trhu prodávají penzijní fondy produkt, který mnozí považují za spoření se státním příspěvkem. Penzijní fondy se ale výrazně odlišují ve výpočtu doživotních penzí. Garance a opce dané účastníkům penzijního připojištění při sjednání smlouvy mohou mít velkou reálnou hodnotu. Produkty prodávané penzijními fondy lze podle mezinárodních účetních standardů klasifikovat buď jako pojistné smlouvy nebo jako finanční instrumenty.

Hlavním cílem diplomové práce byla klasifikace jednotlivých penzijních plánů mezi pojistné smlouvy a finanční instrumenty a vyčíslení závazků plynoucích ze sjednaných pojistných smluv. Za tímto účelem jsem shrnula penzijní připojištění v České republice, popsala a klasifikovala čtyři vybrané penzijní plány. Dále jsem se soustředila na garantovanou důchodovou opci v produktech penzijního připojištění a na základě jednofaktorového Vašíčkova modelu jsem odvodila vzorec pro její ohodnocení.

V třetí části kapitoly 4 jsem na příkladě ukázala nasimulování okamžité úrokové intenzity pro následujících 9 let a poté jsem použila vzorec na ohodnocení garantované důchodové opce. Ze získaných výsledků plyne existence závazků penzijního fondu z garantované důchodové opce. Tyto závazky jsou pro penzijní fond významné.

# Literatura

- [1] Allianz penzijní fond, a.s.: Penzijní plán. 2001.
- [2] Allianz penzijní fond, a.s.: Penzijní plán. 2004.
- [3] Boyle, P., Hardy, M.: Guaranteed Annuity Options. University of Waterloo, Canada, 2003a.
- [4] Boyle, P., Hardy, M.: Guaranteed Annuity Options. *Astin Bulletin No 2*, 2003b, 125–152.
- [5] Cipra, T.: Penzijní připojištění a jeho výpočetní aspekty. EDICE HZ, Praha, 1996, 182–203.
- [6] CREDIT SUISSE LIFE & PENSIONS PENZIJNÍ FOND, a.s.: Penzijní plán V. 2002.
- [7] International Accounting Standards Board: Guidance on Implementing International Financial Reporting Standard 4 Insurance Contracts. 2004, 6–12.
- [8] International Accounting Standards Board: International Financial Reporting Standard 4 Insurance Contracts. 2004, 27–34.
- [9] Mandl, P.: Stochastické finanční modely. *Seminář z aktuárských věd 2002/03*, Matfyzpress, Praha, 2003, 80–108.
- [10] Penzijní fond Komerční banky, a.s.: Penzijní plán č. 3. 2000.
- [11] Zákon č. 42/1994 Sb., o penzijním připojištění se státním příspěvkem. 1994.