Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Michal Řepík

Výuka lineární algebry na středních školách

Linear Algebra Education at Secondary School

Vedoucí diplomové práce:	Doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy - matematika

Praha 2016

Děkuji vedoucímu diplomové práce doc. RNDr. Antonínu Jančaříkovi, Ph.D., za velkou důvěru a volnost při návrhu a realizaci online vzdělávacího kurzu lineární algebry v rámci kurzů projektu Talnet. Vždyť co má být větší odbornou kompetencí učitele než zodpovědná příprava, provedení a reflexe vlastní výuky. Dále děkuji organizátorům Talnetu za možnost vést kurz lineární algebry, konkrétně Mgr. Štěpánu Peterkovi a Mgr. Zdeňku Smrčkovi. Za pomoc při revizi a korekturách textu včetně všech jeho příloh děkuji Anně Vrabcové. V neposlední řadě chci poděkovat studentům kurzu lineární algebry 2015/2016, bez kterých by experimentální část této diplomové práce vůbec nemohla vzniknout.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Antonína Jančaříka, Ph.D., a s použitím odborné literatury a dalších pramenů uvedených v seznamu použité literatury, pramenů a informačních zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 30. 6. 2016

Bc. Michal Řepík

Název práce:	Výuka lineární algebry na středních školách
Autor:	Bc. Michal Řepík
Katedra:	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Vedoucí práce:	Doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Abstrakt:	Předkládaná diplomová práce s názvem Výuka lineární algebry na středních školách je rozdělena na část teoretickou a experimentální. Teoretická část se zabývá identifikací témat lineární algebry v učivu matematiky na středních školách, představuje jejich problematiku a ukazuje možné cesty jejich rozšíření. Mezi tato témata jsou v práci zařazeny vektory a vektorové prostory, skalární součin, soustavy lineárních rovnic a matice. Těžiště diplomové práce spočívá v experimentální části, která tato témata začleňuje do přípravy a následné realizace online vzdělávacího kurzu lineární algebry pro žáky středních škol v rámci projektu Talnet, který se uskutečnil v zimním semestru akademického roku 2015/2016. Výsledky proběhlého kurzu jsou v práci vyhodnoceny.
Klíčová slova:	Lineární algebra, e-learning, online vzdělávání, Talnet.

Title:	Linear Algebra Education at Secondary School
Author:	Bc. Michal Řepík
Department:	Department of Mathematics and Mathematical Education
Supervisor:	Doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Abstract:	The submitted master thesis called Linear Algebra Education at Secondary School consists of a theoretical and an experimental part. The theoretical one deals with the identification of those linear algebra themes, which appear in the secondary school mathematics curriculum. It follows up with a more detailed look into those topics and proposes ways for further extension of secondary level linear algebra education. The main topics, which are identified in the thesis, are vectors and vector spaces, inner and dot product, systems of linear equations and matrices. The main section of this thesis is the experimental part, which incorporates the conclusions of the first one to design and later realise an online educational course of linear algebra as a part of the Talnet project, which took place in the winter semester of the academic year 2015/2016. The end of this thesis contains assessment of the results of this course.
Key words:	Linear algebra, e-learning, online education, Talnet.

Obsah

Úvod

Předkládaná diplomová práce s názvem *Výuka lineární algebry na středních školách* je rozdělena do dvou navzájem propojených částí. V teoretické části je popsán přístup k pojmu výuka lineární algebry na středních školách z hlediska identifikace obsahu středoškolské látky, jež má přímou souvislost se studiem lineární algebry, a následného návrhu na úpravu či doplnění způsobu výuky tohoto tématu.

Hlavní těžiště diplomové práce spočívá v experimentální části, která obsahuje popis, přípravu, a zhodnocení e-learningového kurzu **Matematika IV**-*Lineární algebra*, který byl ve spolupráci s *Národním institutem pro další vzdělávání* vytvořen a realizován v rámci projektu *Talnet* v zimním semestru akademického roku 2015/2016 pro žáky středních škol.

V následujícím výčtu uveďme základní cíle, kterých se snaží tato závěrečná práce dosáhnout.

(1) Pokusit se identifikovat prvky lineární algebry, které se objevují v rámci středoškolské výuky, se zvláštním zaměřením na řadu učebnic pro gymnázia a *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.*

(2) Určit možný prostor pro rozšíření látky lineární algebry ve středoškolské matematice a navrhnout možnosti tohoto rozšíření.

(3) Na základě teoretického studia navrhnout, realizovat a vyhodnotit online vzdělávací kurz lineární algebry pro žáky středních škol.

(4) S použitím výsledků připraveného a uskutečněného kurzu okomentovat možnost výuky lineární algebry na středních školách.

Nyní rozeberme podrobněji obsah diplomové práce a uveďme si základní teze jednotlivých kapitol, které jsou v práci obsaženy.

(1) *Vymezení matematické disciplíny lineární algebra z pohledu středoškolské matematiky.* Kapitola seznamuje čtenáře s lineární algebrou jako vysokoškolským předmětem. Studiem *Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia* a základní řady učebnic matematiky pro gymnázia jsou v této kapitole identifikovány klíčové oblasti středoškolské matematiky, na které navazují kapitoly lineární algebry na vysoké škole.

(2) *Fragmenty lineární algebry v současném středoškolském kurikulu, jejich výuka a náměty pro její rozšíření.* Druhá kapitola teoretické části navazuje na

v první kapitole identifikované oblasti a snaží se o jejich didaktické zpracování a napojení na vysokoškolský přístup k tématu. Jedná se o výuku vektorů a vektorových prostorů, soustav lineárních rovnic a pojmu skalární součin na středních školách.

(3) *Specifika online vzdělávání.* Poslední kapitola teoretické části popisuje z hlediska pedagogicko-psychologických aspektů vzdělávání studentů v online prostředí. Tato kapitola tvoří teoretický rámec pro následný návrh a realizaci vzdělávacího kurzu.

(4) *O projektu Talnet.* Charakteristika projektu Talnet. Stručná historie projektu, souhrn aktivit pro nadané žáky a seznam T-kurzů, tj. vzdělávacích online kurzů spuštěných ve školním roce 2015/2016, s větším zaměřením na matematické kurzy.

(5) *Kurz lineární algebry.* Kapitola obsahuje východiska pro návrh i následnou realizaci a řízení kurzu lineární algebry v rámci projektu Talnet. Kapitola přistupuje k tématu z hlediska motivace, formulace výukových cílů a stanovení metod pro ověření jejich plnění s popisem možných rizik pedagogického přístupu.

(6) *Organizace a průběh kurzu.* V této kapitole budou diskutována výsledná podoba kurzu, představení účastníků a naplňování komunikačních schémat v kurzu s akcentem na kapitolu *Specifika online vzdělávání.*

(7) *Popis a vyhodnocení dílčích výukových lekcí.* Nejrozsáhlejší část práce seznamuje s podrobným obsahem jednotlivých výukových lekcí. Každá lekce je popsána třemi charakteristikami. V prvé řadě je to představení obsahu lekce, dále prezentace cílů a důvodu zařazení zadaných úloh a konečně samotné vyhodnocení a reflexe opírající se jak o subjektivní dojem z vedení kurzu, tak, a to především, o odpovědi respondentů v krátkých dotazníkových šetřeních.

(8) *Shrnutí.* Souhrnné zhodnocení experimentální části práce. Vyhodnocení průběhu kurzu na základě vlastní reflexe a výsledků dotazníkového šetření, které bylo opakovaně uskutečněno v průběhu kurzu.

Práce je doplněna četnými přílohami, které jsou k listinné podobě práce připojeny v elektronické podobě na datovém nosiči CD. Disk obsahuje kompletní materiály kurzu, jako jsou například hlavní studijní materiály – prezentace ve formátu PDF, dále soubory úloh k samostatnému řešení a kompletní výsledky dotazníků, jež studenti v rámci průběhu kurzu vyplňovali. Podrobný obsah příloh je uveden na konci práce.

V textu práce je preferováno označení *žák střední školy* pro účastníka prezenčního studia na střední škole. Pro účastníka kurzu, který se absolvování kurzu věnuje ve svém volném čase, je obvykle používáno označení *student.*

Část 1

Teoretická část

KAPITOLA 1

Vymezení matematické disciplíny lineární algebra z pohledu středoškolské matematiky

První kapitola této práce si klade za cíl identifikovat témata středoškolské matematiky, která úzce souvisí s lineární algebrou. Podkladem pro to bude jednak *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [**42**], který zaručuje, že dané téma je opravdu středoškolským tématem, a dále učebnice matematiky pro gymnázia. Řady učebnic se pochopitelně v průběhu let obměňovaly. Protože prioritou této práce je především výuka lineární algebry v současnosti, bylo k identifikaci těchto témat využito patrně nejrozšířenější a nejrozsáhlejší řady učebnic pro gymnázia nakladatelství *Prometheus.*

Taková témata, která mají výrazný průnik s obsahem lineární algebry, budou v kapitole *Fragmenty lineární algebry v současném středoškolském kurikulu, jejich výuka a náměty pro její rozšíření* podrobněji rozvedeny.

Aby tento záměr byl vůbec uskutečnitelný, je v prvé řadě nutné alespoň rámcově vymezit, co se za pojmenováním matematické disciplíny *lineární algebra* vlastně skrývá.

Pro vytvoření přehledu o obsahu této disciplíny bylo užito několik publikací, mezi kterými jsou zahrnuty učebnice lineární algebry pro matematické vysoké školy [**2**], [**3**], [**60**], pro pedagogické obory se zaměřením na matematické vzdělávání [**4**], obory připravující budoucí fyziky [**31**], i publikace zaměřené na technicky orientované obory [**12**], [**45**], [**16**]. Mezi těmito publikacemi jsou jak současné knihy, podle kterých výuka na vysokých školách probíhá, tak publikace, které bychom za současné patrně neoznačili, nicméně mnoho jiných se na ně odkazuje a proto v našem výběru mají své místo.

V této ani jiné kapitole nebude účelem podrobně popsat přístup k tématu lineární algebry ve výše uvedených publikacích. Studium těchto pramenů je pro nás důležité především kvůli stanovení obsahové náplně lineární algebry a postupů, které se v daných publikacích uplatňují.

Obsahově nejrozsáhlejší je ze studovaných publikací kniha *Lineárná algebra a geometria* [**60**]. Z výše uvedeného výčtu je také jedinou, která se pokouší svému čtenáři ozřejmit význam lineární algebry z pohledu, který by mohl být označen jako filozofický. Hlavní teze vymezující úkol a postavení lineární algebry mohou být na základě této publikace parafrázovány v následujících bodech (více viz [**60**, s. 15-16]).

(1) Lineární algebra je *jazyk*, který slouží k vyjádření geometrických idejí a vztahů původně vycházejících z našich geometrických představ, jež však tento rámec, který se v průběhu vývoje ukázal jako omezený, nyní výrazně překračují.[1]
(2) V současnosti kurz lineární algebry tvoří společně s kurzem matematické analýzy dva pilíře univerzitního matematického vzdělání.
(3) V počáteční fázi je lineární algebra pojmově průzračnější a logicky jednodušší z uvedených disciplín, byť je zároveň abstraktnější.[2]
(4) Její základní pojmy, jako jsou *pole*, *vektorový prostor*, *báze*, *lineární zobrazení* apod., jsou definovány jako abstraktní objekty nebo soubory objektů, vyhovující jistým podmínkám (axiomům).[3]
(5) Základní pojmy a metody lineární algebry zasahují do téměř všech oblastí moderní matematiky a jejích aplikací.[4]

Publikace *Lineární algebra* [**2**] je z hlediska této kapitoly jednou z nejdůležitějších, neboť v samém úvodu popisuje trendy přístupu k výuce lineární algebry.

> Lineární algebra patří k základům vysokoškolské matematiky. Na jedné straně přirozeným způsobem navazuje na některé partie matematiky středoškolské a zařazuje je do uceleného systému, na druhé straně je důležitým východiskem dalších matematických disciplín. [**2**, s. 7]

Autor skript dále pokračuje rozdělením přístupů k výuce lineární algebry na vysoké škole.

> Srovnáním většího počtu učebnic lineární algebry je možno snadno nahlédnout, že vymezení obsahu této disciplíny značně kolísá, že látku je možno pojmout nejrůznějším způsobem a že jednotlivé celky lze téměř

[1] Naše geometrická představivost je omezena dvěma rozměry roviny, resp. třemi rozměry prostoru. Lineární algebra studuje prostory jak libovolné konečné dimenze, tak nekonečné dimenze. Studium prostorů nekonečné dimenze je potom úlohou především funkcionální analýzy. Velmi trefné je potom následující přirovnání.

> Aparát lineárnej algebry je tak akousi „slepeckou palicou“, ktorou si „oťukávame“ svet neprístupný nášmu pohľadu, zaťal čo pôvodný geometrický názor sa stáva zdrojom pojmov, intuitívnych vhľadov a metafor, ktoré do tohoto sveta prenášame a s ich pomocou sa v ňom orientujeme. [**60**, s. 15]

[2] To lze považovat za jeden z nosných argumentů, proč by se žáci středních škol měli v rozšiřujícím studiu matematiky zabývat základními tématy lineární algebry.

[3] To bohužel v důsledku často vede ke stylu výuky lineární algebry metodou „definice, věta, důkaz“, tedy deduktivnímu způsobu vyučování. Tím jsme blíže k tomu, že student vysoké školy si nebude schopen poznatky osvojené na střední škole spojit s poznatky novými. Z pohledu střední školy je však užitečné najít takové didaktické zpracování tématu, které by stavělo na již osvojených poznatcích a k výsledným axiomům, které budou daný objekt definovat, se žáci dostávali induktivně.

[4] V přístupu ukázat studentům souvislost lineární algebry s fyzikou, geometrií, statistikou a dalšími dominují nejen publikace [**45**], [**60**], ale také učební text *Pěstujeme lineární algebru* [**31**].

> libovolně permutovat. Rovněž lze zaznamenat velké rozdíly v přístupu, ve výkladu a v míře obecnosti. Někdy je lineární algebra prezentována jako soubor receptů pro řešení jednoduchých úloh (soustavy lineárních rovnic o dvou, resp. třech neznámých, determinanty druhého a třetího řádu, aplikace na analytickou geometrii v rovině a prostoru atd.), jindy je vykládána jako teorie vektorových prostorů (obecně libovolné dimenze) nad komutativním tělesem, někdy dokonce jako určitá partie teorie modulů. [**2**, s. 7]

Předchozí úryvek přivádí k myšlence rozdělit přístup k lineární algebře do dvou proudů. První je přístup zaměřený na budování především teoretických poznatků, chápe lineární algebru jako podobor abstraktní algebry, což dokazuje studiem vektorových prostorů nad komutativním tělesem jako algebraických struktur, apod. Pro tento přístup bude pro další potřeby zavedeno označení *abstraktní*.

Na druhé straně je zde přístup, jež bude označován jako *pragmatický*, který je ve výše citované pasáži popsán především orientací na početní techniky lineární algebry (řešení soustav lineárních rovnic, používání matic a determinantů).

V literatuře se pak lze setkat s přístupem vyloženě abstraktním, například v publikacích [**24**], [**40**], [**39**], což jsou publikace zabývající se primárně abstraktní algebrou. Existují však i publikace z opačného konce spektra, například [**45**] nebo [**12**]. Konečně to lze doložit i následujícím úryvkem.

> Metody lineární algebry patří již po řadu let k nejzákladnějším matematickým poznatkům, se kterými se studenti vysokých škol technických seznamují v prvních ročnících svého studia. Při řešení jakýchkoli lineárních úloh, ať již v technických, ekonomických nebo jiných aplikacích, je používání vektorů, matic, lineárních zobrazení apod. zcela běžné. Význam metod lineární algebry narůstá rovněž tím, že v aplikacích se často používá linearizace nelineárních úloh, takže postupy z lineární algebry lze aplikovat i na řešení nelineárních úloh. [**12**, s. 7]

Autoři publikace [**31**] poukazují na to, že lineární algebra je historicky mnohem mladší disciplínou než například matematická analýza. Připomínají, že jádro matematické analýzy vzniklo v 17. a 18. století, avšak některé základní pojmy lineární algebry vznikly ani ne před sto lety, a partie lineární algebry blízké svým pojetím funkcionální analýze jsou jen pár desítek let staré [**31**, s. 23].

Odpovědi na otázku, proč bychom se studiu lineární algebry na středních školách měli věnovat, by mohly být nejméně dvě. Jednak jde o základní vysokoškolské matematické téma (podobně jako diferenciální a integrální počet funkcí jedné reálné proměnné, který se do obsahu gymnaziálního učiva dostal minimálně díky učebnici *Diferenciální a integrální počet* [**17**]), které má se středoškolskou matematikou mnoho společného, jak poukazuje výše uvedený úryvek z publikace [**2**]. Druhou odpovědí může být přístup lineární algebry projevující se v důkazech matematických vět v tomto oboru. Toho si všímají i autoři publikace [**31**] když poukazují na následující metaforu.

> Přirovnejme analýzu resp. algebru k dvěma následujícím dětským činnostem: stavění hradu z písku (analýza) a sestavení hodin ze stavebnice (algebra). Výrok „hrad už je skoro hotov, zbývá pár věcí uhladit a zamést“ nemá při sestavování hodin protějšek: ozubená kolečka hodin do sebe buď zapadají, nebo ne („skoro zapadají“ je nesmysl). Tak je to i s důkazy v lineární algebře: jsme-li „skoro hotovi“, jsme obvykle již zcela hotovi, zatímco v analýze bývá někdy od „důkazu podle obrázku“ k přesnému důkazu ještě dlouhá cesta. [**31**, s. 23]

Tedy tvrzení lineární algebry a jejich důkazy mohou být pro žáky středních škol přístupnější než některá tvrzení a jejich důkazy z matematické analýzy, která jsou (alespoň v základním pojetí matematické analýzy tak, jak jej nalezneme ve zmíněné středoškolské učebnici) založena často na odhadech (ve smyslu užívání nerovností) nebo tricích. V lineární algebře nalezneme tvrzení, jejichž důkazy může i žák střední školy sám objevovat. Proto v sobě studium lineární algebry skýtá i možnosti pro nácvik netriviálního užívání důkazových technik, se kterými se žáci v učivu gymnázia seznamují. Názorné jsou rovněž některé důkazy existence či jednoznačnosti.

Jak tedy vymezit lineární algebru z pohledu středoškolské matematiky? Zde lze navrhnout dva způsoby pohledu, *obsahový* a *metodický*. První zmíněný obnáší výčet oblastí, kterými se lineární algebra zabývá, resp. které se studují v rámci lineární algebry, a jejich vzájemných vztahů. Těmito vztahy je myšlena pojmová hierarchie lineární algebry. Některá témata jsou přirozeně základem témat jiných. Například studium vektorových prostorů se skalárním součinem nebude předcházet studiu obecných vektorových prostorů. Podobně teoretické studium kvadratických forem nebude předcházet studiu bilineárních zobrazení atp. Proto, máme-li žákům střední školy představit lineární algebru, půjde o témata základní. Mezi ně je v této práci s ohledem na uvedenou literaturu zařazeno studium *vektorových prostorů a podprostorů, soustav lineárních rovnic, matic a determinantů, skalárního součinu, lineárních zobrazení* a *vlastních čísel a vektorů* endomorfismů. Jednotlivá témata tak tvoří tematický průnik studované literatury.

Metodický pohled navazuje na již probíranou problematiku vět a jejich důkazů v lineární algebře. Rovněž sem patří rozlišení *abstraktního* a *pragmatického* pojetí lineární algebry. To v praxi zahrnuje i hledání optimálního řazení obsahové náplně. S tím také souvisí i přesvědčení prezentované v celé této práci, že pro výuku lineární algebry na střední škole není žádoucí ani jeden z krajních přístupů, ale jakýsi střední proud, při kterém se respektuje potřeba teoretických poznatků jako podnětu k vytváření početních algoritmů. V neposlední řadě je součástí metodického pohledu také propojení pojmů lineární algebry s geometrií. Mnoho konceptů lze graficky znázornit, avšak ve většině zmiňovaných publikací se s tímto přístupem nesetkáme.

Je-li vymezen obsah lineární algebry, alespoň v takové podobě, která plně postačuje pro další studium, je třeba se konečně zaměřit na konkrétní učební obsah matematiky na střední škole, ve kterém lze nalézt určitý tematický průnik.

Jak bylo v úvodu řečeno, důležité postavení v oblasti vymezení obsahu matematiky pro gymnázia má *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [**42**], zkráceně RVP. Tento dokument rozděluje obsah učiva matematiky do následujících oblastí: *Argumentace a ověřování*, *Číslo a proměnná*, *Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost*, *Závislosti a funkční vztahy*, *Geometrie*.

Souvislost s lineární algebrou zde nalezneme v očekávaných výstupech v oblastech *Číslo a proměnná*, kde mezi výstupy nalezneme, že žák řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení. Dále rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav. Učivem jsou potom rovnice a nerovnice – lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy, kvadratická rovnice.

V oblasti *Geometrie* jsou to výstupy, kdy žák užívá různé způsoby analytického vyjádření přímky v rovině, řeší analyticky polohové a metrické úlohy o lineárních útvarech v rovině, využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření, z analytického vyjádření určí základní vlastnosti o kuželosečce, řeší analyticky úlohy na vzájemnou polohu přímky a kuželosečky. Z učiva jsou to především témata vektory a operace s nimi, analytická vyjádření přímky v rovině, kuželosečky.

Z *Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia* plyne, že s některými tématy lineární algebry se žáci gymnázií ve svém studiu setkávají. Rovněž zde zjišťujeme, že mezi tématy není např. analytická geometrie v prostoru.

Přistupme nyní k identifikaci oblastí lineární algebry, které se vyskytují v učebnicích matematiky pro gymnázia. Pro potřeby této kapitoly byla použita řada učebnic pro gymnázia nakladatelství *Prometheus*. V následující kapitole budou některá témata blíže rozvedena a k popisu didaktického přístupu bude vždy použito větší množství literatury než jen tyto základní publikace, a to především proto, abychom viděli, že přístup různých gymnaziálních učebnic může být různý. To platí i v případě učebnic pro střední odborné školy, které v následující kapitole zaujmou rovněž významné postavení, neboť fragmenty lineární algebry, kterými budeme hledané oblasti nazývat, jsou častěji přítomny právě v učebnicích pro střední odborné školy. Není to ovšem pravidlem.

