Posudek oponenta diplomové práce **F.Laciny** s názvem

Stochastic integrals

Student se ve své diplomové práci věnuje různým definicím stochastického integrálu v případech, kdy je integrál definován jako limita v pravděpodobnosti nebo po trajektoriích.

Práce je psána v angličtině. Má převážně kompilační charakter s tím, že obsahuje i netriviální samostatnou část. Toto podání práce vyhovuje téměř všem připomínkám vytknutým v předchozím posudku. Stále jsou v práci drobné chyby, které se do minulého 4 stránkového posudku nevešly především proto, že je víceméně lze považovat za snadno opravitelné při zběžném čtení čtenářem nebo jsou takové nedostatky víceméně nicotné.

V práci chybí část ospravedlňující zanedbávání množiny míry nula v souvislosti se ztotožněním pseudometrického prostoru $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ se separabilním metrickým prostorem H. Pro potřeby čtenáře a kohokoli, kdo by měl pochybnosti o tom, že taková část je skutečně potřebná, aby se dalo hovořit o rigorózním přístupu založeném na korektních důkazech bez mezer, zde uvádím následující návod.

Buď $\mathbb{H}$ separabilní Hilbertův metrický prostor s ortonormální bází $\{\mathbb{e}_i\}_{i\in N}$. Na tomto prostoru je přirozeně definována projekce do i-té souřadnice

$$\pi_i(\mathbb{h}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbb{c}_i(\mathbb{h})\mathbb{e}_i, \qquad \text{kde} \qquad \mathbb{c}_i(\mathbb{h}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \langle \mathbb{h}, \mathbb{e}_i \rangle.$$

Nechť $\mathbb{H}$ je prostor tříd ekvivalence na množině $\mathbb{L}_2(\mathbb{P})$, tj.

$$\mathbb{H} = \{[\![X]\!]; X \in \mathbb{L}_2(\mathbb{P})\}, \text{ kde } [\![X]\!] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{Y \in \mathbb{L}_2(\mathbb{P}); Y \stackrel{\text{sj}}{=} X\}, \text{ přičemž } \langle [\![X]\!], [\![Y]\!] \rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}[XY],$$

a nechť $e_i \in \mathbb{e}_i, i \in N \subseteq \mathbb{N}$. Pak můžeme definovat selekci $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{L}_2(\mathbb{P})$ předpisem

$$\pi(\mathbb{h}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \exists \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i\in N_n(\mathbb{h})} \pi_i(\mathbb{h}) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{P}), \qquad \text{kde} \qquad \pi_i(\mathbb{h}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbb{c}_i(\mathbb{h}) e_i,$$

kde $N_n(\mathbb{h}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \inf\{n \in N; \sum_{n<i\in N} \mathbb{c}_i^2(\mathbb{h}) < 2^{-n}\}$ a kde $\exists \lim$ označuje limitu tam, kde odpovídající posloupnost konverguje, a nulu jinak.

Označme následující σ-algebry $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \operatorname{dom}(\mathbb{P}), \mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathcal{B}(\mathbb{H})$, kde symbol $\mathcal{B}$ naznačuje, že $\mathcal{H}$ je borelovská σ-algebra na $\mathbb{H}$, a $\Omega \stackrel{\text{def}}{=\!=} \cup\mathcal{A}$. Pak $\mathcal{H}$ je σ-algebra generovaná funkcemi $\{\mathbb{c}_i\}_{i\in N}$ popisující koeficienty vzhledem k uvažované ortonormální bázi.

Zobrazení $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je zde tedy selekcí takovou, že kdykoli $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a kdykoli $\mathbb{I} \in \mathbb{L}(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ je měřitelné zobrazení, pak $I \stackrel{\text{def}}{=\!=} \pi \circ \mathbb{I} \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{A})$ je měřitelná funkce, která je selekcí $\mathbb{I}$ ve smyslu, že $[\![I(s)]\!] = \mathbb{I}(s)$ platí kdykoli $s \in \mathbb{S}$. Základem k ověření této vlastnosti je patrně následující úvaha. Protože $c_i \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbb{c}_i \circ \mathbb{I} \in \mathbb{L}(\mathcal{S})$ a $e_i \in \mathbb{L}(\mathcal{A})$ jsou měřitelná zobrazení, je jejich tenzorový součin $c_i \otimes e_i \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{A})$ měřitelný vzhledem k součinové σ-algebře, přičemž

$$(c_i \otimes e_i)(s, \omega) = c_i(s) e_i(\omega) = \pi_i(\mathbb{I}(s))(\omega).$$

Bylo zadání předloženou prací splněno ?	ANO
Jaká byla obtížnost zpracovávaného tématu ?	dostatečná
Je v práci příspěvek autora dostatečně specifikován ?	ANO
V čem spočívá ?	*především znění a důkaz věty 43*
Obsahuje práce vlastní důkaz nějakého tvrzení ?	ANO
Obsahuje práce matematickou část s rigorózně a korektně zformulovaným textem ?	chybí zde ospravedlnění ignorace množiny míry nula
Nejsou v práci závažné faktické chyby ?	NE
Jsou zdroje správně citovány ?	ANO
Je práce po formální stránce v pořádku ?	ANO
Lze práci uznat jako diplomovou ?	ANO

Na závěr lze konstatovat, že práce v této formě již splňuje předpoklady kladené na diplomovou práci na MFF UK.