První studovanou učebnicí je publikace *Základní poznatky z matematiky* [**6**]. Obsahem této učebnice, jak název napovídá, jsou především základy naivní teorie množin a výrokové logiky. Samozřejmě jsou zde přítomny i další kapitoly, například elementy teorie čísel nebo algebraické výrazy. To vše jsou témata nutná pro studium jakéhokoliv oboru matematiky.

Další důležitou součástí této publikace je kapitola zabývající se důkazy a důkazovými technikami. Je zde diskutován důkaz přímý, nepřímý a důkaz sporem. Lineární algebra v tomto ohledu nabízí významnou základnu tvrzení, na kterých lze velmi názorně tyto důkazové techniky uplatňovat a demonstrovat, což podporuje abstraktní přístup k vyučovanému tématu.

Další částí této učebnicové řady je publikace *Rovnice a nerovnice* [**18**]. Dozajista nejvýznamnější kapitolou pro oblast lineární algebry je řešení soustav lineárních rovnic. Učebnice se samozřejmě zabývá pojmy jako ekvivalentní úpravy, apod. Je zde diskutována i Gaussova eliminační metoda, nesetkáme se zde však s maticovou notací.

Při hledání společných témat středoškolské výuky matematiky a lineární algebry je třeba si vymezit jisté hranice, co ještě budeme považovat za prvek lineární algebry a co již ne. Pokud bychom totiž uplatňovali vysoce abstraktní přístup a lineární algebru považovali za podobor abstraktní algebry, všechna témata, která nějakým způsobem souvisí s algebrou následně mají vztah i s algebrou lineární.

To souvisí s následující učebnicí *Funkce* [**32**], ve které se definují pro matematiku důležité pojmy jako zobrazení a funkce. Pro napojení na lineární algebru ale tato učebnice nenabízí žádné klíčové téma, i když samozřejmě v lineární algebře se vyskytují prostory funkcí, na kterých jsou definovány operace sčítání funkcí a násobení funkce skalárem (tj. prvkem z tělesa T).

V *Goniometrii* [**33**] se lze z hlediska lineární algebry zaměřit na téma, které s lineární algebrou přímo nesouvisí, ale souvisí s ní přeneseně. V této publikaci se žáci středních škol seznamují s kosinovou větou, která má uplatnění při odvozování vztahu pro výpočet úhlu mezi dvěma vektory.

V geometrických publikacích z této učebnicové řady lze pozorovat větší výskyt témat spojených s lineární algebrou. S *Planimetrií* [**37**] se obvykle žáci setkávají dříve. V této publikaci je zaveden pojem zobrazení v rovině. Až na posunutí o nenulový vektor jsou všechna uvedená zobrazení (otočení kolem počátku O, středová souměrnost kolem počátku O, osová souměrnost podle přímky procházející počátkem soustavy souřadnic v rovině, identita) příklady lineárních zobrazení. Podobně tato učebnice obsahuje pojmy jako samodružný bod, samodružná přímka, což úzce souvisí s kapitolou vlastní čísla a vlastní vektory matice takového zobrazení.

Znalosti získané z této publikace se dají při výuce lineární algebry využít například při interpretaci matice jako matice zobrazení.

V publikaci *Planimetrie* se také v části věnované posunutí setkáváme s pojmy *orientovaná úsečka*, *souhlasně orientované úsečky*, apod. Někdy se posunutí používá k definování vektoru, tyto poznatky proto mohou být pro takový přístup klíčové.

Výstupy této učebnice rozšiřuje o situaci v prostoru *Stereometrie* [**38**]. Ta přidává poznatky o shodných a podobných zobrazeních v prostoru. Probíraná látka přímo s lineární algebrou nesouvisí, ale může najít v lineární algebře uplatnění, pokud se do této matematické disciplíny snažíme vnášet geometrický náhled na problém.

Analytická geometrie [**19**] nabízí nejvýraznější průnik učiva s lineární algebrou. Významnou část této publikace zabírá seznámení s pojmem *vektor*, který je klíčovým pojmem lineární algebry.

V rámci studia vektorů je v učebnici obsažen i *skalární součin*, který je nicméně v lineární algebře samostatným tématem a jeho pojetí je odlišné od pojetí středoškolské analytické geometrie.

Souřadnice, které také v analytické geometrii hrají významnou roli a mohou spojovat toto středoškolské téma s lineární algebrou, jsou v lineární algebře opět konstruovány poněkud odlišným způsobem. Spojitost s lineární algebrou mají i další témata této učebnice, jako kuželosečky nebo poslední část knihy věnovaná rovnici kulové plochy.

U další publikace, *Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika* [**7**], by se mohlo na první pohled zdát, že její obsah nebude mít s lineární algebrou mnoho společného. Nesmíme ale zapomínat na to, že např. studium determinantů začíná studiem *permutací* na množině, takže překryv s lineární algebrou i u tohoto tématu existuje. Také statistika využívá závěrů lineární algebry, nicméně tak, jak je tato středoškolská učebnice pojata, není její použití pro budování představy lineární algebry úplně vhodné a tyto souvislosti zůstávají v největší míře skryté. Přímou souvislost s lineární algebrou pak nalezneme v kapitole *Korelace*, ve které se v poznámce vyskytuje zmínka o *Cauchy-Schwarzově nerovnosti.*

Na středoškolské úrovni zkoumání číselných posloupností, reprezentované učebnicí *Posloupnosti a řady* [**34**], je v tomto tématu pro lineární algebru pravděpodobně nejvýznamnější samotná definice posloupnosti. Podobně jako učebnice *Funkce*, která neuvádí např. součet funkcí, se ani tato kniha nevěnuje zavedení operací s posloupnostmi. Nicméně znalost tématu číselných posloupností umožňuje vytváření dalších modelů vektorových prostorů. Společně s pojmy omezenost nebo limita posloupnosti, které jsou v učebnici diskutovány, lze nacházet příklady vektorových podprostorů prostoru reálných posloupností.

Dále je důležité, že se v této učebnici také žáci seznamují s matematickou indukcí, kterou budou potřebovat při případném budoucím studiu lineární algebry. Například *Steinitzova věta o výměně*, jedno ze základních tvrzení lineární algebry, se dokazuje netriviálním uplatněním principů matematické indukce.

Další knihou v řadě, kterou se zabýváme, jsou *Komplexní čísla* [**8**]. Studium komplexních čísel nám opět rozšiřuje počet modelů vektorových prostorů. Aritmetické pojetí vektoru jako uspořádané n-tice reálných čísel se tak díky novému číselnému oboru může rozšířit i o uspořádané n-tice čísel komplexních. Dále je zde geometrická reprezentace komplexního čísla jako vázaného vektoru a souvislost mezi aritmetickými operacemi s komplexními čísly a operacemi s geometrickými vektory.

Řadu učebnic pro gymnázia uzavírá *Diferenciální a integrální počet* [**17**], kde překryv s lineární algebrou na základní úrovni chybí, nicméně i zde lze najít souvislosti.

Například derivování polynomů na prostoru polynomů stupně nejvýše n je lineární zobrazení. Podobně může být skalární součin na prostoru polynomů definován určitým integrálem.

V předešlých odstavcích byly v každé z učebnic matematiky pro gymnázia vybrány oblasti, které nějakým způsobem souvisí s lineární algebrou. Je třeba mít na paměti, že v jistém smyslu je takové vymezení závislé právě na pojetí lineární algebry jako matematické disciplíny. Proto bylo úvodní vymezení lineární algebry opodstatněnou součástí této kapitoly. Z témat je rovněž patrné, že některá se více přiklánějí k přístupu označeném jako abstraktní, jiná jsou čistě pragmatická.

Nejvýraznější překryv lze shledat ve třech oblastech, které budou podrobněji rozpracovány v následující kapitole. Jednak je to oblast *vektory a vektorové prostory* vycházející z přístupu analytické geometrie k pojmu vektor.

Samostatnou oblastí pak bude rozuměno téma *skalární součin*, které je ve středoškolském pojetí svázáno s tématem vektorů, nicméně z přístupu lineární algebry je výhodnější jej studovat zvlášť.

V neposlední řadě je to téma *soustavy lineárních rovnic*, které bývá také označováno za základní téma lineární algebry. Není překvapující, že v publikaci [**31**, s. 15] je zařazeno mezi témata, která v historii přispěla k rozvoji lineární algebry jako takové. Toto téma je v praktickém důsledku velmi úzce spojeno i s tématem *matice*. Proto, byť se v uvedených středoškolských učebnicích s maticemi nesetkáme, bude toto téma rovněž zařazeno mezi hledané fragmenty lineární algebry, neboť bude v následující kapitole ukázáno, že v literatuře určené pro žáky středních škol (myšleno v učebnicích) se toto téma vyskytuje.

KAPITOLA 2

Fragmenty lineární algebry v současném středoškolském kurikulu, jejich výuka a náměty pro její rozšíření

Cílem předchozí kapitoly bylo v učebním obsahu středních škol, s důrazem na gymnázia, identifikovat prvky lineární algebry. Jednalo se o témata či tematické celky, které jsou svým obsahem blízké tématům lineární algebry a mohou být obsahem vysokoškolských kurzů této matematické disciplíny. Rovněž bylo možné zaznamenat, že takových témat je relativně velké množství, ovšem záleží na naší představě lineární algebry (buď jako abstraktní matematické teorie nebo jako v praxi použitelné disciplíny), které z těchto identifikovaných oblastí jsou pro nás klíčové.

Mezi všemi tématy byla identifikována především tři, která buď souvisejí s analytickou geometrií, nebo problematikou řešení soustav lineárních rovnic; konkrétně se jedná o témata *vektory a vektorové prostory*, *skalární součin* a *soustavy lineárních rovnic a matice*. Tato témata budou v rámci aktuální kapitoly podrobněji rozebrána z hlediska didaktického přístupu, který se uplatňuje nebo uplatňoval jak v učebnicích pro gymnázia, tak pro střední odborné školy.

Pro výuku lineární algebry např. v rozšiřujících seminářích z matematiky na středních školách, popřípadě v mimoškolním vzdělávání (což je případ online vzdělávacího kurzu, jež byl realizován v rámci experimentální části předkládané diplomové práce) je možné v rozšiřování těchto témat možno očekávat postup k budování základních pojmů této disciplíny. Proto budou současně u jednotlivých oblastí diskutovány náměty pro možná rozšíření výuky v tomto směru a možné problémy, které jsou s tím spojeny.

2.1. Vektory a vektorové prostory

Prvním ústředním tématem lineární algebry, které je možno nalézt v učebním obsahu nejen gymnázia, ale i středních odborných škol, je bezpochyby studium *vektorů*. Důvod, proč se tématem vektorů v analytické geometrii zabývat, je především studium konkrétního a v zásadě základního modelu vektorového prostoru, jehož vlastnosti jsou klíčové pro další možná zobecňování.

Z didaktického hlediska je téma vektorů tématem značně problematickým, na což upozorňují například autoři publikace [**56**, s. 19]. Uváděným důvodem je myšlenkově náročný způsob konstrukce vektorů pomocí *faktorizace*. Rovněž je zde zmíněna skutečnost, že s vektory se žáci setkávají jak v hodinách matematiky, tak fyziky. Zde je navíc možné ještě doplnit, že ve fyzice se jedná o téma úvodní, které souvisí často s problematikou fyzikálních veličin, jednotek a jejich měření. Je tedy otázkou, jaký je vztah vektorů ve fyzice s vektory v matematice. Právě v této oblasti je mezioborový překryv možná významnější než kdekoliv jinde.

Můžeme tedy vektory, se kterými se žáci setkávají v předmětu fyzika na střední škole a které budeme nazývat *fyzikálními vektory*, považovat ve své podstatě za tytéž objekty jako vektory v matematice? Odpověď na tuto otázku nám dává studium fyzikálních učebnic a odborné fyzikální literatury.

Například v učebnici fyziky pro střední odborné školy [**22**] nalezneme:

> *Vektorové fyzikální veličiny* neboli *vektory* jsou veličiny, k jejichž úplnému určení je třeba znát nejen jejich číselnou hodnotu a měřicí jednotku, ale i směr. [**22**, s. 14]

V této konkrétní publikaci se se znázorněním vektoru orientovanou úsečkou setkáme až mnohem později, v kapitole *Rychlost hmotného bodu*, kde je uvedeno:

> … Okamžitá rychlost je tedy vektorová veličina. Znázorňujeme ji orientovanou úsečkou, jejíž délka vyjadřuje velikost rychlosti a její poloha směr rychlosti. [**22**, s. 24]

Problémem však zůstává, že pojem *orientovaná úsečka* v rámci této publikace není nikde vyložen, podobně jako význam pojmu *směr*.

Jiná situace nastává v případech přehledů fyzikálního učiva pro střední školy, například v publikacích [**46**] a [**55**]. Zde se vektory od začátku značí orientovanými úsečkami. Navíc v publikaci [**46**, s. 24-25] autoři rozlišují *vázané vektory*, vektory *vázané na přímku* a *vektory volné*. Definují operace s vektory a rovněž pojmy jako nulový vektor a opačný vektor. V obou přehledech se také setkáme s rozkladem vektoru do ortonormální báze $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Pojmu ortonormální báze se ale samozřejmě neužívá a jednotkové vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ se zavádějí v již předem zavedené soustavě souřadnic Oxy. V přehledu [**55**, s. 23] je navíc diskutován případ, jak určit souřadnice vektoru, jehož počátek neleží v počátku soustavy souřadnic. V této souvislosti se používá pro vektor vázaný do počátku označení *průvodič* nebo také *radiusvektor* či *polohový vektor*.

Nutno poznamenat, že ve fyzikálních učebnicích a přehledech pro střední školu se například jen málo setkáváme se situacemi, kde by vektory byly popisovány vůči souřadnicovým soustavám. Naopak při studiu analytické geometrie se pojem souřadnicová soustava definuje na samém začátku a vše se pak této kartézské soustavě souřadnic podřizuje.

Zabýváme-li se studiem vektorů na středních školách obecně, je fyzikální přístup k pojmu vektor nutno neopomíjet. Tato práce se přiklání k názoru, že fyzikální vektory a matematické vektory nejsou z koncepčního hlediska zaměnitelné. Ve fyzice se totiž vektorem často myslí přímo daná orientovaná úsečka (což odpovídá *vázanému vektoru* nebo *umístění vektoru*), z hlediska matematiky je vektorem častěji míněn vektor volný, který, jak bude vzápětí ukázáno, je jistá množina orientovaných úseček. Navíc ve fyzice lze skládat vektory pouze stejných fyzikálních veličin, v matematice máme vektor bez jeho kvalitativního charakteru, tudíž skládat (sčítat) lze v daném geometrickém prostoru libovolné dva vektory. Rozdílu mezi vektory fyzikálními a geometrickými si podrobněji všímá učebnice pro gymnázia [**47**], kde rovněž uvádí: „Vidíte, že jde o *různé pojmy*, které mají *stejné grafické znázornění* orientovanou úsečkou.“ [**47**, s. 66]

Pro potřeby budoucího studia lineární algebry je významnější přístup k tématu vektorů v hodinách matematiky na gymnáziích a středních odborných školách. Další diskuze vychází ze středoškolských učebnic [**19**], [**10**], [**28**], [**21**] a přehledu středoškolské matematiky [**36**].

V učebnici *Analytická geometrie* [**19**] (a bez větších koncepčních změn i v učebnici pro střední odborné školy [**10**]) probíhá postup zavedení vektorů následovně.

Předně se definuje pojem orientované úsečky a pro následnou faktorizaci množiny všech orientovaných úseček se dále zavádí *velikost orientované úsečky* a pojmy *souhlasně rovnoběžné* nebo *nesouhlasně rovnoběžné* orientované úsečky či kdy mají orientované úsečky stejný *směr.* Toho je pak využito k definici vektoru.

> Vektor je množina všech orientovaných úseček téže velikosti a téhož směru. [**10**, s. 21]

V odborné literatuře (např. [**5**, s. 11-13] nebo [**58**, s. 45]) je konstrukce vektoru podrobněji rozebrána zavedením relace, která se nazývá *ekvipolence.* O dvou orientovaných úsečkách $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ řekneme, že jsou ekvipolentní, právě tehdy, když středy úseček AD a BC jsou totožné. Takto zavedená relace na množině všech orientovaných úseček je ekvivalencí. Lze jednoduše ukázat, že ekvipolence je relace reflexivní, symetrická a tranzitivní. Má tedy smysl hovořit o rozkladu množiny všech orientovaných úseček podle ekvipolence na rozkladové třídy. Relací „být ekvipolentní“ se vlastně nahrazuje podmínka toho, aby orientované úsečky měly stejnou velikost, směr i orientaci. Vytvořené rozkladové třídy jsou ony množiny orientovaných úseček, které jsou stejně dlouhé, mají stejný směr i orientaci, a proto se jedná o vektory.

Jiný pohled na danou problematiku přináší učebnice pro gymnázia [**28**, s. 17], ve které je vektor definován jako *posunutí.* Jelikož posunutí je vzájemně jednoznačné zobrazení bodových množin, je vektor množinou uspořádaných dvojic bodů (to odpovídá pojmu orientovaná úsečka). V této učebnici se navíc setkáme s označením např. $\boldsymbol{a}(A) = A'$, což znamená, že vektor $\boldsymbol{a}$ zobrazuje bod A do bodu A'.

Kladnou stránkou učebnice [**28**] je přístup k pojmu souřadnice vektoru. Jelikož se tato učebnice zabývá analytickou geometrií, jsou souřadnice zavedeny na jejím samém začátku. V kapitole *Vektory I* je výklad operací s vektory proveden mimo souřadnicovou soustavu a navíc se zde setkáme s pojmy jako lineární kombinace vektorů nebo rozklad vektoru na složky. Právě zmiňovaného rozkladu vektoru na složky je využito pro definování souřadnic vektoru jako koeficientů lineární kombinace jednotkových a navzájem kolmých vektorů $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$.

Význam publikace [**21**] spočívá především v následujícím úryvku, který dobře popisuje směřování této kapitoly k závěru, že pro geometrické znázornění pojmů lineární algebry, jakými jsou například vektorové podprostory, je užívání volných vektorů nevhodné.

> Je zřejmé, že vektor je abstraktní pojem popisující jistou množinu orientovaných úseček. Vektor si nemůžeme znázornit; znázornit můžeme jen některé z jeho umístění. [**21**, s. 24]

Klíčovým pojmem lineární algebry je pochopitelně pojem vektorového prostoru. Tento pojem lze v omezené podobě dohledat například v již zmiňovaných publikacích [**10**] a [**36**]. V prvním případě jde o učebnici pro střední odborné školy netechnického zaměření, ve které se samostatně vyskytuje kapitola s názvem *Základy lineární algebry*. Její obsah bude podkladem pro diskuzi i v dalších sekcích této kapitoly, významněji v sekci *Soustavy lineárních rovnic a matice*. Pro tuto sekci mají význam úvodní strany zmiňované kapitoly této publikace, které se zabývají definicí n-rozměrného reálného aritmetického vektoru. Z didaktického hlediska je zajímavý přechod od vektorů studovaných v rovině, tedy volných geometrických vektorů, k vektorům aritmetickým.

> Ve zvolené souřadnicové soustavě bylo také možné každý vektor vyjádřit pomocí souřadnic – každý vektor byl jednoznačně určen uspořádanou dvojicí čísel a také obráceně každé uspořádané dvojici čísel odpovídal určitý vektor. V důsledku tohoto vzájemně jednoznačného přiřazení vektorů v rovině a uspořádaných dvojic reálných čísel je možné definovat vektory v rovině přímo jako tyto uspořádané dvojice. Pokročíme však ještě dále a za vektory nebudeme považovat jen uspořádané dvojice, ale pojem vektor zobecníme a rozšíříme na uspořádané n-tice, kde n je libovolné přirozené číslo. [**10**, s. 85]

Z hlediska lineární algebry je za několika výše citovanými větami schován princip izomorfismu vektorových prostorů. Konkrétně prostoru volných geometrických vektorů a aritmetických vektorů. Další část příslušné kapitoly se zabývá výhradně aritmetickými vektory, na základě studia operací s těmito vektory pak formuluje závěr, že množina všech n-členných aritmetických vektorů, pro které jsou definovány operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem (standardním způsobem, tj. po složkách), nazýváme n-rozměrný aritmetický vektorový prostor. Bohužel se v rámci této kapitoly autor nevrací k vektorům geometrickým, aby formuloval podobné tvrzení i pro ně. Měli bychom v tu chvíli hned dva modely vektorového prostoru. Takto to vypadá, že vektorový prostor je pouze ten s aritmetickými vektory.

Přístup publikace [**36**] k výuce vektorové algebry je z hlediska předešlého ojedinělý. Předně je třeba zdůraznit, že jde o přehled středoškolské matematiky, tedy nikoli učebnici v pravém slova smyslu. Důsledně jsou v kapitole *Analytická geometrie* rozlišeny podkapitoly *Orientované úsečky, vázané vektory* a *Volné vektory.* Jsou zde rozlišovány pojmy *vektorový prostor vázaných vektorů* a *vektorový prostor volných vektorů.* Definice vektorového prostoru vázaných vektorů je následující:

> Zvolme pevný bod P prostoru. Označme $\boldsymbol{PX}$ orientovanou úsečku s daným počátečním bodem P a libovolným koncovým bodem X. Pro orientované úsečky $\boldsymbol{PX}$ s počátečním bodem P budeme *definovat operaci sčítání* a *operaci násobení reálným číslem*; tyto orientované úsečky se pak nazývají *vázané vektory.* Množina V všech vázaných vektorů (se společným počátečním bodem P) se nazývá *vektorový prostor vázaných vektorů.* [**36**, s. 545]

Z pohledu lineární algebry je problém v tomto pojetí předně v absenci axiomů, které operace sčítání vázaných vektorů a násobení vázaného vektoru reálným číslem mají splňovat. Vlastnosti daných operací jsou v publikaci prodiskutovány až později.

Budování vektorového prostoru volných vektorů v zásadě respektuje postup faktorizace, který byl rozebrán v předešlých odstavcích. V přehledu na straně 551 je uveden výčet s názvem *Základní věty vektorové algebry*, jež jsou strukturovány do tvaru, který připomíná soubor axiomů vektorového prostoru. To je především doplněno následující poznámkou:

> Na vysoké škole uvidíte, že těmito vlastnostmi jako axiomy se v lineární algebře *axiomaticky zavádí pojem vektoru*, jehož speciálními případy jsou *geometrické vektory.* [**36**, s. 552]

Nejvýraznější učebnicí, která se problematice vektorových prostorů blíže věnuje, lze označit gymnaziální učebnici [**47**]. V samostatné kapitole s názvem *Vektorový prostor* se upozorňuje na rozlišení mezi vektory *geometrickými* a *aritmetickými* v podobném smyslu, jakým byla představena lineární algebra jako matematická disciplína v první kapitole.

> Pomocí aritmetických vektorů překonala matematika omezenost geometrických představ třemi rozměry hmotného světy; už v polovině 19. století se uvažovalo o vektorech – uspořádaných n-ticích čísel i při $n > 3$. Při zpřesňování základů různých algeber se ukázalo, že pro objekty, kterým byly ve fyzice, geometrii a číselné algebře dávány názvy „vektor“, jsou typické dvě operace
>
> *sčítání vektorů a násobení vektorů reálnými čísly.*

> Okolnost, že *různé* systémy objektů měly *stejné* vlastnosti vzhledem k uvedeným operacím, byla podnětem ke zrodu pojmu vektorový prostor. [**47**, s. 66]

Pro studium lineární algebry je vektorový prostor geometrických vektorů jediným modelem vektorového prostoru, na kterém lze relativně abstraktní matematické pojmy názorně demonstrovat. Pro účely lineární algebry je však výhodný vektorový prostor vázaných vektorů, kdy každý vektor v tomto prostoru je znázorněn právě jednou orientovanou úsečkou a své významné postavení má i nulový vektor. Nevhodnost vektorového prostoru volných vektorů spočívá v jeho myšlenkově obtížné definici a s ní vznikajícími problémy typu co je to vektor a jak jej znázornit. Je třeba si uvědomit, že máme-li vektor definován jako rozkladovou třídu, je nosičem algebraické struktury vektorového prostoru množina všech rozkladových tříd podle relace ekvipolence. Dalším problémem je rovněž definování algebraických operací s těmito vektory, neboť zcela korektně bychom měli v případě volných vektorů ukázat, že součet dvou vektorů je opět vektor a že operace sčítání vektorů nezávisí na výběru reprezentantů daných rozkladových tříd. V jistém smyslu je na to pamatováno ve zmiňované učebnici [**28**, s. 21] z roku 1979.

Podíváme-li se do učebnic lineární algebry pro vysoké školy (např. [**31**], [**3**], [**2**]) je bohužel smutným faktem, že mezi příklady (modely) vektorových prostorů nalezneme buď pouze vektorový prostor vázaných geometrických vektorů, nebo se geometrické vektory mezi příklady vůbec nevyskytují. Nejčastěji užívaným příkladem se pak stává prostor aritmetických vektorů. Zde je ovšem místy třeba rozlišit, že někteří autoři reálné aritmetické vektory a geometrické vektory ztotožňují (viz například [**45**] nebo [**16**]) podle principu izomorfismu, na který již bylo v tomto textu poukázáno.

Abychom problematiku vektorových prostorů ve středoškolské matematice uzavřeli, je třeba přiznat, že ačkoliv se toto téma v publikacích určených pro žáky středních škol vyskytuje, ve většině studovaných publikací se mu nevěnuje zvýšená pozornost a už vůbec se s ním nezachází jako s obecným pojmenováním pro obecnou algebraickou strukturu. Výjimku tvoří učebnice [**47**].

Pokud by předmětem příslušného rozšiřujícího kurzu se zaměřením na lineární algebru měly být vektorové prostory, bylo by žádoucí uvádět příklady více modelů vektorových prostorů. Z hlediska středoškolského obsahu matematického vzdělávání zde přicházejí v úvahu nejenom vektorové prostory aritmetické a geometrické (především vektorový prostor vázaných vektorů), ale například i vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše n nad tělesem reálných čísel nebo vektorový prostor číselných posloupností. Oba tyto modely jsou uvedeny i ve zmíněné učebnici pro gymnázia [**47**, s. 67]. Navíc vektorové prostory n-rozměrných aritmetických vektorů nad tělesem T pro $n = 1$ přecházejí ve vektorové prostory tělesa T nad sebou samým, čili lze jednoduše ukázat, že např. reálná čísla, racionální či komplexní čísla (jsou-li rovněž v obsahu vzdělávání) tvoří příklady vektorových prostorů.

K výuce je možné přistupovat jak *deduktivně*, tj. od obecného ke konkrétnímu, tak *induktivně*, tj. od konkrétních příkladů k obecným. V uvedených učebnicích lineární algebry jednoznačně převažuje přístup deduktivní. Je ke zvážení, zda je ve středoškolské praxi definice vektorového prostoru na prvním místě a uvedení konkrétních modelů na místě druhém žádoucí, či nikoliv. Střední cestou by mohlo být popsat vlastnosti geometrických vektorů, z nich zformulovat definici vektorového prostoru a s touto definicí konfrontovat kandidáty na případné další modely stejné algebraické struktury. Jakýkoliv postup je však potřeba zvážit z hlediska úrovně žáků, časových prostředků a cílů, kterých výukou tohoto tématu chceme dosáhnout. Lze si představit, že na matematicky orientovaných gymnáziích lze postupovat více abstraktní cestou, jako je to například provedeno v experimentální části této práce při návrhu online vzdělávacího kurzu pro nadané žáky středních škol.

Odpovědět na otázku, jakým směrem bychom měli výuku tématu vektory zacílit, abychom z ní mohli těžit v oblasti lineární algebry, je obtížné. Předešlé odstavce ukázaly, že vítané koncepty byly ve středoškolských učebnicích v minulosti obsaženy. Dnešní pojetí tématu je obtížné a žáci s ním zřejmě mají problémy. Možnosti mohou být shrnuty v několika málo bodech.

Jednak jde o důslednější rozdělování mezi vektory volnými a vázanými. Jak bylo řečeno, vázané vektory jsou pro další budování představ žáků z hlediska samotné lineární algebry názornějším modelem. Klást větší důraz na popis vlastností operací sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. Skalární součin, který bude diskutován v další sekci, je možné do výuky zařazovat později – aby žákům nesplýval se základními operacemi s vektory. A především je to využití rozkladu vektorů a naopak vytváření lineárních kombinací s vektory. Toho lze využít pro velmi přirozené zavedení souřadnic vektoru vzhledem k bázi.

Možností další propedeutiky je zařazování více úloh, ve kterých si žáci sami zavádějí do problémů souřadnicové soustavy, s tím souvisí i zadávání úloh, ve kterých souřadnicové osy nemusejí být na sebe kolmé a nemusejí mít shodné měřítko. Dále je to rozlišování mezi vektory geometrickými a aritmetickými.

Výše uvedené možnosti rozšíření je lépe chápat jako výčet oblastí, na které by bylo vhodné zacílit pozornost, neboť úzce souvisí s lineární algebrou, resp. na konkrétním modelu vektorového prostoru geometrických vektorů umožňují formulovat obtížnější koncepty lineární algebry.

Výhodou kontaktní výuky, tedy výuky realizované fyzicky ve třídě, je skutečnost, že učitel zná předešlé znalosti a schopnosti svých žáků. To je o poznání obtížnější, pokud výuku připravujeme pro neznámého žáka, o jehož schopnostech a znalostech dané problematiky můžeme pouze usuzovat, než že bychom je skutečně znali. S tím souvisí i v experimentální práci připravovaný kurz lineární algebry, jehož cílový adresát nebyl do zahájení samotného kurzu znám. To samozřejmě omezuje možnosti rozšiřování středoškolských témat uvedeným způsobem, neboť není dopředu jasné, zda bude co rozšiřovat.

2.2. Skalární součin

V druhé části této kapitoly bude diskutováno téma skalárního součinu s ohledem na jeho pojetí v lineární algebře a v analytické geometrii na středních školách. Předně bude pojednáno o tom, co znamená skalární součin pro lineární algebru.

V lineární algebře je pojem skalární součin obecný pojem, který zahrnuje dodatečnou strukturu definovanou na vektorovém prostoru, jež umožňuje na tomto vektorovém prostoru zavést základní geometrické pojmy jako jsou délka vektoru nebo velikost úhlu dvou vektorů. Technicky se jedná o zobrazení, které dvěma vektorům z vektorového prostoru nad daným tělesem (v celé diplomové práci je v souvislosti se skalárním součinem uvažováno pouze těleso reálných čísel) přiřazuje právě jeden prvek z tohoto tělesa.[1] Vektorový prostor se skalárním součinem bývá někdy označován jako unitární prostor. Tohoto označení bylo použito i v případě jedné z výukových lekcí online vzdělávacího kurzu lineární algebry, byť některá literatura (např. [**2**]) uvádí, že označení unitární prostor je připisováno vektorovému prostoru nad tělesem komplexních čísel, na kterém je skalární součin definován.

S tímto přístupem lineární algebry souvisí jednak to, že skalární součin není ve své podstatě binární algebraická operace na množině, tedy že se nejedná o součin v pravém slova smyslu, a jednak pod názvem skalární součin může být myšleno jakékoliv zobrazení, které splňuje jistý soubor axiomů.

Naopak z přístupu analytické geometrie vychází skalární součin dvou vektorů jako jednoznačně definovaný předpis a z pojetí výuky analytické geometrie se nepředpokládá, že by takových skalárních součinů mohlo být definováno více. Právě jistý rozpor mezi mnohostí a unikátností skalárního součinu je možné shledat jako problematickou překážku v okamžiku, kdy se budeme snažit rozšířit přístup uplatňovaný v analytické geometrii směrem k přístupu lineární algebry. Možný způsob provedení takového přemostění bude demonstrován později. Uplatňují se při něm však znalosti, u kterých se předpokládá, že si je žáci studiem lineární algebry již osvojili. Je samozřejmé, že pro budování konceptu skalárního součinu jako pojmu lineární algebry je nutné projít v předchozí sekci probíranou problematikou vektorů a vektorových prostorů.

---

[1] Nechť V je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Zobrazení $g : V \times V \to \mathbb{R}$ nazveme skalárním součinem na prostoru V, pokud platí

(1) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V : g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,
(2) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : g(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,
(3) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V : g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$,
(4) $\forall \boldsymbol{x} \in V : g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, navíc $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ právě tehdy, když $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Dříve, než si ukážeme možnou cestu, zastavme se nad přístupy k tématu skalárního součinu v již vzpomínaných učebnicích matematiky a přehledu učiva matematiky pro střední školy.

Začněme s učebnicí analytické geometrie [**19**]. Téma skalárního součinu je zařazeno okamžitě po zavedení a popsání vlastností základních operací s vektory, tj. sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem. Následně se pro dva vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, které jsou dány svými souřadnicemi vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic Oxy, definuje skalární součin uvedením předpisu $u_1v_1 + u_2v_2$. Autoři se vzápětí zabývají označením skalárního součinu jako $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ nebo krátce $\boldsymbol{uv}$. Definují také $\boldsymbol{u}^2$ jako $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{uu}$ a uvedou vztah mezi délkou vektoru, která je zavedena v předešlé kapitole, se skalárním součinem jako $\boldsymbol{u}^2 = |\boldsymbol{u}|^2$. V tomto postupu lze spatřovat problematický moment v okamžiku, kdy chceme skalární součin precizovat jako zobrazení. Zavedený způsob značení zde má charakter bližší označení binární algebraické operace, který se však v lineární algebře nepoužívá. Dále jsou v učebnici uvedeny vlastnosti skalárního součinu, které budou blíže prodiskutovány níže, a jsou dokázány přepisem vektorů do souřadnic a porovnáním obou stran dokazovaných rovností.

Význam skalárního součinu je v učebnici odvozen dodatečně. Postup je následující. Vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic docílíme toho, aby nenulový vektor $\boldsymbol{u}$ měl v této soustavě souřadnice $(|\boldsymbol{u}|, 0)$. Druhý nenulový vektor $\boldsymbol{v}$, o kterém předpokládáme, že s vektorem $\boldsymbol{u}$ svírají úhel o velikosti φ, je v téže souřadnicové soustavě popsán dvojicí souřadnic $(|\boldsymbol{v}|\cos\varphi, |\boldsymbol{v}|\sin\varphi)$. Dosazením do vztahu pro skalární součin je pak odvozeno, že $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$. Odtud lze odvodit předpis pro velikost úhlu φ mezi dvěma nenulovými vektory ve tvaru $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$.

Přístup publikace [**28**] lze ve stručnosti shrnout jako postup obrácený k výše popsanému zavedení skalárního součinu. Tato učebnice pro gymnázia je psána způsobem, jež bývá heslovitě označen jako postup *definice–věta–důkaz*.

Na začátku je ve formě věty uveden vztah mezi úhlem φ dvou vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a jejich délkami ve tvaru

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

Důkaz této rovnosti je proveden užitím kosinové věty. Princip bude demonstrován v části týkající se možností rozšiřování tohoto tématu.

V učebnici pro střední odborné školy [**10**] je postup zavedení skalárního součinu v podstatě stejný s předešlou knihou. Rozdíl spočívá jednak v tom, že skalární součin je zde až výsledkem procesu odvozování pomocí kosinové věty, jednak v tom, že v této části publikace pracuje pouze s vektory v rovině.

Vzhledem k přítomnosti kapitoly *Základy lineární algebry* se skalární součin odvozený dříve zobecňuje na n-rozměrné reálné aritmetické vektory v souvislosti se zavedením maticového násobení.

Pouze v poslední ze studovaných učebnic [**21**] se ukazuje provázanost skalárního součinu v matematice se skalárním součinem ve fyzice, konkrétně se vzorcem pro výpočet velikosti mechanické práce $W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\varphi$. Nejprve se v učebnici odvodí vztah pro výpočet velikosti úhlu dvou vektorů užitím kosinové věty. Následně se provede jeho vyjádření ve tvaru $|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi = u_1v_1 + u_2v_2$ a na základě levé strany této rovnosti, která má souvislost s uvedeným vztahem pro mechanickou práci, se skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ definuje jako reálné číslo $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$.

Podrobnější rozvedení vlastností skalárního součinu zde nenalezneme, avšak výjimkou je, že např. na straně 46 a 47 je pro případ skalárního součinu geometrických vektorů odvozen vztah, který označujeme jako *Schwarzovu nerovnost*. Platí $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

V rozboru přístupu učebnic k zavedení skalárního součinu nebyly prozatím diskutovány jeho vlastnosti. Ty, jak dobře víme, se stávají podkladem pro soubor axiomů definujících skalární součin na obecném vektorovém prostoru nad tělesem reálných čísel.

Symbolicky se těmito vlastnostmi v řeči lineární algebry rozumí *symetrie* skalárního součinu $\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$, bilinearita (uvádí se linearita v první nebo druhé složce, tj. homogenita a aditivita) $(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{uv})$, kde $c \in \mathbb{R}$, společně s $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{uv} + \boldsymbol{uw}$. Dále jeho *pozitivní definitnost*, kterou lze vyjádřit ve tvaru $\boldsymbol{u}^2 \geq 0$, přičemž $\boldsymbol{u}^2 = 0$ právě tehdy, když $\boldsymbol{u}$ je nulový vektor $\boldsymbol{o}$.

Jak již bylo poukázáno, v případě učebnice [**19**] jsou vlastnosti skalárního součinu studovány ihned po zavedení definice skalárního součinu předpisem $\boldsymbol{uv} = u_1v_1 + u_2v_2$. Jedná se o symetrii, homogenitu a aditivitu skalárního součinu. Tyto vlastnosti nejsou v učebnici nijak pojmenovány, jejich důkaz je pro případ symetrie a aditivity proveden přepisem daných tvrzení do souřadnic a porovnáním obou stran dokazovaných rovností.

Stejným způsobem je pro případ homogenity proveden důkaz i v učebnici [**28**]. Setkáváme se zde navíc i s předpisem $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$, který se v lineární algebře užívá k definici normy vektoru. Vlastnosti symetrie, homogenita a aditivita jsou zde nahrazeny termíny komutativita a distributivita. Homogenita v první složce zde není nijak pojmenována. Tato pojmenování jsou z hlediska lineární algebry nevhodná, neboť se tím podporuje přístup ke skalárnímu součinu jako k binární operaci. To samo o sobě není problém pro studium analytické geometrie. V této práci je ale na tuto skutečnost poukázáno jako na možný problém pro zobecňování standardního skalárního součinu při hledání souvislostí mezi tématy lineární algebry, která se vyskytují na střední škole, s přístupem, který je obsahem vybraných učebnic lineární algebry pro vysokoškolské kurzy.

Z hlediska studia lineární algebry lze za optimální přístup považovat způsob zavedení skalárního součinu v přehledu středoškolské matematiky [**36**]. Zde je nejprve skalární součin definován předpisem $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$. Ihned následuje výčet vlastností skalárního součinu a až poté se skalární součin vyjádří v kartézských souřadnicích.

V této publikaci se skalárním součinem skutečně rozumí operace s vektory, což lze doložit následujícím úryvkem.

> Operaci, jíž každé dvojici vektorů z daného vektorového prostoru V přiřazujeme jejich skalární součin, nazýváme *skalárním násobením vektorů.* [**36**, s. 558]

Pro symetrii skalárního součinu je opět použito pojmu komutativnost, aditivita skalárního součinu ve druhé složce je shodně z předešlou publikací označena za distributivnost a homogenita skalárního součinu v první složce je pojmenována jako *asociativnost skalárního součinu vzhledem k násobení číslem.* Důkazy vlastností nejsou v knize uvedeny.

Nakonec ve studované učebnici [**10**] jsou vlastnosti skalárního součinu uvedeny a dokázány jako rozšiřující (náročnější) učivo.

Výstavba rozumného přemostění mezi středoškolským a vysokoškolským přístupem k tématu skalárního součinu je znesnadněna jak ze strany středoškolských učebnic a přehledů matematiky, tak i ze strany vysokoškolských skript lineární algebry, která se o toto přemostění rovněž pokouší.

Výjimkou v tomto ohledu je publikace [**2**, s. 362] ve které je skalární součin na prostoru vázaných geometrických vektorů v rovině a prostoru reálných aritmetických vektorů rozlišen. Rovněž je třeba neopomenout rozlišení mezi skalárním součinem na prostoru geometrických vektorů a prostoru aritmetických vektorů, které je provedeno v učebnici [**47**, s. 193-194].

Teoretickým konceptem s důrazem na lineární algebru může být následující postup zavedení skalárního součinu. Jedná se o postup náročný, který vyžaduje rozlišovat mezi vektory v rovině a uspořádanými dvojicemi reálných čísel jako dvěma různými modely vektorového prostoru. To je v praxi problém, neboť analytická geometrie skrze zavedení kartézské soustavy souřadnic vybízí k tomu, abychom tyto modely pokládali za totožné. A v některé odborné literatuře, jak již bylo v minulé podkapitole poukázáno, se tyto dva modely nerozlišují.

V prvé řadě je třeba jasně formulovat význam skalárního součinu pro výstavbu geometrie na vektorových prostorech. Z hlediska tohoto pojetí je například zavedení skalárního součinu na prostoru vázaných geometrických vektorů v rovině nadbytečné. Zvolíme-li si dva nenulové vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ v rovině vázané do bodu O a s koncovými body po řadě X a Y, lze důsledkem platnosti kosinové věty psát

$$|XY|^2 = |OX|^2 + |OY|^2 - 2|OX||OY| \cos\varphi,$$

kde φ je velikost úhlu, který spolu svírají vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Pro další úvahy je výhodné redefinovat značení velikosti (délky, normy) vektoru namísto do této chvíle používaného označení $|\boldsymbol{u}|$ zápisem $\|\boldsymbol{u}\|$. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, potom v předešlém značení je $|\alpha\boldsymbol{u}| = |\alpha||\boldsymbol{u}|$, ovšem stejným způsobem je nyní označena funkce absolutní hodnota $|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+$ i velikost vektoru jako funkce $|\cdot|:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_0^+$. Při použití druhého způsobu zápisu tyto problémy odpadají.

Jelikož pro délku úsečky XY platí $|XY| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$, lze výše uvedenou rovnost přepsat do tvaru

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\varphi,$$

ze kterého dostáváme

$$\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right).$$

Jestliže zavedeme na vektorovém prostoru vázaných geometrických vektorů skalární součin předpisem $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\varphi$, o žádnou dodatečnou strukturu na vektorovém prostoru se v praxi nejedná, neboť výraz $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\varphi$ lze vyjádřit pouze použitím délek vektorů, a délka vektoru je geometrickému prostoru vektorů pojmem vlastním. Vektorový prostor geometrických vektorů lze pak v tomto přístupu chápat jako geometricky referenční prostor, který nám umožní zavádět různé skalární součiny v prostorech aritmetických vektorů a v důsledku toho i různé geometrie.

Připomeňme si, že další postup zavedení skalárního součinu důsledně vyžaduje rozlišovat mezi modelem vektorového prostoru aritmetických a geometrických vektorů stejné dimenze nad tělesem reálných čísel.

V lekci *Unitární prostory* online vzdělávacího kurzu lineární algebry jsou podrobně rozpracovány formulace a důkazy vlastností takto definovaného skalárního součinu bez použití souřadnicového přístupu, což v zásadě respektuje přístup uvedený ve zmíněné publikaci [**36**], kdy vlastnosti skalárního součinu jsou popsány dříve, než je skalární součin vyjádřen v kartézských souřadnicích.

Postupem, jak se vypořádat s problematikou mnohosti a unikátnosti skalárního součinu, by mohlo být využití principu izomorfismu vektorových prostorů. Tento koncept je relativně náročný a je otázkou, zda by byl v praxi uskutečnitelný.[2]

Izomorfismus vektorových prostorů je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory nad stejným tělesem. V tomto případě půjde o prostor vázaných geometrických vektorů v rovině, který označme $\mathcal{E}^2$, a prostor dvojrozměrných reálných aritmetických vektorů $\mathbb{R}^2$. Izomorfismus je jednoznačně určen, ztotožníme-li bázové vektory jednoho z prostorů s bázovými vektory druhého z prostorů.

Uvažujme, že $f:\mathbb{R}^2\to\mathcal{E}^2$ je izomorfismus, který je určen přiřazením $(1,0)\mapsto\boldsymbol{i}$ a $(0,1)\mapsto\boldsymbol{j}$, kde $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ jsou stejně dlouhé a navzájem kolmé bázové vektory prostoru $\mathcal{E}^2$.

Budeme požadovat, aby skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$ tento izomorfismus zachovával, to znamená, že má platit $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y})$. Jinými slovy chceme nalézt

[2] Na tomto principu bylo založeno odvozování skalárního součinu na prostorech aritmetických vektorů ve zmiňované lekci kurzu pro nadané žáky středních škol. Podrobnější rozpracování čtenář nalezne v konkrétním studijním materiálu k dané lekci, který je obsahem příloh této diplomové práce. Proto zde bude uvedena jen hlavní myšlenka.

takový předpis pro skalární součin aritmetických vektorů, aby vektory $(1,0)$ a $(0,1)$ byly navzájem kolmé a měly jednotkovou délku.

Skalární součin geometrických vektorů $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\varphi$ je v souřadnicích vzhledem k bázi $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$ dán známým předpisem $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2$, neboť $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j}$. Jsou-li $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ dva vektory prostoru $\mathbb{R}^2$, potom dostáváme

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= f(x_1(1,0) + x_2(0,1)) \cdot f(y_1(1,0) + y_2(0,1)) = \\
&= (x_1 f(1,0) + x_2 f(0,1)) \cdot (y_1 f(1,0) + y_2 f(0,1)) = \\
&= (x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}) \cdot (y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}) = x_1y_1 + x_2y_2,
\end{aligned}
$$

což není nijak překvapivý závěr. Samozřejmě je možné zvolit bázové vektory prostoru $\mathbb{R}^2$ jiným způsobem. Bude-li například izomorfismus f zadán přiřazením $(1,1) \mapsto \boldsymbol{i}$ a $(1,2) \mapsto \boldsymbol{j}$, nalezneme pro skalární součin g předpis

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 5x_1y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1.$$

Vzhledem k takto definovanému skalárnímu součinu na prostoru $\mathbb{R}^2$ jsou aritmetické vektory $(1,1)$ a $(1,2)$ ortonormální.

V následujících odstavcích budou shrnuty závěry předešlé sekce věnované skalárnímu součinu a možnostem rozšiřování jeho výuky směrem k lineární algebře.

Hlavní problematika se vztahuje k tomu, že v procesu studia skalárního součinu přicházejí do hry tři pohledy. V prvé řadě je to skalární součin definovaný na prostoru vázaných geometrických vektorů v rovině (v prostoru). Následuje tento skalární součin vyjádřen v souřadnicích vůči ortonormální bázi vektorového prostoru vázaných geometrických vektorů. Nakonec je to skalární součin definovaný na dvoudimenzionálním nebo třídimenzionálním reálném aritmetickém vektorovém prostoru. Často jsou tyto tři pohledy ztotožňovány (v důsledku se jedná o stejný předpis pro skalární součin), ale tím ve své podstatě zaniká význam skalárního součinu jako dodatečného nástroje na vektorovém prostoru, určeného pro měření úhlů a vzdáleností. V kurzu lineární algebry by patrně měla být snaha o toto rozdělení přítomna.

Tím se otevírá otázka mnohosti a unikátnosti skalárního součinu. V publikaci [**2**] se uvádí, že v některé literatuře se pod pojmem *skalární součin* myslí standardní skalární součin vyučovaný na střední škole, a pro skalární součin ve významu pozitivně definitního bilineárního zobrazení (pokud jde o vektorový prostor nad tělesem reálných čísel) se používá termínu *vnitřní součin.* V zahraniční literatuře bývá rozlišení řešeno pojmenováním *dot product* pro skalární součin studovaný na střední škole a *inner product* pro skalární součin ve významu lineární algebry, což odpovídá výše uvedenému českému pojmenování.

Co se týče rozšíření skalárního součinu, byl v kapitole uveden postup užívající *unitárního zobrazení* k nacházení různých skalárních součinů prostoru aritmetických vektorů, které na tomto prostoru „zavádějí" různou geometrii.

V neposlední řadě je zde také přístup k vlastnostem skalárního součinu a rovněž vztahu skalárního součinu k normě vektoru. V tomto směru spatřuji za vhodnější upustit od pojetí skalárního součinu jako operace s vektory a pro vlastnosti tohoto zobrazení neužívat pojmenování komutativní, asociativní nebo distributivní.

2.3. Soustavy lineárních rovnic a matice

V poslední podkapitole bude diskutován přístup k výuce tématu soustavy lineárních rovnic na středních školách na základě studia učebnic pro gymnázia a střední odborné školy [**18**], [**9**], [**10**], [**35**] a přehledu středoškolské matematiky [**36**]. V druhé části této sekce bude diskutována výuka tématu matice na středních školách, která, byť nepatří do standardní učební látky pro gymnázia, je zpracována jako téma středoškolské pro žáky středních odborných škol v již zmiňované publikaci [**10**].

Podrobnější rozvedení přístupu k řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je pro účely této kapitoly nadbytečné. Jedná se o téma elementární. Otázku studia postupů řešení soustav lineárních rovnic na středních školách je proto vhodné konkretizovat do otázky, zda je v rámci řešení soustav lineárních rovnic využito algoritmu Gaussovy eliminace.

Učebnice pro gymnázia [**18**] dává na tuto otázku kladnou odpověď. V kapitole *Soustavy lineárních rovnic s více neznámými* je výklad Gaussovy eliminační metody proveden na příkladu soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých.

Co je důležité s ohledem na postup výpočtu soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou poznamenat, je skutečnost, že v uvedené publikaci jsou soustavy řešeny Gaussovou eliminační metodou, ale bez použití maticového zápisu. Autoři tak správně dávají žákům najevo, že samotný algoritmus je možné provádět ve stávajícím způsobu zápisu soustavy lineárních rovnic. To je rozdíl oproti přístupu výuky lineární algebry, kde ve většině případů je výklad řešení soustav lineárních rovnic veden právě takovým postupem, že nejprve je soustava lineárních rovnic přepsána do maticového zápisu a až poté se formuluje algoritmus Gaussovy eliminace. Existují samozřejmě i výjimky. Například v učebnici lineární algebry [**45**], která byla ve své době podkladem pro kurz lineární algebry na americkém MIT, je myšlenka Gaussovy eliminace ilustrována na soustavě lineárních rovnic zapsané standardním způsobem, tj. bez maticové symboliky.

S řešením soustav lineárních rovnic se pochopitelně setkáme i v přehledu středoškolské matematiky [**36**]. Stojí za zmínku, že se zde např. diskutuje řešení soustavy dvou lineárních rovnic o třech neznámých. Například ve výše zmiňované učebnici pro gymnázia se v zadání úloh setkáváme pouze se soustavou tří lineárních rovnic se třemi neznámými nebo čtyř rovnic o čtyřech neznámých.

V přehledu [**36**] je algoritmus Gaussovy eliminace rovněž přítomen. Je vysvětlen na příkladu soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých.

> Lze ji řešit obdobně jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj. zobecněnou metodou *sčítací*, *dosazovací* nebo *srovnávací*. Avšak výhodnější je použití *Gaussovy eliminační metody* (GEM), která spočívá v postupném převedení dané soustavy rovnic na tzv. *trojúhelníkový tvar*, kde ve druhé rovnici je eliminována první neznámá a ve třetí rovnici jsou eliminovány první a druhá neznámá.[**36**, s. 273]

V učebnici [**35**] zmínku o Gaussově eliminaci nenalezneme. V této učebnici pro střední odborné školy je uvedeno pouze řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Podobně je tomu i v učebnici [**9**], nicméně v tomto případě je třeba uvést, že se jedná o učebnici z řady učebnic pro střední odborné školy, mezi kterými je i kniha [**10**], která obsahuje již zmiňovanou kapitolu *Základy lineární algebry*.

Přestože bylo v úvodu uvedeno, že postupům řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých se tato kapitola nebude věnovat, bylo by chybou zde nezmínit důležitý přístup k řešení, který bývá označován termínem *grafické řešení*. S tím totiž souvisí i otázka, jak lze na soustavy rovnic geometricky nahlížet.

Ve zmiňované americké publikaci [**45**] jsou rozlišovány dva přístupy, které jsou v originálu pojmenovány jako *row picture* (pro termín bude dále užíváno označení *řádkový pohled*) a *column picture* neboli *sloupcový pohled*. Vrátíme-li se společně k tomu, jakým způsobem se nejčastěji v učebnicích graficky řeší soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, jedná se o zmiňovaný řádkový pohled. Každá z lineárních rovnic představuje analytické vyjádření přímky v rovině. Jejich vzájemná poloha je otázkou řešitelnosti takové soustavy. Řešení takové soustavy, pokud existuje, může být právě jedno (průsečík dvou přímek), nebo nekonečně mnoho (přímky splývají). Je zřejmé, že v případě soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých je grafické řešení v podstatě nemožné a řádkový pohled je omezen jednoduše tím, že v okamžiku, kdy se látka soustav lineárních rovnic ve výuce vyskytuje, nemají žáci probránu kapitolu analytická geometrie. Navíc v *Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia* není téma analytické geometrie v prostoru obsaženo.

V učebnici analytické geometrie pro gymnázia [**19**] se však v okamžiku studia analytického vyjádření roviny v prostoru nesetkáme s propojením mezi vzájemnou polohou rovin a řešením soustav lineárních rovnic o třech neznámých. Možností studia lineární algebry by mohlo být tento pohled doplnit. Řádkový pohled je v případech soustav lineárních rovnic o dvou nebo třech neznámých názorný i z hlediska řešitelnosti soustavy rovnic. Je samozřejmě možné rovněž na geometrickém pohledu demonstrovat, jak ekvivalentní úpravy provedené na soustavu lineárních rovnic nemění množinu řešení.

Jednotlivé roviny se například vůči sobě mění, ale jejich společný průnik (průsečík, průsečnice, rovina, prázdná množina) zůstává stejný. Pro případ soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je to provedeno například v publikaci [**45**].

Studovaná středoškolská literatura se řešitelností soustav rovnic zabývá v rámci maticového přístupu s využitím pojmu hodnost matice. Toto téma bude proto diskutováno později.

Častější pohled lineární algebry na soustavu lineárních rovnic je tzv. *sloupcový pohled*. Uvažujme například následující obecnou soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1,\\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2,\\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3,
\end{aligned}
$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ a $b_i \in \mathbb{R}$, přičemž $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Z vlastností operací zavedených na vektorovém prostoru aritmetických vektorů $\mathbb{R}^3$ můžeme danou soustavu rovnic přepsat ekvivalentním způsobem ve tvaru

$$
x \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{2.1}
$$

Tento zápis má význam především v tom, že z pohledu lineární algebry jde o lineární kombinaci aritmetických vektorů. Úloha řešit danou soustavu rovnic vlastně znamená nalézt koeficienty x, y, z příslušné lineární kombinace, která dává sloupcový vektor pravých stran, který pro další potřebu označme $\boldsymbol{b}^T$.[3] Zde právě nastává ten moment, kdy za úlohami lineární algebry, konkrétně algebry vektorových prostorů, spatřujeme řešení soustav lineárních rovnic. Podobně bude rovnice vypadat v okamžiku, kdy budeme zkoumat lineární závislost nebo nezávislost vektorů (zde bude $\boldsymbol{b}^T = \boldsymbol{o}^T$) nebo když například chceme určit souřadnice jistého vektoru vzhledem k zadané bázi. Ve všech těchto případech budeme mířit k řešení stejné nebo podobné soustavy lineárních rovnic.

Jedním z ústředních témat lineární algebry je bezpochyby maticový počet. Jeho výuku na středních školách nelze v této práci ani vyvrátit, ani potvrdit, zkrátka proto, že cílem této diplomové práce není zabývání se konkrétní výukou lineární algebry (maticového počtu) na konkrétních školách. Lze se však přiklonit na stranu toho, že se žáci matematicky orientovaných gymnázií nebo žáci technicky zaměřených středních odborných škol, kde maticový počet je potřebný pro studium odborného předmětu, s výukou

[3]Indexem ^{T} je rozlišováno mezi vektorem řádkovým a sloupcovým, který v maticové terminologii vznikne transponováním řádkového vektoru. S ohledem na středoškolské pojetí aritmetického vektoru jako vektoru řádkového, jsou sloupcové vektory psány s uvedeným indexem. Byť je častější přístup v lineární algebře opačný.

tohoto tématu setkávají. Je samozřejmě otázkou, jak je v konkrétních případech žákům představeno a vyučováno, což si však tato práce neklade za svůj cíl. Cílem je zabývání se daným tématem z hlediska obsahu a přístupu středoškolských učebnic a přehledů.

Například přehled středoškolské matematiky v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic motivuje používání maticové notace tímto způsobem.

> Řešíme-li soustavu lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou, je možné pro zestručnění zapisovat jenom koeficienty a pravé strany rovnic (neboli vynechat v zápisech stále se opakující neznámé). Tabulka číselných údajů uspořádaných do p řádků a q sloupců se nazývá *matice* typu (p, q); zápis matice se ohraničuje závorkami hranatými [ ] či okrouhlými ( ). Koeficienty soustavy rovnic tvoří tzv. *matici soustavy*, rozšíříme-li ji o sloupec pravých stran (oddělený svislou čárou), dostáváme tzv. *rozšířenou matici soustavy* a právě s ní se v GEM pracuje. [**36**, s. 275]

Podobným způsobem motivuje zavedení matic i zmiňovaná učebnice pro střední odborné školy [**10**], když uvádí:

> V předchozích článcích jsme často řešili soustavu rovnic o dvou či o třech neznámých. V každé takové soustavě (a samozřejmě i v každé soustavě o větším počtu neznámých) jsou dány koeficienty u těchto neznámých. Nestačí však znát jen množinu těchto koeficientů – o každém z nich musíme vědět, u jaké neznámé a ve které rovnici se nachází. To umožňuje zápis soustavy rovnic ve tvaru obdélníkového schématu, v němž jsou příslušné koeficienty vhodným způsobem rozmístěny v jeho řádcích a sloupcích. [**10**, s. 97]

Oba citované přístupy zavádějí matice skrze stručnější zápis soustav lineárních rovnic. V učebnici [**10**] jsou dále zavedeny základní maticové pojmy jako *prvky matice*, *řádkový index*, *sloupcový index*, *hlavní diagonála*. Jsou zde uvedeny matice *nulová* a *jednotková*. A důraz je kladen na zavedení pojmů *řádkový vektor* a *sloupcový vektor*.

Dále následuje zavedení operací s maticemi, jejich sčítání a násobení reálným číslem. Násobení matic je v této kapitole považováno za téma obtížnější, možná rozšiřující, vzhledem k tomu, že se již dále k součinu matic autor knihy nevrací.

Na tomto místě by právě propojení násobení matic se sloupcovým pohledem na soustavu rovnic mohlo přispět k motivaci přepisu soustavy lineárních rovnic do matice.

Důsledkem násobení matice typu (m, n) n-rozměrným aritmetickým sloupcovým vektorem je vyjádření sloupcového pohledu obsaženého ve vztahu (2.1) prostřednictvím maticového násobení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

který symbolicky zapisujeme v podobě $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{b}^T$. Využití tohoto přístupu ve své podstatě požaduje, aby matice byly jako početní nástroj lineární algebry probírány s předstihem před soustavami lineárních rovnic.

V souvislosti s maticemi a řešením soustav lineárních rovnic je možno toto pojetí pokládat za velmi důležité. Žáci si díky tomu mohou vytvořit povědomí o tom, že v symbolickém zápisu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{b}^T$ je obsaženo řešení soustavy lineárních rovnic. Nejen, že tento způsob zápisu soustavy lineárních rovnic je výchozím při odvozování dalších vlastností či algoritmů (například algoritmu hledání inverzní matice k dané regulární matici), lze z toho těžit i v pokročilejších kapitolách lineární algebry. Stejný tvar má například úloha najít tzv. *jádro* lineárního zobrazení, tedy všechny vektory, které se zobrazí na nulový vektor. Maticí tohoto homomorfismu je matice $\boldsymbol{A}$ a pro vektor pravých stran platí $\boldsymbol{b}^T = \boldsymbol{o}^T$. Dalším příkladem by mohla být kapitola vlastních čísel a vlastních vektorů.

Samostatným tématem je téma řešitelnosti soustav lineárních rovnic. To se zpravidla vyšetřuje užitím *Frobeniovy věty*, a tudíž zavedením pojmu *hodnost matice*. Tento pojem je zaveden i ve studované literatuře [**10**, s. 106] jako maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů a to mnohem dříve, než se přistupuje k otázce řešitelnosti soustav lineárních rovnic.

Zde je třeba si položit otázku, zda je tento postup pro rozšíření výuky matematiky směrem k lineární algebře vhodný či nikoliv. Je třeba se zabývat tím, co zavedení pojmu hodnost matice do případné výuky přináší.

Drtivá většina početních úloh lineární algebry je formulovatelná jako hledání řešení jistých soustav lineárních rovnic. Používáme-li hodnost matice k určování například lineární nezávislosti množiny vektorů, můžeme tutéž úlohu formulovat jako problém řešitelnosti soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{o}^T$, kde sloupce matice soustavy $\boldsymbol{A}$ tvoří vektory zkoumané množiny. Ptáme se tedy, zda má tato soustava rovnic právě jedno řešení, nebo nekonečně mnoho.

Je k diskuzi, zda by nebylo vhodnější pojem hodnosti matice nezavádět na prvním místě, což by podporovalo onen pragmatický směr výuky lineární algebry, ale například podobně jako v publikaci [**45**] zavést méně abstraktní pojem *pivotní sloupec.*[4] Ten souvisí přímo s odstupňovaným tvarem rozšířené matice soustavy, počet pivotních sloupců

[4]Pivotním sloupcem se nazývá takový sloupec matice v odstupňovaném tvaru, ve kterém vzniká schod.

je roven hodnosti matice soustavy a navíc jeho zavedení umožňuje velmi názorné propojení s řešitelností soustavy. Soustava lineárních rovnic například nemá řešení, pokud v matici soustavy převedené elementárními řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru je sloupec pravých stran pivotní.

Bylo by vhodné shrnout výše uvedené závěry a navrhnout možná rozšíření, či alespoň nastínit směr, kterým bychom se v souvislosti s maticemi a soustavami lineárních rovnic měli vydat.

V rámci běžné výuky tématu soustav lineárních rovnic lze velmi přirozeně studovat se žáky algoritmus Gaussovy eliminace. Vždyť autoři gymnaziální učebnice jej představují slovy: „Postup, který vyložíme, bude vlastně sčítací metoda.“ [**18**, s. 105]

Další možné rozšíření je výraznější využití geometrického pohledu na soustavu lineárních rovnic. Jak pohledu řádkového, pokud byli žáci vzděláváni v příslušných oblastech analytické geometrie, tak pohledu sloupcového.

Otázkou zůstává přímé zavedení matic, včetně jejich vlastností a operací. Matice typu (m, n) s operacemi sčítání matic a násobení matice skalárem představují další model vektorového prostoru a navíc prostoru konečné dimenze. Pokud by výuka lineární algebry vedla přes hlubší studium vektorových prostorů, mohlo by zavedení matic tento směr respektovat a tudíž předcházet samotnému řešení soustav lineárních rovnic. Vykládat matice jako samostatné matematické objekty se specifickými vlastnostmi nejen jich samých, ale i operací s nimi.

Mezi operacemi s maticemi, konkrétně v souvislosti s násobením matic, je třeba neopomenout význam násobení matice sloupcovým aritmetickým vektorem, a vztah ke sloupcovému pohledu na soustavu lineárních rovnic (zápis soustavy lineárních rovnic jako $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{b}^T$). To umožňuje zavést zápis soustavy lineárních rovnic pomocí rozšířené matice soustavy, a protože algoritmus Gaussovy eliminace by v tomto okamžiku žáci již znali, pak přirozené propojení mezi ekvivalentními úpravami s elementárními řádkovými úpravami s rozšířenou maticí soustavy.

KAPITOLA 3

Specifika online vzdělávání

Hlavním úkolem experimentální části této práce bylo připravit a realizovat online kurz lineární algebry využívající závěrů, které jsou formulovány v části teoretické. Těžištěm první poloviny diplomové práce je lineární algebra a podoba, v jaké se s ní seznamují žáci středních škol. Protože se však online výuka v mnohém odlišuje od výuky kontaktní (tj. takové výuky, kdy jsou učitel i žáci fyzicky přítomni ve třídě, kde probíhá), je vhodné této problematice rovněž věnovat samostatnou kapitolu.

3.1. Elektronické učení

Elektronické učení je relativně novodobým fenoménem souvisejícím s využitím počítačů ve vzdělávání. Jednu z možných definic uvádí Mareš (2013).

> Učení, které řídí program vložený do počítače, a partnerem studenta se tak stává nikoli přítomný živý člověk, ale učitel zpředmětněný v programu. (podle [**25**])

Výše zmíněná publikace tedy pod pojmem elektronické učení zastřešuje dvě navzájem vcelku odlišné kategorie, a to *online učení*, při kterém se využívá internetu, a *offline učení*, které probíhá na počítači, ale ve specializovaném programu bez nutnosti připojení.

V odborné literatuře můžeme nalézt i podrobnější definice.

> E-learning is the acquisition and use of knowledge distributed and facilitated primarily by electronic means. This form of learning currently depends on networks and computers but will likely evolve. (...) E-learning can take form of courses as well as modules and smaller learning objects. E-learning may incorporate synchronous or asynchronous acces and may be distributed geographically with varied limits of time [**29**, s. 39].[1]

Méně na technické prostředky, které učení zajišťují, zaměřenou definicí je tato:

[1]Elektronické učení je takový typ učení, při němž je získávání a používání znalostí primárně rozšiřováno a usnadňováno elektronickými zařízeními. Tento typ učení zatím využívá počítačů a počítačových sítí, avšak jeho technická základna se zřejmě bude dále vyvíjet.(...) Elektronické učení může zahrnovat ucelené učební kurzy nebo menší stavebnicové učební moduly či jen relativně malá učební témata. Elektronické učení se může opírat o časově synchronní nebo asynchronní přístupy, může být distribuováno z geograficky i časově nezávislých zdrojů.

> Elektronické učení zahrnuje jak teorii a výzkum, tak jakýkoli reálný vzdělávací proces (s různým stupněm intencionality), v němž jsou v souladu s etickými principy používány informační a komunikační technologie pracující s daty v elektronické podobě. Způsob využívání informačních a komunikačních technologií a dostupnost učebních materiálů jsou závislé především na vzdělávacích cílech a obsahu, na charakteru vzdělávacího prostředí, na potřebách a možnostech všech aktérů vzdělávacího procesu (převzato z [**25**]).

Jak je již výše zmíněno, při procesu *e-learningu* dochází ke změně postavení vyučujícího a vyučovaného. Na straně osob, které využívají e-learningové metody k získávání nových znalostí a dovedností, nabývá na významu *autoregulace*[2]. Funkce vyučujícího je do větší či menší míry potlačena, i když škála možné míry komunikace mezi žákem a učitelem je široká. Učitel tak může zcela ustoupit do pozadí a vystupovat pouze jako „tvůrce programu“, kdy tento program musí již sám o sobě vykazovat vysokou míru adaptability, nebo si může ponechat možnosti do procesu učení a do výukových materiálů zasahovat.

Z hlediska časové prodlevy mezi představením učebního obsahu a žákovou reakcí můžeme e-learningové aktivity dělit na *synchronní*, tedy takové, které probíhají v reálném čase a žák ihned reaguje na daný podnět, a *asynchronní*, kdy je mezi prezentováním problému a okamžikem, kdy jej žák začne řešit, větší či menší časový úsek [**27**, s. 24].

3.2. Online vzdělávání

Podoborem elektronického učení, kterým se dále budeme zabývat, je online vzdělávání.

> …the use of the Internet to access learning materials; to interact with the content, instructor, and other learners; and to obtain support during the learning process, in order to acquire knowledge, to construct personal meaning, and to grow from the learning experience [**1**].[3]

Tentýž příspěvek rozvádí na s. 46 možné interakce v online vzdělávání na výčet *student a obsah, učitel a obsah, učitel a student, student a student, učitel a učitel, obsah a obsah.*

Interakce učitel a student je základem standardního vzdělávání. V e-learningu je její role snížená a do velké míry nahrazená vazbami obsah a student. Vztah učitel

[2] Žáky schopné autoregulace popisuje ([**59**, s. 2]) jako „…metacognitively, motivationally and behaviorally active participants in their own learning.“

[3] … použití internetu k zpřístupnění učebních materiálů, k interakci s obsahem (učebních materiálů, pozn. autora), instruktorem a dalšími žáky, a také k zajištění si podpory během učebního procesu tak, aby došlo k získání znalostí, vytvoření vlastního porozumění tématu a k osobnímu růstu na základě zkušenosti z učení.

a obsah vyjadřuje vytváření učebních aktivit a vkládání lekcí do prostředí, v němž následně probíhá vzdělávání. Podpůrnými, ale neméně důležitými vztahy pak jsou učitel a učitel, který nabízí tvůrci e-learningové koncepce zpětnou vazbu a příležitost k zlepšení, a student a student, kde kromě vzájemné učební podpory může docházet i ke zlepšení motivace k pokračování v kurzu. Poslední možností je vztah obsah a obsah, který představuje automatické v učebním systému zanesené změny učebního prostředí, které reagují na data, která již student při předchozí práci do kurzu vnesl. Můžeme tak chápat také aktualizaci některých aktivit a obecně automatickou adaptabilitu celého obsahu.

Lynch a Dembo [**23**] uvádějí, že úspěšnost žáků, kteří se vzdělávají alespoň částečně v online prostředí, lze predikovat na základě několika faktorů: jejich *motivovanosti*; *schopnosti efektivně užívat internet/použitou technologii*; *schopnosti řídit svůj čas*; *snaze upravit si učební prostředí*, aby jim lépe vyhovovalo; *schopnosti vyžádat si pomoc*, pokud je to zapotřebí. Motivace žáků je založena na dvou základních prvcích. Prvním je pocit, že pokračování v online kurzu má smysl, že se žák skutečně něco nového naučil – že je učení *efektivní.* Druhým velice důležitým motivačním faktorem je to, že výuka někam směřuje, že pokračování v kurzu *má pro žáka cíl.*

3.3. Názorové přístupy k online výuce

Efektivita učení je do velké míry závislá na souladu použitých výukových postupů s tím, na jaký druh výuky je žák zvyklý a jaký učební styl preferuje. V online kurzech se tak podobně jako v kontaktní výuce uplatňují východiska různých názorových škol.

Při tvorbě online kurzů se nejčastěji uplatňují behaviorální, kognitivistické či konstruktivistické teorie učení. Část této kapitoly, která popisuje základní požadavky na online studijní materiály, pokud by byly použity tyto typy přístupů ve své čisté formě, je zpracována na základě publikace [**1**].

U behaviorálně zaměřených online kurzů se objevují některé typické znaky. Žákům online kurzu je předem jasně řečeno, jaké výsledky se od nich očekávají, aby mohli sami posoudit, zda jich dosáhli, či nikoliv. Získané znalosti jsou testovány. Online testy nebo jiné druhy hodnocení jsou komponovány přímo do učebního materiálu tak, aby měl tvůrce online kurzu přehled o výsledcích a aby měli žáci zpětnou vazbu.

Učební materiály jsou jasně strukturované a jejich jednotlivé prvky se objevují v daném pořadí. Postupuje se od jednodušších ke komplexnějším problémům, známého k neznámému, znalostí k aplikacím apod. Žákům je zajištěna zpětná vazba, aby měli přehled o svém výsledku a mohli v případě potřeby uplatnit nápravná opatření.

Podobně si u kognitivisticky zaměřených kurzů lze povšimnout, že rozložení materiálů na stránce je považováno za důležité pro jejich vnímání žákem. Klíčové informace jsou proto v takto koncipovaném kurzu např. barevně odlišeny, měly by se nacházet pokud možno ve středu stránky. Účastníci kurzu by také měli být informováni o tom, co je cílem dané lekce, a nové informace v ní by měly být přiměřené pokročilosti daného žáka, tj. lekce by měla obsahovat odkazy na složitější i jednodušší materiály, aby si každý mohl vybrat podle svých kognitivních schopností.

Uplatňují se strategie, které umožní žákům aktivovat dlouhodobé znalosti, které již mají a které jim mohou pomoci se zapamatováním nových informací a jejich porozuměním. Jednou z možností je využití nějakého nástroje z tzv. *advance organizers*[4], tj. z nástrojů, které pomocí analogií, metafor a podobně připodobňují vztahy v nové látce ke znalostem, které již žáci mají (patří mezi ně mimo jiné myšlenkové mapy a jiné grafické diagramy). Někdy takové kurzy pokládají na začátku lekce otázky, které pomohou účastníkům kurzu vytvořit si představu, co od nových informací očekávat, nebo jsou součástí úvodu lekce testy, které aktivují předchozí znalosti žáků.

Nové informace jsou prezentovány po částech tak, aby byli žáci schopni zpracovat vše viditelné na obrazovce. Pokud lekce obsahuje velké množství nových informací, měla by obsahovat diagram jejich organizace tak, aby byl jasný jejich vzájemný vztah. Je také vhodné, aby si žáci během lekce sami vytvářeli myšlenkové mapy apod., což jim pomáhá se „srovnáním si“ informací v hlavě.

Jsou uplatňovány i další strategie podporující tzv. *deep processing*, aby bylo pro žáky snazší si nové znalosti dlouhodobě zapamatovat. Pokud žáci musí nové informace použít, analyzovat, na jejich základě vytvářet nové závěry apod., snáze si je uloží do dlouhodobé paměti.

Online materiály by měly nabízet varianty různých přístupů, které odpovídají různým druhům učení. Ti žáci, kteří preferují konkrétní zkušenosti (*concrete-experience learners*, volně podle [**20**]), mají raději konkrétní úkoly, jichž se zúčastňují, a preferují komunikaci se sobě rovnými a spolupráci s nimi. Vhodné podpůrné přístupy pro ně jsou možnost interakce s ostatními účastníky a přístup učitele spíše jako „trenéra“ než autority. *Reflective-observation learners* preferují možnost nejprve situaci sledovat a až později se zapojit. V online kurzu chtějí všechny informace přístupné k prostudování, vyučujícího vidí jako experta. Interakci s ostatními se spíše vyhýbají.

Abstract-conceptualization learners raději pracují s věcmi a symboly než s lidmi, preferují teorii. *Active-experimentation learners* uplatňují způsob učení založený na praktickém experimentování, o němž pak diskutují se svými kolegy, aby měli zpětnou vazbu a další informace. Studentům by na základě preferovaných stylů učení měla být nabízena i individualizovaná forma podpory od učitele apod.

Informace by měly být prezentovány v různých módech. V materiálech se mohou vyskytnout jako text, ve vizuální i zvukové podobě apod. Je nutné pracovat především s vnitřní, ale někdy i vnější motivací účastníka kurzu. Zejména se jedná o metody jako

---

[4] Ve smyslu „relevantní úvodní materiály, které jsou studentům představeny před výkladem nové látky; jejich úkolem je vytvořit tomuto obsahu rámec“, podle [**11**].

upoutání žákovy pozornosti, informování žáků o tom, proč se učí danou lekci, zlepšování jejich sebedůvěry a poskytnutí zpětné vazby o jejich úspěších.

Žáci by měli být vedeni k tomu, aby využívali své schopnosti metakognice. Jsou uplatňovány strategie, které je vedou ke spojení online získaných vědomostí s reálnými situacemi a aplikacemi.

Konstruktivisté uplatňují ve svých kurzech opět mírně odlišný pohled. Podle tohoto přístupu by učení mělo být aktivním procesem. Budeme-li žáky udržovat aktivní, řeší smysluplné úkoly, které zapojují vyšší míru myšlení, vytváříme v nich pocit osobního smyslu. Žáci si vytvářejí vlastní znalosti, které jim nejsou pouze představeny vyučujícím. Vytváření znalostí je zprostředkováno interaktivními online návody. Jsou to žáci, kteří se musí chopit iniciativy a interagovat s ostatními a instruktorem, a postup učení je plně závislý na každém účastníkovi.

Je podporována spolupráce (*kolaborativní* i *kooperativní* učení[5]) mezi jednotlivými účastníky kurzu. Žáci by měli mít kontrolu nad učebním postupem. V online kurzu by měla fungovat nějaká forma řízeného objevování, kde má každý právo vytvářet si, s jistou mírou vedení od instruktora, cíle vzdělávání.

Žáci by měli mít možnost reflexe nad již zjištěnými informacemi. To může být zajištěno například otázkami v učebních materiálech, které se vrací k již zjištěnému.

Studijní materiály bývají zpracovány tak, aby měly pro žáky smysl - měly by obsahovat příklady situací, které jsou jim blízké, aby se podpořilo porozumění.

Učení by mělo být interaktivní. Interakce probíhá mezi žákem a informacemi a také mezi žákem a prostředím a umožňuje účastníkům informace přijmout a dát jim kontext.

V praxi se nejčastěji setkáváme s tím, že kurzy uplatňují prvky všech tří přístupů. Obvykle je tento přístup charakterizován postupem podle Ertmerové a Newbyho [**14**, s. 18], kde behaviorální přístupy odpovídají na otázku „co?“ (tj. zabývají se fakty), kognitivní se zabývají otázkou „jak?“ (tj. zabývají se postupy) a konstruktivistické se ptají „proč?“, tj. zabývají se příčinami. Přístup může být limitován i technickými možnostmi, kdy například systém není s to zvládnout nápor všech dat, která by umožňovala vysoce individualizovanou výuku, eventuálně časovými možnostmi lektora a dalšími faktory.

3.4. Žákovo pojetí učiva

Obecnou otázkou pedagogické psychologie je pak problematika *žákova pojetí učiva.*

> Žákovo pojetí učiva se dá charakterizovat jako souhrn žákových subjektivních poznatků, představ, přesvědčení, emocí a očekávání týkající se

[5] Ve vymezení, které uvádí např. [**13**, s. 2], tj. kolaborace je „aktivita, při níž je každá osoba zodpovědná za část řešení problému“, zatímco kooperace je „společné zapojení účastníků v koordinované snaze vyřešit úkol společně“, tedy zodpovědnost za danou práci je společná a nelze hodnotit jednotlivé účastníky zvlášť.

> školního učiva. Zahrnuje tedy kognitivní oblast (žákovo svérázné chápání obsahu jednotlivých pojmů, jevů, principů, jeho chápání vztahů mezi nimi, celou jeho subjektivní strukturu vědění o určitém tématu) i oblast afektivní (jeho postoje, přesvědčení, emocionální podbarvení určitých poznatků typické pro daného žáka) [**26**, s. 87-88].

Tento jev se přirozeně vyskytuje při jakékoli výuce a je závislý na mnoha determinantech. Jsou jimi přirozený vývoj žákovy psychiky, podnětnost sociálního prostředí, působení školy, zvláštnosti učitelů, kteří žáka vyučovali, a především zvláštnosti žákovy osobnosti a záměrné i nezáměrné učení žáka.

Jestliže tedy do veškeré výuky vstupuje ta její vlastnost, že žák si předkládané učivo nějakým způsobem na základě svých zkušeností interpretuje a tato interpretace se může lišit od správného náhledu, přináší s sebou problematika online vzdělávání ještě obtížnější možnosti diagnostiky a změny takového pojetí. Možnosti identifikace chybného žákova pojetí učiva jsou např. při společném řešení úlohy v průběhu kontaktní výuky vyšší, než pokud je lektor online kurzu seznámen jen s částečným řešením zadané úlohy ve virtuálním prostředí, nebo dokonce zná pouze žákův výsledek. Stejně tak je výrazně omezena možnost diagnostického rozhovoru.

Obecně však lze konstatovat, že s rozvojem technologických možností budou různé formy online učení nabývat na významu. Jako každý přístup k výuce přináší s sebou i online učení výhody i nevýhody, které je třeba při koncipování online kurzu reflektovat.

Část 2

Experimentální část

KAPITOLA 4

O projektu Talnet

Projekt *Talnet* je součástí agendy Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR, která se zabývá péčí o nadané a talentované žáky. Jeho první ročník se v malém rozsahu uskutečnil v roce 2003, od roku 2005 spadal projekt pod správu příspěvkové organizace ministerstva školství *Národního institutu dětí a mládeže* (NIDM). S účinností od 1. ledna 2014 byl NIDM sloučen s *Národním institutem pro další vzdělávání* (NIDV), jehož primárním úkolem do té doby bylo pouze zajišťovat aktivity související s dalším vzděláváním pedagogických pracovníků.

V rámci aktivit NIDV je projekt zaměřen na žáky základních a středních škol (žáky ve věkovém rozpětí 13-19 let) se zájmem o přírodní vědy. Projekt Talnet je koncipován jako nesoutěžní, umožňující účastníkům rozvíjet specifické nadání i svoji osobnost. Oborové zaměření aktivit je fyzikální, chemické, biologické, geografické, matematické, astronomické, eventuálně se kurzy či exkurze zaměřují na oblast aplikovaných věd a mezioborové spolupráce.

Přístup Talnetu k pojmu *nadání* plně vystihuje následující citace z oficiálních webových stránek projektu:

> Existují různé názory a přístupy k definování a určování talentu či nadání. V Talnetu vycházíme z přístupu, který *považuje za rozhodující spíše to, jak se dokáže žák či student vypořádat s úkoly v daném oboru, než osobnostní předpoklady zjišťované pomocí testů.*
>
> Na nadání se podílí jak soubor vloh, který umožňuje člověku potencionálně dosáhnout nadprůměrných výkonů v určité oblasti tělesných nebo duševních činností, tak i výjimečné specifické schopnosti vztahující se ke konkrétní lidské činnosti. Takovými speciálními schopnostmi může být například schopnost řešit matematické problémy nebo dovednost chemicky analyzovat úroveň znečištění ovzduší.
>
> Nadání se může projevit v oblasti intelektu, kreativního myšlení, vědeckých schopností, sociálního vůdcovství, mechanické zručnosti nebo v podobě talentu v umění či ve sportu. [**52**]

Vzhledem k tomu, že projekt Talnet je projevem širších snah ministerstva školství rozvíjet zájem a nadání českých studentů, je koncipován takovým způsobem, aby byl dostupný co nejširšímu publiku potenciálních účastníků. Z tohoto důvodů probíhá velká část aktivit Talnetu v online prostředí, které neomezuje studenty geograficky a časově.

K přístupu do Talnetu nepotřebují studenti absolvovat žádné rozřazovací testy, součástí přihlášky je pouze doporučení rodiče, učitele, ev. pracovníka pedagogicko-psychologické poradny, pokud se student hlásí do projektu Talnet poprvé. Online aktivity Talnetu jsou zcela zdarma, v případě exkurzí či jiných prezenčních aktivit si studenti hradí ubytování a stravu; v odůvodněných případech hradí i toto NIDV. Studenti se do Talnetu přihlašují prostřednictvím webového formuláře dostupného na stránkách projektu. Přihlašování na školní rok 2015/2016 bylo prodlouženo až do 11. října 2015.

Klíčovou aktivitou projektu Talnet jsou tzv. *T-kurzy*, online kurzy od roku 2015 probíhající v prostředí *Moodle*. Některé kurzy probíhají v obou pololetích školního roku, kdy jsou dělené na tzv. *bloky*. Zatímco některé umožňují účastníkům projektu Talnet studovat pouze jeden blok, pro jiné je absolvování první části kurzu nutnou prerekvizitou přihlášení do druhého bloku.

Také online probíhají *T-prosemináře*, jejichž úkolem je pomoci studentům rozvíjet všeobecné vědecké kompetence, např. schopnost napsat odborný text, prezentovat výsledky své práce apod.

Kombinací online výuky a praktické činnosti v autentickém prostředí jsou *T-exkurze*. Účastníci se nejprve seznámí s obecnými a specifickými poznatky, které následně využijí na zvoleném pracovišti při výzkumné či odborné práci. Delší pobyt na zkoumané lokalitě vyžadují *T-expedice*, které jsou obvykle týdenní.

Soustředění Talnet je pak týdenním výjezdem, na kterém se účastníci kurzů či zájemci o účast seznamují s instruktory, dalšími studenty i strukturou možných aktivit. Tato soustředění probíhají celkem třikrát do roka. Prvním z nich je úvodní podzimní soustředění, na kterém se nováčci naučí pracovat v online prostředí kurzů a seznámí se s pestrou nabídkou Talnetu. Pro zájemce ze vzdálenějších koutů republiky probíhá instruktáž i online či v odpoledních hodinách. Zimní a letní soustředění jsou vyvrcholením půlroční práce v kurzech. Studenti prezentují své seminární práce (pokud jsou tyto práce podmínkou pro absolvování kurzu) před odbornou i studentskou porotou a mají možnost zúčastnit se odborného i neodborného programu (exkurze, strategické hry aj.) [**53**].[1] Účast na soustředěních je dobrovolná, obhajoby seminárních prací se rovněž konají v online prostředí. Ve školním roce 2015/2016 probíhají ve zmíněném Moodlu poprvé. Poznamenejme, že v podzimním bloku bylo organizátory Talnetu rozhodnuto o tom, že seminární práce nebudou součástí žádného z kurzů. Seminární práce se týkaly pouze jarního bloku kurzů.

Příležitostně probíhají i v online prostředí vedené mezinárodní aktivity, které propojují nadané české studenty s jejich protějšky ze zahraničí.

[1] Uvedeným termínem *seminární práce* je zde myšlena závěrečná práce, jíž je odborný text v rozsahu přibližně 20 normostran, který může být ve formě rešeršní práce nebo například popisu a vyhodnocení vlastního experimentu. Studenti si zpravidla téma své závěrečné práce volí v průběhu prvního až druhého týdne kurzu z nabídky vytvořené instruktorem kurzu nebo si téma mohou navrhnout samostatně.

Podle [**57**, s. 40] je maximální kapacita kurzů a dalších aktivit od roku 2010 stabilně 540 studentů (data do 1. pololetí roku 2014). Skutečný počet absolventů kurzů, expedic ad. je ale mnohem menší, pohybuje se níže než 100 studentů ročně.

Účastníci kurzů (z nichž pak ne všichni kurzy z nejrůznějších důvodů absolvují) pocházejí z různých krajů ČR, s rostoucím počtem přihlášených účastníků klesá predominance pražských studentů [**41**, s. 6], což by mohlo dokládat lepší informovanost pedagogické i nepedagogické veřejnosti o projektu, která vede k většímu zapojení i studentů z regionů.

Ve školním roce 2015/2016 probíhaly podle [**54**] následující kurzy

(1) **Proč nám chutná?**, kurz seznamující studenty s biologickými, fyzikálními a chemickými procesy probíhajícími při vaření;
(2) **Biologie I a II**, nabízející ve dvou blocích znalosti o rostlinách a životě na zemi v souvislostech;
(3) **Biologie III**, zabývající se plazy;
(4) **Biologie IV**, která seznamuje studenty s trendy molekulární genetiky a cytogenetiky;
(5) **Biologie člověka I**, zaměřená na dutinu ústní;
(6) **Entomologie**, která představuje účastníkům tuto vědu o hmyzu;
(7) **Chemie I** o chemických reakcích;
(8) **Chemie II** o chemii vody;
(9) **Chemie III**, představující studentům anorganickou chemii;
(10) **Chemie IV**, v níž studenti provádějí v domácím prostředí jednoduché pokusy;
(11) **Materiály a krystaly I**, kde se ve dvou blocích seznámí se základy optiky a nauky o materiálech;
(12) **Materiály a krystaly II**, kde se studenti zabývají strukturou krystalů a opět naukou o materiálech;
(13) **Atmosféra a oceány** o fyzikálních procesech v nich probíhajících;
(14) **Vybrané kapitoly z teorií relativity** o speciální i obecné teorii relativity;
(15) **Na fyziku v týmu!** zkoumání problémů z úloh *Turnaje mladých fyziků*;
(16) **Astro a modelování I**, které studenty seznamuje se základy astronomie a pohybů těles a také s modelováním těchto pohybů pomocí počítače;
(17) **Astro a modelování II**, kde se již účastníci zabývají konkrétněji spektry hvězd a složitějším modelováním na počítači;
(18) **Astro a modelování III** o některých druzích elektromagnetického vlnění vesmírných objektů mimo viditelné spektrum;
(19) **Astro a modelování IV**, které doplňuje znalosti studentů o neviditelném záření vesmírných objektů;
(20) **Geografie I - II** o zeměpisu a světě v souvislostech;
(21) **Geografie III** o místech a lidech v globálním kontextu;

(22) **Pomocné vědy historické**, kde se studenti dozvědí něco o heraldice, paleografii, genealogii, diplomatice a sfragistice;
(23) **Nad vědou v dějinách I a II** o vědecké metodě a jejím vývoji;
(24) **Nad vědou v dějinách III a IV**, kurz, který rozšiřuje výše uvedený o filosofii vědy;
(25) **Matematika 0**, zabývající se shodnými zobrazeními a funkcemi;
(26) **Matematika III** o kombinatorických hrách;
(27) **Matematika IV**, kurz lineární algebry;
(28) **Antropologie**, která účastníky seznámí se základy této vědy;
(29) **Programovatelné automaty** o simulacích a řízení strojů;
(30) **Grafika**, která studenty naučí vytvořit si jednoduchou simulaci;
(31) **Poznej sám sebe**, kurz osobního rozvoje;
(32) **T-expedice 2015**, příprava na pozdější výjezd.

Kurz *Lineární algebra* byl v rámci projektu Talnet novinkou, ostatní kurzy probíhaly již poněkolikáté. Až do roku 2015 probíhaly kurzy v online prostředí *Learning Space*, od roku 2015 byly kurzy převedeny na platformu Moodle.

Při podrobnějším pohledu na výše uvedený seznam kurzů si všimneme, že mezi kurzy **Matematika 0**, **Matematika III** a **Matematika IV** chybí kurzy **Matematika I** a **Matematika II**. Z informací na oficiálních webových stránkách projektu vyplývá, že tyto kurzy ve školním roce 2015/2016 vůbec nebyly otevřeny. To na jednu stranu ukazuje, že očíslování kurzů nemá vliv na obsah jednotlivých kurzů, což doložím v následujících paragrafech, a na druhou stranu je důkazem, že v českém prostředí jediný projekt zaměřený na *mimoškolní online vzdělávání* (za podpory Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy) nabízí „nadaným“ studentům v matematice pouze tři tematicky orientované kurzy, mezi kterými je kurz lineární algebry, který by měl být považován za experimentální. Navíc technicky náročný převod stávajících kurzů z jednoho programového prostředí do druhého způsobil, že spuštění kurzů bylo nutné rozložit do dvou vln, které od sebe byly časově vzdáleny tři až čtyři týdny, což v důsledku znamenalo, že kurz lineární algebry vystupující pod označením **Matematika IV**, byl jediným matematickým kurzem, který začal v souladu s plánovaným harmonogram kurzů. Další informace ohledně harmonogramu a průběhu kurzu a vlivu změn termínů na zahájení kurzu jsou obsaženy v kapitole *Organizace a průběh kurzu*.

Jako lektor kurzu lineární algebry jsem měl přístup pouze ke svému kurzu a do tzv. *společné části*, která sloužila všem studentům Talnetu a instruktorům jako hlavní zdroj informací (převážně technického směru).[2]

---

[2] V rámci „kurzu“ *Společná část* se studenti instruovali v praktických dovednostech práce ve výukovém prostředí, jako například vyplnění *osobního profilu*, práce v *diskuzním fóru* – jak vložit obrázek ke svému příspěvku v diskuzi – práce v prostředí *úkol*, které slouží k odevzdávání a hodnocení úkolů v online prostředí apod.

Aby čtenář této práce nabyl představy o obsahu jednotlivých matematických kurzů, jsou dále shrnuty informace ke každému z nich. Jak již bylo řečeno v odstavci výše, do jiných než jmenovaných kurzů jsem jako lektor neměl povolen přístup. Proto jsou níže uvedené informace založeny na popisech kurzů dostupných z webových stránek projektu.

Jako první si představme kurz **Matematika 0**, který je určen studentům ve věku od 13 do 15 let. Je rozdělen do dvou bloků. Podzimní blok je nazván *Téměř vše o funkcích* a autor/ka jej charakterizuje následujícím popisem:

> V prvním bloku se seznámíme s obecným pojmem funkce a s některými elementárními funkcemi: s funkcí lineární a lineární po částech, s funkcí kvadratickou, lineární lomenou a s funkcí druhá odmocnina. Vysvětlíme si jejich vlastnosti a naučíme se kreslit grafy nejen těchto funkcí, ale i grafy funkcí „mírně složitějších". Budeme se také zajímat o některé obecné vlastnosti funkcí: ve kterých intervalech jsou rostoucí nebo klesající, ve kterých bodech nabývají svého maxima nebo minima a jak se pozná funkce sudá a lichá.
>
> Velkou pozornost věnujeme funkcím, které jsou prosté, a naučíme se určovat funkce, které jsou k nim inverzní. [**48**]

Druhý blok kurzu (jarní) s názvem *Tajemství geometrických ornamentů a vzorů aneb shodná zobrazení v rovině* autor/ka představuje ve své anotaci následovně:

> Ve druhém bloku se budeme věnovat jedné ze zajímavých oblastí světa geometrie – shodným zobrazením v rovině. Postupně se seznámíme se čtyřmi zobrazeními a jejich vlastnostmi. Budeme vytvářet geometrické obrazce zrcadlením, otáčením a posouváním. Ukážeme si, jak se dá využít osová a středová souměrnost, otočení a posunutí pro tvorbu geometrických ornamentů a vzorů. [**48**]

První kurz je tedy věnován jednak elementárním funkcím a jednak shodným zobrazením v rovině. Doplním, že podnázev tohoto kurzu zní *Funkce a shodná zobrazení.*

Dalším kurzem je **Matematika I** s podtitulem *Matematické algoritmy a jejich geometrické reprezentace.* Jedná se opět o kurz realizovaný ve dvou blocích, konkrétně je to podzimní blok *Rovinná a prostorová geometrie* a jarní blok *Polynomy.* Kurz je určen studentům ve věku od 14 do 15 let a jeho autor jej uvádí anotací:

> Algoritmy najdeme v matematice téměř všude. V tomto kurzu se věnujeme dvěma matematickým oblastem. V geometrii se podíváme na měření a obsahy mnohoúhelníků a během bloku si ukážeme, jak funguje tak zvaná kvadratura mnohoúhelníku – přeměna libovolného mnohoúhelníku na čtverec o stejném obsahu. Druhý blok se zabývá mnohočleny

> neboli polynomy. I kolem nich najdeme celou řadu užitečných algoritmů, ukážeme si jich hned několik, třeba k hledání kořenů mnohočlenů. [**49**]

Tak jako předešlý kurz ani kurz **Matematika II** nebyl ve školním roce 2015/2016 otevřen. Celkově třetí kurz v pořadí je určen pro studenty ve věku od 15 do 16 let. Jeho podtitulem je *Geometrie v klidu a v pohybu*. Opět je výuka rozdělena do dvou bloků. První blok s názvem *Kombinatorika* pokračuje jarním blokem *Zobrazení v rovině*. Obsah je shrnut v následující anotaci:

> Ve druhém matematickém kurzu se můžete zabývat dvěma zajímavými oblastmi matematiky, kombinatorikou a geometrickými zobrazeními.
>
> Kombinatorika je náplní prvního bloku kurzu. Ukážeme si, jak se dají spočítat prvky některých konečných množin, když známe jejich vlastnosti. Kromě toho přijde na řadu holubník, chození do schodů s pomocí Fibonacciho čísel nebo sčítání mocnin přirozených čísel.
>
> Druhý blok je věnován (geometrickým) zobrazením. Ukážeme si mimo jiné, jak se s nimi dá počítat – pomocí matic a vektorů. Budeme zkoumat nejen to, jak se objekty v rovině a prostoru pohybují, ale i které z nich se naopak při daném zobrazení nepohybují – tzv. invarianty zobrazení. Invarianty určují některé důležité vlastnosti zobrazení. Podle shodných či rozdílných invariantů můžeme také zobrazení třídit. Pojem invariantu prostupuje dále do obtížných a obecných teorií moderní geometrie, ty už však sledovat nebudeme (ale dobrovolníci se s nimi mohou seznámit v rámci psaní seminární práce). [**50**]

V anotaci si můžeme všimnout, že se zde vyskytují pojmy *matice* a *vektory*, z čehož lze soudit na bližší příbuznost s kurzem lineární algebry. Při návrhu kurzu lineární algebry však tato skutečnost nebyla nijak zohledněna.

Dalším kurzem je kurz **Matematika III** určený pro studenty ve věku od 14 do 18 let s podnázvem *Kombinatorické hry*.[3] Výuka je opět rozdělena do dvou bloků na *Nimové hry* a *Hra HackenBush*. Anotace kurzu navíc slibuje i přesah k filozofii (nejen) matematiky.

> … V tomto kurzu se budeme zabývat především hrami, které se nazývají matematické. Jedná se o hry, ve kterých není žádný prvek náhody (jako např. ve vrhcábech), nebo využití skryté informace (jako např. v black jacku). Úspěch v matematické hře závisí pouze na dovednosti hráče, nebo, jak si v kurzu ukážeme, zcela vychází ze znalosti správné strategie a výchozí pozice. …

[3]Doporučený věk účastníků kurzu **Matematika III** není (v době psaní diplomové práce) z pozice zájemce o kurz uveden jednoznačně. Při procházení seznamu všech kurzů (viz [**54**]) z webových stránek projektu najdeme doporučené věkové rozmezí od 14 do 18 let, ovšem na stránce s anotací onoho kurzu je doporučení na věk od 17 do 18 let (viz [**51**]).

> …V rámci kurzu se kromě matematických témat budeme zabývat i tématy filosofickými. Po stopách Descartese budeme objevovat metodu, jak z jednoduchých pravd odvozovat stále další a složitější. Ukážeme si, na jakých základech stojí matematika a že ani ty nemusí být neměnné, a s trochu štěstí uzavřeme i nějaký z otevřených problémů, kterých je v matematice stále mnoho. [**51**]

Jako poslední je v této práci podrobně rozpracován kurz **Matematika IV** s podtitulem *Lineární algebra.*[4] Zájemcům o studium byl představen následujícím způsobem:

> Kurz pořádaný v zimním semestru seznamuje studenty v šesti lekcích se základními pojmy lineární algebry, matematické teorie vektorových prostorů, matic a soustav lineárních rovnic. Uplatnění lineární algebry nalézáme jak v moderní fyzice (formalismus kvantové mechaniky), tak v dalších vědních oborech technického i přírodovědného směru. Bez hlubší znalosti této disciplíny se neobejdeme ani při studiu jiných matematických oborů (matematická analýza apod.). Nejen z tohoto důvodu bývá lineární algebra zařazována do úvodního kurzu matematiky na vysokých školách.
>
> Širší věkové rozpětí účastníků napovídá, že obtížnost kurzu si může každý přizpůsobit svým znalostem a schopnostem. Úspěšné absolvování tak není závislé na tom, co už máte ve škole probráno, ale spíše na vaší chuti a motivaci do abstraktní matematické teorie proniknout.

Jak je z jednotlivých anotací možné usoudit, obsahy jednotlivých kurzů nejsou mezi sebou provázány a tudíž absolvování jednoho kurzu není a priori předpokladem pro studium dalšího kurzu s vyšším pořadovým číslem. Bohužel se na webových stránkách kurzů nedočteme, že student nemusí projít všemi kurzy s nižším označením, aby mohl studovat vybraný kurz. Například že *není nutné* absolvovat kurzy **Matematika 0**, **Matematika I** a **Matematika II**, aby mohl studovat kurz **Matematika III**.

Pro úplnost uveďme, že kurz lineární algebry byl realizován pouze v podzimním bloku, tedy v rozsahu šesti lekcí (sedmi výukových týdnů) a doporučené věkové rozpětí účastníků bylo stanoveno od 16 do 19 let.

[4] V textu bude častěji používáno označení *kurz lineární algebry* anebo *kurz Lineární algebra* namísto oficiálního názvu **Matematika IV**.

KAPITOLA 5

Kurz lineární algebry

V této kapitole se budeme zabývat východisky formulovanými na základě kapitol *Specifika online vzdělávání* a *Fragmenty lineární algebry v současném středoškolském kurikulu, jejich výuka a náměty pro její rozšíření*, které ovlivnily výslednou podobu kurzu **Matematika IV** – Lineární algebra realizovaného v rámci projektu Talnet v zimním semestru akademického roku 2015/2016. Jedná se o soubor nejrůznějších hledisek, která musela být reflektována ještě před samotnou přípravou výukových materiálů. Jsou to zejména odpovědi na tyto otázky:

- *Pro koho je kurz lineární algebry určen?* Je třeba definovat cílového adresáta kurzu včetně jeho motivace se do kurzu přihlásit, kurz studovat, a respektovat jeho časové možnosti stejně tak jako jeho vstupní znalosti a dovednosti.
- *Co je cílem kurzu Lineární algebra?* V tomto případě je nutné odpovědět na otázky, proč by se student měl do kurzu přihlásit, co by od něj mohl očekávat a co mu kurz přinese v jeho budoucí studijní dráze.
- *Jaká témata lineární algebry se do připravovaného kurzu mají zařadit, aby vedla k dosažení definovaných cílů?* Jaký má být tedy obsah online vzdělávacího kurzu, aby byl pro studenty přínosný a motivující a aby byl dostatečně náročný?
- *Jakými prostředky a jakým způsobem ověřit plnění či dosahování stanovených cílů?* Je úkolem kurzu testovat znalosti účastníků? Má se uplatňovat kriteriální hodnocení v přístupu k těmto znalostem?

Zatímco v předchozí kapitole jsme se zabývali obecně činností projektu Talnet, v této kapitole se zaměříme na koncepční vymezení kurzu lineární algebry. Následovat pak budou části diplomové práce, které již se zaměří na konkrétní organizační podobu kurzu lineární algebry a na jeho vyhodnocení.

5.1. Cílový adresát kurzu

Určení potenciálního účastníka je nutným předpokladem k samotnému vytvoření kurzu. Není možné vzdělávací obsah plánovat bez ohledu na schopnosti a dovednosti či metakognitivní schopnosti účastníků kurzu samotných. Prostřednictvím oficiálních dokumentů, jež je možné studovat např. z webových stránek projektu Talnet, není možné definovat účastníka online vzdělávacího kurzu dostatečně přesně. Toto tvrzení lze opřít o výrok, který byl již vzpomínán v kapitole *O projektu Talnet* a který si ve zkrácené formě připomeňme.

> V Talnetu vycházíme z přístupu, který považuje za rozhodující spíše to, jak se dokáže žák či student vypořádat s úkoly v daném oboru, než osobnostní předpoklady zjišťované pomocí testů. [**52**]

Proto je velice důležité si uvědomit, že projekt Talnet navzdory svému (možná poněkud zavádějícímu) jménu zprostředkovává možnost rozšířené výuky přírodních věd v podstatě jakýmkoli studentům, kteří o ni projeví zájem. Protože nadání potenciálních účastníků není nijak měřeno, zřejmě by to ani nebylo možné (a je otázkou, zda by to bylo žádoucí), dalo by se tedy spíše říci, že projektu Talnet se zúčastňují studenti motivovaní rozšířit si svoje znalosti a schopnosti v daném oboru.

Očekávanou představou tak může být student, který je skutečně matematicky nadaný, což může doložit například účastí na různých matematických soutěžích, který si z nabídky kurzů vybral kurz lineární algebry cíleně. Takový adresát kurzu je nejvíce žádaný, nicméně je třeba si uvědomit, že mezi studenty se mohou vyskytovat i tací, kteří tento předpoklad nesplňují. Například si můžeme představit studenta, který je nadaný na matematiku, nicméně si kurz lineární algebry nevybral cíleně, ale pouze jako alternativu, což ze závěrů, které vyplývají z předchozí kapitoly *O projektu Talnet*, plyne z malé nabídky vzdělávacích kurzů pro matematicky nadané studenty.

Na druhou stranu se zde mohou vyskytnout i tací, které bychom za matematicky nadané nemuseli obecně považovat, nicméně případný nedostatek „nadání" nahrazují pílí a snahou se zlepšit. Spektrum profilů účastníků kurzu je tak široké, mezi studenty se mohou vyskytnout i zcela odlišné charakteristiky. Není vyloučeno, že se v roli účastníka může objevit student, který se matematikou a priori nezabývá. Nicméně je motivován budoucím studiem na vysoké škole, kde se lineární algebra vyskytuje jako např. povinný předmět, což ho přiměje přihlásit se do kurzu, aby budoucí přechod ze střední na vysokou školu nebyl tak obtížný.

Kdybychom tedy předpokládali, že se kurzu zúčastní primárně nadaní studenti se zájmem o matematiku, jistě by se v kurzu měla vyskytovat témata obsahově složitější (z hlediska lineární algebry by se mělo jednat o abstraktnější přístup k tématům). Úlohy studentům předkládané by byly touto větší abstraktností také poznamenány. Dala by se předpokládat větší samostatnost takových studentů. Také se dá předpokládat, že některá témata lineární algebry, jako je např. řešení soustav lineárních rovnic anebo základy maticového počtu, již takový student může předem znát, neboť se jedná o látku, která je takovému studentovi snadno přístupná i v rámci samostudia. To ovšem nemůžeme předem předpokládat. Proto definice účastníka kurzu tak, jak byla formulována výše, vyžaduje, aby obsah byl přizpůsobitelný minimálně každému typu účastníka s již uvedenými charakteristikami.

Z toho vyplývá, že jednotlivé vzdělávací obsahy by měly být propojeny principem, že ke studiu daného tématu jsou zapotřebí pouze základní matematické znalosti a dovednosti nebo znalosti a dovednosti již v kurzu získané. Nesmíme navíc zapomenout na to, aby studenti, kteří např. prošli kurzem analytické geometrie na střední škole, umí pracovat s komplexními čísly nebo se ve svém samostudiu naučili integrovat, měli možnost tyto svoje znalosti a dovednosti na vhodně vytvořených materiálech (při řešení přiměřeně obtížných úloh) rozvíjet.

Na výslednou podobu kurzu, na jeho cíle a na formu hodnocení má nesporný vliv počet účastníků, kteří jsou do kurzu nejen zapsáni, ale kteří v něm aktivně pracují. Z výroční zprávy NIDV (viz [**57**, s. 40]), ale i z konzultací s organizátory Talnetu vyplývá, že počet účastníků kurzu je třeba očekávat spíše v řádu jednotek, maximálně desítek, než stovek a více. Pokud bychom příliš přesně formulovali požadovaný věk a vstupní znalosti přihlášených, mohlo by to ve spojení s motivačními faktory v konečném důsledku výrazně omezit počet přihlášených účastníků. Z tohoto důvodu se věkové rozpětí účastníků stanovilo na 16 - 19 let, což na jednu stranu potenciálně zvětšuje pravděpodobnost vyšší účasti studentů v kurzu, na druhou stranu klade nároky na vzdělávací obsah, v němž bude nutné tento fakt nějakým způsobem reflektovat.

Podkladem pro plánování rozsahu kurzu je zohlednění dvou základních faktorů. Jednak časový rozsah samotného kurzu, tedy že kurz obsahující právě jeden blok (což byl případ kurzu lineární algebry) se skládá z právě šesti lekcí a že čas potřebný ke studiu má být v rozmezí 2 až 4 hodin týdně. Druhým faktorem jsou časové možnosti potenciálních účastníků, kteří se do aktivit Talnet zapojují ve svém volném čase. Míra instruktivního přístupu v kurzu (např. časově omezené odevzdání úkolů) by proto měla respektovat, že studenti mají primárně povinnosti vůči škole a že se v tomto případě jedná o vzdělávání v neformálním prostředí. To znamená, že kurz by měl umožnit studentům svobodně si volit pořadí aktivit.

Závěrem tedy můžeme shrnout, že kurz lineární algebry byl měl být v souladu s posláním Talnetu koncipován jako kurz rozšiřující matematické znalosti středoškolských studentů; bylo by chybou postupovat při jeho tvorbě tak, jako by byl určen pro běžnou třídu. Aby splnil svůj účel, je nutné zadávat studentům takové úkoly, aby je kurz nenudil opakováním věcí, které již znají, a aby se uplatnil jejich potenciál zvyšovat své matematické schopnosti. Zároveň je nutné předpokládat, že různí studenti mohou mít různé časové nároky na pochopení nových konceptů a jejich osvojení, že si některé nové informace zapamatují ihned a u jiných bude potřeba delší čas, mimo jiné i v závislosti na předchozím studiu.

5.2. Cíle a vzdělávací obsah kurzu

Základní cíle kurzu lze formulovat následujícím výčtem:

(1) Představit studentům matematický obor lineární algebra v celé jeho šíři a jeho vztah k středoškolské matematice.
(2) Pokusit se najít kompromis mezi dvěma možnými přístupy, které se ve výuce lineární algebry uplatňují – *pragmatickým* a *abstraktním*.
(3) Namísto algoritmických postupů vést studenty k rozvoji argumentace a používání důkazových technik.

Lineární algebra je matematická disciplína, která nalézá uplatnění v mnoha dalších odvětvích. Setkáme se s ní nejenom ve fyzice (např. při popisu kvantové mechaniky), je důležitou matematickou disciplínou sama o sobě. Těmto skutečnostem byla věnována část první kapitoly této diplomové práce. První cíl kurzu tak apeluje na nutnost tyto aspekty lineární algebry studentům představit v jejich šíři. Při tom je nutné hledat spojnice se středoškolským obsahem matematického vzdělávání. Během výuky v kurzu by tak měly být zdůrazňovány oblasti středoškolské matematiky, které byly identifikovány a v druhé kapitole teoretické části této práce rozpracovány.

Rovněž bylo na příkladu vybraných publikací demonstrováno (viz kapitola *Vymezení matematické disciplíny lineární algebra z pohledu středoškolské matematiky*), že ve vysokoškolských kurzech lineární algebry lze pozorovat dvě polarity přístupu k její výuce. Tyto přístupy jsem nazval *pragmatický* a *abstraktní*. Pragmatický přístup akcentuje aplikaci matematických poznatků tohoto oboru, při kterých se opírá o teorii reálných aritmetických vektorových prostorů $\mathbb{R}^n$. Abstraktní přístup k tématu vychází z principů abstraktní algebry a lineární algebra je zde chápána coby studium vektorových prostorů jako algebraických struktur. Prostor $\mathbb{R}^n$ je ze své podstaty rovněž velmi významným prostorem, nicméně je to pouze jeden z možných vektorových prostorů, který se při tomto přístupu studuje.

Úlohy typické pro pragmatický způsob výuky jsou často algoritmické, jako řešení soustav lineárních rovnic, stanovení hodnosti matice, stanovení lineární závislosti a nezávislosti vektorů, počítání determinantů a další. Úlohy abstraktního přístupu jsou ve své podstatě úlohami důkazovými. V praxi se uplatňuje přístup, který je často kompromisem mezi oběma zmíněnými.

Tohoto přístupu se budeme držet i zde. Výše formulovaný cíl tedy ve své podstatě obsahuje potřebu ukázat studentům, že za algoritmickými postupy (např. řešení soustav lineárních rovnic, užívání maticového formalismu) stojí hluboká teorie vektorových prostorů.

S tím souvisí i třetí z uvedených cílů. Je třeba si uvědomit, že online prostředí skrze své programové funkce umožňuje lektorovi sledovat až výsledný produkt studentovy práce. Často se v praxi jedná o nahrání hotového dokumentu do daného online prostředí.

Pokud by mezi předkládanými úlohami převažovaly takové úlohy, které jsou zaměřeny především na uplatnění algoritmických postupů, bylo by v zásadě velmi obtížné, ba dokonce nemožné, z výsledků řešení takových úloh usuzovat na pochopení či nepochopení probírané látky studentem.

Uvažujme například úlohu, která je zaměřena na násobení matic, jedná se tedy o početní techniku, jak vynásobit dvě matice mezi sebou. V odevzdaném dokumentu se objeví pouze výsledek provedené operace, což je pochopitelné, protože při násobení matic se často nerozepisují jednotlivé kroky. Můžeme však z výsledku řešení této úlohy odhadnout pochopení či nepochopení dané látky? Chyba v takovémto řešení značí pouze numerickou chybu, nebo se jedná o chybné pochopení?

Aby se vliv těchto jevů výrazně omezil, což neznamená, že úlohy na násobení matic z kurzu vypustíme, je třeba zaměřit naši pozornost k úlohám, které vyžadují od studenta schopnost argumentace použitého postupu. Takové úlohy jsou zpravidla úlohami důkazovými. S ohledem na očekávaný věk účastníků lze předpokládat, že elementární znalosti důkazových technik (jako je například důkaz přímý, nepřímý či sporem) si měli osvojit v rámci studia střední školy (resp. gymnázia). Kurz by proto měl tyto schopnosti dále rozvíjet.

Na druhou stranu je třeba připustit, že ne všichni studenti se s tímto na střední škole seznámili, či se s danou problematikou neseznámili v dostatečné míře. Takovým studentům je třeba nabídnout externí materiály, které by jim umožňovaly si látku dostudovat, neboť kurz lineární algebry nemůže toto téma z časových důvodů pokrýt. Co je možné v rámci kurzu pro studenty udělat, je doplnit zadání nápovědami, jak v konkrétním řešení důkazu postupovat.

Z výše uvedeného plyne, že úlohy, které budou studentům kurzu předkládány, by měly být především úlohami důkazovými, nicméně úlohy s algoritmickým postupem také nesmějí být opomíjeny (z důvodu nácviku početních technik lineární algebry). Sekundárním záměrem je také ulehčit studentům přestup ze střední na matematicky orientovanou vysokou školu.

Při výběru obsahové náplně kurzu v zásadě existovaly dva přístupy. Věnovat kurz jednomu nosnému tématu, kdy by bylo všech šest lekcí zaměřeno na jeho pochopení více do hloubky, nebo probrat v průběhu kurzu témat více a obsáhnout širší spektrum informací. Obě řešení mají své výhody i nevýhody.

Vzhledem k tomu, že jedním z cílů kurzu je představit studentům lineární algebru v celé její šíři, dostal přednost přístup polytematický, tedy že každý týden bude probráno jiné téma. Tento přístup může být výhodný i z motivačního hlediska, neboť každý týden přináší studentům něco nového. Není také vyloučeno, že některým studentům bude lépe vyhovovat například kapitola o maticích než některé abstraktnější lekce.

Aby kurz začínal v souladu s principem, který byl formulován v předchozí podkapitole, tedy aby nepředpokládal nějaké specifičtější předchozí matematické znalosti účastníků, bylo jako zahajovací téma zvoleno téma *Matematické struktury*, které započalo studium lineární algebry jako čistě abstraktní matematické teorie.

V následujícím přehledu je uveden sylabus kurzu lineární algebry v takové podobě, ve které byl později rozpracován a realizován. U každého tématu je uveden výčet charakterizujících klíčových slov, která se při studiu dané lekce měla objevit.

(1) **Matematické struktury.** Zobrazení; kartézský součin; algebraické operace a jejich příklady; komutativita; asociativita; existence neutrálního prvku, inverzních prvků; algebraická struktura; multiplikativní, aditivní a obecný zápis; grupa a její příklady; algebraické těleso a jeho příklady.

(2) **Vektorové prostory a podprostory.** Vektorový prostor a jeho vlastnosti; vektorový podprostor; modely vektorových prostorů: prostor vázaných geometrických vektorů v rovině (v prostoru), prostor aritmetických vektorů, prostor polynomů stupně nejvýše n, prostor číselných posloupností, prostor funkcí.

(3) **Báze a dimenze vektorových prostorů.** Lineární kombinace vektorů; lineární obal; množina generátorů; lineární závislost a nezávislost; vektorový prostor konečné dimenze; báze vektorového prostoru; dimenze vektorového prostoru; souřadnice vektoru vzhledem k bázi; základní poznatky o izomorfismu vektorových prostorů.

(4) **Matice.** Definice matice a základní typy matic: nulová matice, jednotková matice, symetrická matice, antisymetrická matice, diagonální matice, transponovaná matice; operace s maticemi a jejich vlastnosti; vektorový prostor matic typu (m, n); vztah maticových operací k transponování; vztah mezi lineární kombinací vektorů a maticovým násobením; matice jako operátory.

(5) **Soustavy lineárních rovnic.** Pojem soustavy lineárních rovnic a jejího řešení; ekvivalentní úpravy; eliminační metody řešení soustav lineárních rovnic; Gaussova-Jordanova eliminace; homogenní a nehomogenní soustava lineárních rovnic; matice soustavy a rozšířená matice soustavy; odstupňovaný tvar a redukovaný odstupňovaný tvar; pivotní a nepivotní sloupec.

(6) **Unitární prostory.** Skalární součin; vektorový prostor se skalárním součinem; geometrie definovaná skalárním součinem: norma vektoru, úhel mezi dvěma vektory; metrický a normovaný prostor.

Důvody, proč byl kurz navržen právě tímto způsobem, jsou převážně diskutovány v kapitole *Popis a vyhodnocení dílčích výukových lekcí.* Z rozvrhu témat i jejich pořadí je však zřejmá následující koncepce. První polovina kurzu respektuje pohled na lineární algebru jako na abstraktní matematickou teorii zabývající se vlastnostmi vektorových prostorů. Studium těchto vlastností vede v praxi na početní úlohy, jakými může být například stanovení báze a dimenze vektorového prostoru, ověření lineární nezávislosti množiny vektorů nebo výpočet koeficientů jisté lineární kombinace. Ve druhé polovině kurzu se pak studenti seznamují s tím, jaké matematické prostředky lineární algebra přináší pro řešení takovýchto a podobných úloh. Proto jsou matice a řešení soustav lineárních rovnic zařazeny později, byť například řešení soustav lineárních rovnic je látka běžně probíraná na středních školách (alespoň na úrovni řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých nebo tří lineárních rovnic o třech neznámých).

Kurz uzavírá kapitola o skalárním součinu, neboť, jak bylo demonstrováno v teoretické části této práce, se jedná o téma, se kterým se v určité podobě studenti seznamují běžně v hodinách analytické geometrie. Rovněž toto téma slouží k uzavření cesty od lineární algebry k analytické geometrii, kterou chápu v podobě postupného budování odpovídající algebraické struktury, eukleidovského prostoru $\mathbb{E}^n$, který pro $n = 2$, resp. $n = 3$, umožňuje plnohodnotně algebraicky popisovat geometrické objekty v eukleidovském prostoru planimetrie, resp. stereometrie, a navíc díky němu můžeme podstoupit cestu ke studiu prostorů libovolné dimenze n.

Pořadí témat tedy respektuje hlavní výše uvedenou myšlenku a samozřejmě také logickou návaznost jednotlivých kapitol. Je jen těžko představitelné, že by kapitola *Báze a dimenze vektorových prostorů* předcházela kapitole *Vektorové prostory a podprostory*, nebo aby tato kapitola byla v kurzu zařazena dříve, než kapitola *Matematické struktury.* Podobně můžeme uvažovat i u dalších kapitol.

Takto navrženým vzdělávacím obsahem je možné dosáhnout rovnováhy mezi pragmatickým a abstraktním přístupem, což je jedním z cílů připravovaného kurzu.

5.3. Hodnocení

Důležitou součástí kurzu samozřejmě je i zjišťování, zda byly splněny stanovené cíle. Je také nutné najít rovnováhu mezi tím, že výstupy z kurzu budou sloužit jako podklady pro diplomovou práci, a tím, že nelze studenty zahltit neustálými požadavky na plnění. Je třeba mít stále na paměti, že účastníci kurzu v něm pracují ve svém volném čase a nelze je nijak nutit, aby v kurzu pokračovali, pokud by pro ně neustálé dotazy byly demotivující. Na druhou stranu je třeba pro lektora zajistit zpětnou vazbu, že je daný student v kurzu stále aktivní a bude v něm pokračovat.

Protože byl očekáván spíše menší počet studentů, jakékoli šetření musí být svým charakterem spíše kvalitativní než kvantitativní. V podkapitole *Cílový adresát kurzu* jsme se také zabývali tím, že profily účastníků kurzu mohou být velmi rozdílné a že různí studenti mohou mít od kurzu lineární algebry odlišná očekávání. Bylo by tedy vhodné se při hodnocení zaměřit spíše na individuální zlepšení jednotlivých účastníků a umožnit jim vlastní trajektorii prostupu kurzem, co se týče obtížnosti.

S tím souvisí i otázka, zda využívat v rámci platformy Moodle testování. Protože byla v době vzniku kurzu možnost využití testů velkou neznámou, nebyly součástí popisovaného ročníku kurzu. V rámci případných dalších ročníků kurzu by však testy, které by poskytovaly formativní hodnocení studentů (tedy hodnocení určené primárně pro studenty – nemusely by být podmínkou absolvování), připadaly v úvahu.

Individuální postup a respektování odlišných vstupních znalostí účastníků by měly být zajištěny soubory úloh, z nichž si studenti budou vybírat ty, které budou řešit, podobně jako se postupuje ve školních kolech Matematické olympiády nebo Fyzikální olympiády.

Soubor úloh by proto měl obsahovat úlohy různé obtížnosti, aby studenti, kteří projeví o studovaný obor zájem, měli možnost zvolit úlohy složitější, které pro ně budou dostatečnou výzvou, ale obsahoval i úlohy, které lze řešit na základě poznatků vybudovaných studiem jednotlivých lekcí. Obtížnost a pracnost bude zohledněna při jejich bodovém ohodnocení.

Úskalím tohoto přístupu je to, že maximální dosažitelné množství bodů je výrazně vyšší než minimální počet bodů nutný pro absolvování, neboť díky možnosti volby je nutné počítat s tím, že většina úloh bude studentem neřešena. Zajišťuje však studentům dostatečnou svobodu výběru.

Pro potřeby diplomové práce se však jedná o postup relativně riskantní, neboť se může stát, že některé úlohy nebudou řešeny vůbec. Z jednoho ročníku kurzu tak není nutné usuzovat na vhodnost a nevhodnost zařazených úloh, to by bylo možné až při opakování kurzu v dalších ročnících. Proto ani v textu diplomové práce není kladen zvláštní důraz na řešení úloh studenty. Studentská řešení zadaných úloh jsou součástí příloh této práce.

Úkolem úloh bylo poskytovat lektorovi zpětnou vazbu o porozumění probrané látce. Profil reálných účastníků a jejich spokojenost s formou kurzu by měla být zjišťována pomocí dotazníkového šetření a komunikace v diskuzích. Dotazníky by měly být koncipovány tak, aby jejich vyplnění nebylo příliš časově náročné. Lze je také využít jako indikátor toho, že student je v kurzu stále aktivní, například tím, že je třeba na otázky odpovědět do zveřejnění další lekce.

KAPITOLA 6

Organizace a průběh kurzu

V této kapitole se čtenář seznámí s informacemi, které se týkají konkrétní podoby kurzu lineární algebry. Budou zde diskutovány podmínky vzniku kurzu (myšleno technického zajištění), popis výsledné podoby kurzu, představení účastníků a naplňování komunikačních schémat v kurzu s akcentem na kapitolu *Specifika online vzdělávání* publikovanou v teoretické části této práce.

Předešlá kapitola nastínila hlavní směřování online vzdělávacího kurzu především v rovině formální, která pokrývá otázku volby vzdělávacího obsahu, hodnocení studentů a cílů, které má kurz splnit. Tyto koncepce byly formulovány před začátkem zpracování a přivedení kurzu do technické podoby, jakou nyní má.

6.1. Výsledná podoba kurzu a použité přístupy k učení

Ze závěrů předchozí kapitoly byl formulován kurz lineární algebry jako kurz seznamující účastníky postupně se šesti navzájem souvisejícími klíčovými tématy tohoto matematického oboru. Tento kurz měl umožňovat dostatečnou svobodu těm, kteří o něj projeví zájem, tak, aby mohli plnit zároveň svoje školní povinnosti a úkoly zadané v kurzu, ale také měl prostřednictvím průběžných dotazníkových šetření umožňovat sledování, zda studenti zamýšlejí dále v práci pokračovat či nikoli.

Při navrhování výsledné podoby kurzu *Lineární algebra* v prostředí Moodle jsem se rozhodl zaměřit na následující grafické zpracování. Celkové prostředí kurzu by mělo být klidné, nerušivé a přehledné. Barevnost by měla být spíše uměřená, odlišná barva či tučné písmo vyznačují jen skutečně ty nejdůležitější informace. V kurzu je pouze jedno navigační menu umožňující jeho pohodlné ovládání z jednoho místa.

Věci týkající se jedné lekce jsou u sebe a je na první pohled patrné, kde jedna lekce končí a druhá začíná. Aktuální lekce je zvýrazněna. Předchozí lekce jsou dostupné v plné verzi, lekce, které teprve budou následovat, nejsou zobrazeny. Na začátku úvodní stránky je popis celého kurzu spolu s důležitými soubory stanovujícími pravidla, jak absolvovat kurz. Na konci hlavní stránky se nachází *Diskuzní fórum*, které kromě obecné části obsahuje i sekce věnované jednotlivým lekcím. V příloze k této práci čtenář nalezne pro lepší představu fotografie vzdělávacího prostředí. *Seznam příloh* pak obsahuje popisky ke každému uvedenému snímku.

Lekce jsou jednotně členěny. Po názvu lekce následuje krátká anotace, dále *hlavní studijní materiál* (prezentace ve formátu PDF), *dotazník* a *soubor úloh* k dané lekci.

U některých lekcí, tam, kde byl předpoklad, že někteří studenti se třeba nesetkali s danou notací či si potřebují některé základní matematické principy připomenout, se nacházely také *vedlejší studijní materiály*, což byly primárně odkazy na webové stránky, které jim s tímto problémem mohou pomoci.

Jak již bylo řečeno, hlavní výukový materiál byla prezentace k danému tématu. Blíže se k jejich obsahu vyjadřuji v kapitole *Popis a vyhodnocení výukových lekcí*, popřípadě se s jejich konkrétní podobou může čtenář seznámit v přílohách této práce. Otevření hlavního studijního materiálu bylo podmínkou pro zpřístupnění dotazníku.

Vyplnění dotazníku v časovém limitu týdne zpřístupnění dané lekce bylo podmínkou absolvování kurzu. Úkolem dotazníků bylo poskytovat informace o spokojenosti účastníků s podobou dané lekce a její úplností, dále se zde vyskytly dotazy týkající se informací o účastnících a jejich individuálního náhledu na obtížnost dané lekce a příkladů, jež měli řešit. Druhotnou informací, kterou mi dotazníky poskytovaly, bylo, že daný student je v kurzu stále aktivní a dále v něm míní pokračovat. Dotazníky byly koncipovány tak, aby jejich vyplňování nevyžadovalo žádné výpočty a otevřenými otázkami poskytovaly prostor k individuálním odpovědím účastníků. Časově jejich vyplnění nemělo zabrat více než 15 minut.

U každé lekce byl připojen soubor se zadáním úloh týkajících se dané lekce a aplikací znalostí v ní nabytých. Každá úloha byla podle své obtížnosti či pracnosti bodově ohodnocena a k absolvování kurzu bylo nutné dosáhnout minimálního počtu bodů za správně vyřešené úlohy. Stejně tak bylo podmínkou úspěšného ukončení kurzu odevzdání vždy alespoň dvou řešených úloh z daného zadávacího listu, celkem tedy studenti museli vypracovat minimálně 12 úloh. V případě těchto úkolů jsem se rozhodl nastavit jediný limit – úlohy ze všech lekcí musely být odevzdány nejpozději do 7. prosince 2015, tedy týden po zpřístupnění poslední lekce *Unitární prostory*.

Tímto rozhodnutím jsem se snažil umožnit studentům, aby si mohli na řešení poměrně obtížných úloh najít dostatek času i v průběhu svého středoškolského studia. Stejně tak jsem předpokládal, že ne všechny lekce budou mít studenti ve stejné oblibě a při použití jednoho termínu odevzdání pro všechny úlohy mohou projít všechny soubory a „nasbírat body“ v tématech, která jim lépe vyhovují. Nicméně jsem účastníkům kurzu doporučil, aby svá řešení odevzdávali průběžně, i z toho důvodu, že ne zcela v pořádku zvládnuté úlohy jsem vracel k přepracování a studenti mohli získat plný počet bodů i za opakovaně odevzdávaný příklad, pokud nakonec dospěli ke správnému řešení.

Body byly v jednotlivých souborech úloh rozloženy poměrně rovnoměrně s výjimkou páté lekce, která obsahovala zejména početní úlohy na řešení soustav rovnic a počet v ní získatelných bodů byl tak omezen, aby byli studenti v dostatečné míře nuceni řešit i poněkud složitější úlohy z jiných lekcí. Za soubor úloh k lekci *Matematické struktury* bylo možné získat celkem 40 bodů, stejně tak v druhé lekci *Vektorové prostory* *a podprostory.* Úlohy z třetí lekce *Báze a dimenze vektorových prostorů* a ze čtvrté lekce *Matice* mohly svým řešitelům přinést až 45 bodů. Jak již bylo řečeno, v lekci *Soustavy lineárních rovnic* byl potenciální zisk 20 bodů a v poslední lekci *Unitární prostory* až 40 bodů.

> Kurz absolvovali ti studenti, kteří odevzdali všechny dotazníky v daném časovém termínu (vždy týden po zpřístupnění lekce), odevzdali alespoň dva vypracované příklady z každého souboru úloh k dané lekci a ze svých vypracovaných úloh získali alespoň 60 bodů z celkem 230 možných.[1]

Řešení úloh odevzdávali studenti nahráním souboru ve formátu PDF do Moodlu. V tomto prostředí jsem jim následně odpovídal prostřednictvím komentáře k odevzdávanému úkolu. Komentování matematického textu bylo obtížné, protože okno na odpověď je poměrně malé, zatímco moje připomínky a nápovědy pro opětovné odevzdání byly často rozsáhlé a navíc byly matematické výrazy sázeny v jazyce LaTeX, takže jsem až do okamžiku odeslání odpovědí studentům neviděl jejich finální podobu.

Z hlediska postupů popsaných v kapitole *Specifika online vzdělávání* byl kurz připraven s použitím kombinace různých přístupů k učení, kdy se jako nejvíce problematické jevilo poskytnout prostor východiskům konstruktivismu.[2]

Příčiny malého zapojení konstruktivistických přístupů spočívají částečně v nízké adaptabilitě kurzu vystavěného na platformě Moodle. Pokud budeme procházet ve výše zmíněné kapitole uvedenou charakteristiku konstruktivistického kurzu, zjistíme, že neschopnost adaptovat se u použitého online prostředí ve velké míře zamezuje interaktivnímu přístupu a omezuje počet variant, kterými by eventuálně mohl každý student na své cestě za porozuměním projít.

Individuální trajektorie byla nicméně respektována při výběru úloh, které studenti řešili. V rámci zadávacích listů se objevovaly úlohy různých obtížností. Některé úlohy byly spíše k procvičení a uplatňovalo se v nich pouze elementární opakování postupů obsažených v hlavním studijním materiálu. Jiné úlohy vyžadovaly kromě tohoto základního porozumění i větší míru pochopení dané lekce a zapojení vlastního uvažování studentů nad rámec toho, co bylo uvedeno v prezentaci.

U požadavku na to, aby studijní materiály obsahovaly studentům blízké situace zase naráží snaha lektora na vysokou abstraktnost vyučovaného tématu. Ačkoli se však

[1] Hranice 60 bodů nutných pro absolvování kurzu byla stanovena na základě porovnání dvou možných strategií při výběru úloh. Stanovil se počet bodů, kterých student může dosáhnout, pokud si z každého souboru úloh vybere právě dvě nejméně bodově ohodnocené úlohy. Podobně se stanovil počet bodů, kterých lze dosáhnout při výběru právě dvou nejvýše bodově ohodnocených úloh. Dolní mez odpovídá počtu 41 bodů, horní mez počtu 81 bodů. Stanovený počet 60 bodů je méně než horní mez a více než dolní. Tedy pro absolvování je nutné řešit buď více úloh o stejném bodovém zisku nebo úlohy složitější, a tudíž s vyšším bodovým ohodnocením.

[2] Ve významu vymezení konstruktivismu v kapitole *Specifika online vzdělávání.*

vzhledem k vyučované látce úlohy nevztahovaly k situacím běžné reality studentů, budovalo se v průběhu celého kurzu napojení na účastníkům důvěrně známá středoškolská témata.

Klíčová vlastnost konstruktivismu je jeho závislost na *kooperaci* všech zúčastněných a zde se podle mého názoru nachází největší problém konstruktivistického přístupu k online učení, protože se nejedná o obtíž technického rázu, ale o problém sociální. Pokud totiž vyžadujeme od studentů vyšší míru spolupráce, je nutné, aby tito studenti vytvářeli skupinu se všemi vztahy jí vlastními, což je ve virtuální realitě online prostředí požadavek velmi obtížný. Přesto jsem se v kurzu snažil podpořit alespoň v rámci *Diskuzního fóra* vzájemnou komunikaci studentů.

Z konstruktivistických zásad tak byly v rámci kurzu lineární algebry zapojeny zejména teze o vytváření osobního smyslu prostřednictvím smysluplných a přiměřeně obtížných úkolů a také do jisté míry snaha o zapojení vlastní iniciativy účastníků.

Z kognitivistických strategií bych vyzvedl snahu o práci s motivací studentů a vyžadovanou aplikaci získaných poznatků, která od účastníků předpokládala hlubší promyšlení vyučovaných témat.

Co se týče odlišného přístupu k studentům preferujícím odlišné přístupy k učení, tento rozdíl nebyl reflektován v hlavním studijním materiálu, ale přirozeně se vyskytl při soukromé komunikaci se studenty nad řešeními zadaných úloh. Velká pozornost byla věnována grafickému zpracování celého kurzu i jednotlivých jeho částí.

Ve velké míře se na výsledné podobě kurzu uplatnil i behaviorální přístup, a to zejména požadavek na přehlednost očekávaných výstupů a požadavků na účastníky kladených a zajištění zpětné vazby o úspěších či neúspěších jednotlivých studentů, které byly účastníkům prezentovány v soukromé konverzaci.

Zahájení kurzu se uskutečnilo 16. října 2015. Původní plánovaný termín 5. října byl odložen z důvodu převádění kurzů ze starého výukového prostředí do nového. Studenti se do kurzu měli možnost zapsat do 11. října. Zpřístupňování jednotlivých lekcí bylo nastaveno vždy na pondělí od 15.00, což byl také termín pro vyplnění dotazníku z předešlého týdne. Proto byla první lekce účastníkům zpřístupněna až 19. října. Podrobný harmonogram kurzu čtenář nalezne v příloze pod názvem *Jak se studuje v kurzu Lineární algebra*.

6.2. Účastníci kurzu

V této podkapitole se seznámíme s účastníky (studenty) kurzu. Před zahájením první výukové lekce bylo ke dni 12. října zapsáno v kurzu celkem 11 účastníků (5 dívek a 6 chlapců). V kurzu však začalo pracovat pouze 5 studentů.

Následující odstavce se opírají o odpovědi účastníků kurzu v krátkých dotaznících, které jsem jim předkládal ke každé výukové lekci. Rozboru těchto dotazníků bude věnována pozornost v kapitole *Popis a vyhodnocení dílčích výukových lekcí*, ale protože některé otázky se týkaly samotných studentů (jejich očekávání, studijní kariéry, úspěchů v matematických soutěžích apod.), seznámíme se těmito informacemi s ohledem na anonymitu v této kapitole. V následující tabulce jsou jednotlivým účastníkům přiřazena označení, která dále budou použita v další kapitole při diskuzi nad úlohami, které jednotliví účastníci řešili. Pořadí odpovědí, které studenti uvedli v dotazníkovém šetření a které budou dále v práci uváděny, toto schéma také respektuje. Stejné označení bylo použito i v přílohách této práce.

Studentka A	17 let	3.ročník	SOŠ grafického zaměření
Student B	18 let	3. ročník	čtyřleté gymnázium
Student C	17 let	2. ročník	čtyřleté gymnázium
Studentka D	17 let	4. ročník	šestileté bilingvní gymnázium
Studentka E	17 let	6. ročník	osmileté gymnázium

Jedna z otázek se týkala výuky lineární algebry na středních školách. Konkrétně jsem se účastníků dotazoval, zda právě jejich škola nabízí v tomto směru nějaké nadstandardní vzdělávání či možnost rozvoje jejich zájmu o matematiku.

Nabízí vaše škola nějaké rozšiřující semináře z matematiky? Pokud ano, víte, co je jejich obsahem? Probírají se zde i některá témata lineární algebry? Studenti na tuto otázku odpověděli: „Ne, nenabízí. Výuka matematiky je zde dosti chudá.“; „Ano, semináře z vyšší matematiky - semináře pro 3. a 4. ročník (ale jsou povinně volitelné, nejde o jakési „kroužky“), zatím moc nevím. Učitelé ze školy hodně nabízejí Populární přednášky z matematiky na VŠB-TUO a Matematické pátky na SLU - jde o přednášky pro středoškoláky organizované vysokými školami; probírá se zde množství témat - od AG-nerovnosti až po Riemannovu hypotézu; občas se něco z lin. algebry probírá (např. teorie grup)“; „Pro druhý ročník žádný seminář obsahující lingebru není.“; „V posledních dvou ročnících škola nabízí několik seminářů matematiky.“.

Jednou z možností rozvoje nadání je v českém prostředí účast na nejrůznějších oborových soutěžích, další šetření se tak zaměřilo na potenciální účast studentů kurzu v takovýchto projektech, ať už se jedná o dálkové korespondenční semináře či prezenční soutěže, a na jejich zkušenosti.

Zúčastnil/a jste se někdy nějakých matematických/nematematických soutěží? Případně napište, zda se v současné době něčemu takovému věnujete. (Nebojte se pochlubit svými dosaženými úspěchy.) Uvedené odpovědi byly: „Ano, některých soutěží jsem se zúčastnila a pár úspěchů mám. Nyní pracuji pouze na Talnetu.“; „Každoročně dělám matematickou olympiádu, loni jsem se účastnil soutěže Náboj a internetové matematické olympiády, letos jsem se účastnil soutěže Moravskoslezský matematický šampionát; z nematematických Fyzikální olympiáda – největší úspěch – 1. místo na krajském kole kat. D (prvák); chemická olympiáda, a nějaké další, méně významné.“; „Ano, matematické a fyzikální olympiády.“; „Matematická olympiáda, fyzikální olympiáda, MaSo, Náboj, logická olympiáda, Génius logicus. Momentálně pracuji na úkolech letošního ročníku matematické a fyzikální olympiády.“.

Pokud máte zkušenost s účastí v nějaké soutěži, ocenil bych, pokud byste mi napsali svůj názor na ni. Díky. Jedna studentka se ke svým zkušenostem dále nevyjadřovala (otázka byla nepovinná), ostatní účastnící uvedli tyto odpovědi: „matematická olympiáda – kladně hodnotím domácí kola – odfiltruje to všechny, kteří by se chtěli účastnit jen kvůli flákání; další kola – rozhoduje nápad, což někdy nemusí být úplně nejlepší (prostě pokud není nápad, tak i kdovíjak studovaný to projede); fyzikální olympiáda – to samé co u MO, najít řešení je v pohodě, popsat myšlenky na papír je těžší... ; fyziklání online – největší nepřítel – zaokrouhlování, jinak super; mohl bych tu psát déle, pokud máte zájem, pošlu vám to do zpráv.“; „MO je super, ale chvílemi příliš matematická, FO pro první ročník je nechutně jednoduchá“; „MaSo, Náboj – týmové soutěže, které považují za neocenitelnou zkušenost, jediné co bych vytkla je, že za celou dobu mé účasti v těchto soutěžích se mi nestalo, že by se harmonogram soutěže setkal se skutečností. Končívají zpravidla o hodinu až dvě později.“

V další otázce jsem se také rámcově zajímal o ambice studentů matematicky se dále rozvíjet při dalším studiu.

Máte v úmyslu pokračovat ve svém studiu na vysoké škole? Přemýšleli jste již podrobněji o tom, jakou? Pokud ano, domníváte se, že dobrá znalost matematiky bude při tomto vašem vysokoškolském studiu důležitá?

Studenti a studentky na tuto otázku odpověděli: „Ano, ráda bych pokračovala na vysokou školu a věřím, že se mi to i podaří. Ráda bych zvolila vysokou školu s matematickým zaměřením. Lákala by mě Univerzita Karlova.“; „Ano, na vysokou školu určitě půjdu. S největší pravděpodobností budu studovat obecnou fyziku nebo letecké a kosmické strojírenství. Ještě nevím, kde. Matematika je velmi důležitá.“; „Mám v úmyslu studovat matematiku, domnívám se tedy, že dobrá znalost matematiky bude při tomto mém vysokoškolském studiu důležitá.“; „ Rozhodně bych chtěla vystudovat vysokou školu. Pokud bych se rozhodla pro vysokoškolské studium v ČR, pak bych si vybrala matfyz fakultu UK, obor matematika (který by trochu zabrousil i do informatiky). Poohlížím se po zahraniční univerzitách v USA a UK.“

Kromě obecných informací o studentech a jejich možnostech rozvoje matematického talentu obsahovala samozřejmě dotazníková šetření i konkrétnější dotazy na účast studentů v kurzech Talnet, v rámci něhož probíhal i kurz lineární algebry. Stejně tak mě zajímala motivace studentů se do mého kurzu zapojit.

Napište, při jaké příležitosti jste se seznámil/a s projektem Talnet? Jste do tohoto projektu zapojen/a prvním rokem, nebo se zúčastňujete již po několikáté? Popište, prosím, své působení v tomto projektu. Uvedené odpovědi byly: „Škola dostala několik propagačních letáků z MFF a nacházel se zde letáček na tuto stránku. Zaujalo mě to a rozhodla jsem se zkusit si témata, jež mě zajímají. Především se mi líbí virtuální podoba (není třeba někam dojíždět a tak). Jsem tu prvním rokem a zatím se mi tu líbí.“; „S Talnetem jsem se seznámil ve škole díky přednášce jedné kamarádky. Letos se účastním již 2. rokem – loni jsem dělal kurz „Vybrané kapitoly z teorií relativity – speciální i obecné“.“; „Jsem tu poprvé, narazil jsem na kurz na internetu.“; „Program Talnet mi byl nabídnut skrze moji školu, jako alternativa ke kurzu It’s up to you. Letos se zapojuji poprvé.“; „S Talnetem jsem se seznámila ve škole, kde mi byl představen a doporučen. Do projektu Talnet jsem zapojená asi 4. rokem. Zúčastnila jsem se soustředění, expedice a absolvovala některé kurzy.“

Jak vidíme, kurzu se zúčastnili jak ti, kdo s T-kurzy již měli nějakou zkušenost, tak úplní nováčci. Podle všeho byl kurz některým studentům doporučen, jiní si o něm zjistili informace sami ať už pomocí samostatného vyhledávání na internetu nebo s využitím propagačních materiálů. V pokračování tohoto dotazníku jsem se dále zabýval tím, zda byli k účasti studenti motivováni svým vlastním zájmem či zda měl na jejich přihlášení do T-kurzů podíl i někdo jiný.

Přihlásil/a jste se do kurzu Talnet Lineární algebra z vlastní iniciativy, nebo vám někdo doporučil, abyste jej studoval/a? Pokud ano, kdo? Studenti se k tomu vyjádřili: „Ano, jsem zde z vlastní vůle, jelikož se chci dozvědět něco nového.“; „Do kurzu Lineární algebra jsem se přihlásil z vlastní iniciativy.“; „Z vlastní iniciativy.“; „ Doporučila mi ho moje třídní profesorka …, neboť ví, že se zajímám o matematiku.“; „Přihlásila jsem se z vlastní iniciativy, protože mě téma kurzu zajímá.“

Další zjišťované informace se týkaly letošního zapojení účastníků do aktivit Talnetu a jejich motivace pro účast v kurzu lineární algebry.

Studujete kromě tohoto kurzu i jiné Talnet kurzy? Pokud ano, které? Účastníci odpovídali následujícím způsobem: „Studuji další dva kurzy, jeden je „Vybrané kapitoly z TR“ a druhý „Poznej sám sebe“.“; „Ano – Nad vědou v dějinách I a II; NAFTA.“; „Ano, Teorii relativity.“; „Ne.“; „Ano, studuji ještě kurz Nad vědou v dějinách I a II.“

K odpovědím na tuto otázku je třeba ještě podotknout, že byly součástí prvního dotazníku a nelze se tak podloženě vyjádřit k tomu, zda účastníci skutečně všechny zde uvedené kurzy absolvovali.

Kurz Lineární algebry studujete, protože (doplňte): „Protože mě velice zajímá matematika a chtěla bych ji jít studovat na VŠ. Tento kurz mi určitě něco dá a hlavně mě to baví.“; „Protože si potřebuji rozšířit matematické znalosti.“; „Se zajímám o matematiku :)“; „bych ráda rozšířila své znalosti za hranici školních osnov. Studuji na dvojjazyčném gymnáziu s výukou vybraných předmětů (včetně matematiky) ve španělštině. Snažím se samostatně studovat matematiku i v češtině, abych znala i českou terminologii. Kurz Talnet mi přišel jako dobré doplnění.“; „mě téma lineární algebry zajímá. Věnujeme se mu i trochu ve škole, ovšem v nedostatečné míře a hlavně formou naučení se postupům řešení typových příkladů.“

6.3. Komunikace v kurzu

V následující krátké části textu se budeme zabývat komunikací jednotlivých osob či prostředí v rámci kurzu **Matematika IV** - Lineární algebra z hlediska vztahů popsaných v kapitole *Specifika online vzdělávání.*

6.3.1. Učitel a obsah. V rámci tvorby online kurzů v prostředí Moodle je nutné považovat tento vztah za jeden z klíčových, protože charakter této platformy je vhodnější spíše pro statické umístění obsahu než pro jeho větší interaktivitu. Z tohoto pohledu je tedy precizní příprava hlavního výukového materiálu velice důležitá, protože úpravy, ačkoli jsou možné, vyžadují opětovné nahrání souboru a musí je vypracovat vyučující, nedochází k nim automaticky, jako by tomu mohlo být u některých technicky náročnějších kurzů.

V rámci kurzu lineární algebry jsem zvolil možnost nahrání prezentace v PDF. Bylo to z několika důvodů, první z mnoha je právě případ, kdy by bylo nutné lekci nějakým způsobem editovat. To je snazší udělat mimo prostředí Moodle, zvláště pokud se jedná o rozsáhlé matematickou symboliku obsahující texty. Samotný zápis matematických výrazů je v použitém programu LaTeX*Beamer* podstatně jednodušší než v prostředí Moodle. Studenti si také soubor hlavního výukového materiálu mohli stáhnout do svých vlastních zařízení a pracovat také v offline režimu, prezentaci si archivovat pro případ využití mimo kurz nebo aby si své znalosti získané v kurzu mohli bezproblémově osvěžit.

I uvnitř hlavního výukového materiálu jsou různé entity vyznačeny odlišnou barvou či typem textu. Jsou tak rozlišeny okamžiky, kdy odvozujeme, výsledné věty a definice, poznámky k prohloubení znalostí či k doplnění některých informací.

Obsah, nad kterým má autor plnou kontrolu, byl doplněn odkazy na webové stránky s doplňujícími články, které mohly dodat těm studentům, kteří měli třeba problém s použitou notací, doplňující informace.

6.3.2. Učitel a učitel. V rámci projektu Talnet mě komunikace mezi jednotlivými lektory spíše zklamala. V rámci tohoto projektu jsou všichni zúčastnění (lektoři, studenti i organizátoři) automaticky zapsání v kurz *Společná část*, v němž probíhá potřebná instruktáž, jak pracovat v Moodlu, pro studenty. Z hlediska aktivity lektorů se však jedná o prostředí velmi chudé, nezaznamenal jsem žádné diskuze mezi vyučujícími o způsobech organizace kurzů a podobně. Také na školení byla znatelná jen velmi malá snaha lektorů komunikovat mezi sebou, předávat si zkušenosti či si poskytovat nějaké rady.

6.3.3. Obsah a obsah. Podle mého názoru je velmi závažným nedostatkem T-kurzů nemožnost srovnání kvality jednotlivých kurzů. Lektorům je poskytnut přístup pouze do jejich vlastních kurzů a do *Společného prostředí*, ostatní kurzy však nemohou navštívit ani v roli hosta.

Obsah ostatních kurzů tak je lektorovi znám pouze v náznacích, které lze vyčíst z (mnohdy velmi stručných) anotací (jejichž primárním úkolem je ale přilákat do kurzu studenty, ne poskytovat podrobné informace o průběhu celého kurzu), eventuálně od účastníků, kteří se například zmíní o kolísavé kvalitě různých kurzů, v nichž pracují.

Jako ještě horší pak vidím fakt, že obsah jednotlivých kurzů spolu nekoresponduje ani tam, kde by to bylo vhodné, například v různých následných matematických kurzech. Dokázal bych si představit (například), že pokud fyzikální kurz pořádaný v jarním bloku T-kurzů vyžaduje nějaký matematický aparát, domluví se spolu dva lektoři a prerekvizitou se stane na podzim probíhající matematika, která se těmito výpočty bude zabývat. V rámci současného nastavení je však takovýto přístup jen stěží představitelný.

6.3.4. Student a obsah. Z hlediska vztahu studenta a obsahu se kurz vyznačoval spíše menší interaktivitou, kdy byla podoba výukových materiálů předem daná, což vyplynulo z použitého online prostředí.

Určitou možností přizpůsobení si obsahu byla pro studenty možnost projít si doporučené odkazy, kdy ti, pro které by byly použité způsoby zápisu příliš velký „skok“, mohli rozdělit tento krok na dva a nejprve se naučit zacházet s novou notací. Pro některé studenty matematický zápis podle výpovědí z dotazníkového šetření problém nebyl, pro jiné to bylo více nezvyklé, takže varianta dobrovolného prostudování doplňujícího materiálu se ukázala jako přínosná.

Názvy všech lekcí byly uvedeny v dokumentu *Jak se studuje v kurzu Lineární algebra* v pořadí tak, jak byly probrány. U každé lekce byla uvedena anotace, která měla za úkol krátce studenty seznámit s probíraným tématem a motivovat je k zájmu o problém. U různých lekcí byla motivace koncipována různě, mimo jiné odvoláváním se na již studentům známé koncepty a možnost jejich prohloubení a lepšího pochopení, představení matematických struktur jako brány do zkoumání dnešní matematiky, ale také uzavření všech již získaných poznatků do ucelené koncepce.

V rámci hlavních výukových prezentací byl text členěn takovým způsobem, aby byl vytvořen jednotný systém orientace v textu. Každá prezentace začínala obsahem, který vyjmenovával témata, jimiž se budou účastníci v daný týden zabývat. Stejně tak bylo využito vlastností prostředí LaTeX*Beamer*, které na horní liště graficky znázorňuje prostup danou prezentací a usnadňuje tak orientaci z hlediska toho, zda se student nachází v polovině či zda již se blíží ke konci.

Byla podporována nejen orientace v postupu učebním textem, ale také orientace ve významu uvedených informací, kdy byly barevně a graficky rozlišeny základní a rozšiřující informace či poznámky a dále výsledné věty a definice. Každá prezentace byla utvářena takovým způsobem, aby byly nové informace budovány postupováním od jednoduššího k složitějšímu, známého k neznámému.

Tam, kde to bylo vhodné, bylo užito nezvyklého grafického vyjádření problému nebo nečekaného zapojení znalostí z fyziky (motivace skalárního součinu, viz přílohy této práce).

Testem interakce *student a obsah* byla nutnost využít nově získané informace při řešení úloh. Právě schopnost aplikace se stala zkouškou naučeného, kdy jsem studenty přímo sám nabádal, aby v případě potřeby využili diskuzního fóra pro poradu se mnou či svými spolužáky, nebo aby v případě nutnosti využívali i jiné, externí zdroje informací. Záměrně jsem také ponechal některé věci nedořečené tak, abych je k využití komunikace spíše přiměl. O využití diskuzního fóra účastníky se blíže zmíním v následujících dvou podsekcích.

6.3.5. Student a učitel. Kurz lineární algebry byl z hlediska své koncepce blízký „tradičnímu“ pojetí online vzdělávání tak, jak se s ním můžeme setkávat již několik desítek let. V rámci kurzu byl jeden shodný materiál pro všechny studenty a také role vyučujícího v něm byla ještě poměrně dost velká, což by nebyl případ z technického hlediska složitějších a svou koncepcí modernějších online kurzů s automaticky adaptabilním obsahem.

V zásadě lze komunikaci mezi mnou a účastníky kurzu rozdělit do tří kategorií - *komunikaci veřejnou neadresnou*, *komunikaci veřejnou adresnou* a *komunikaci neveřejnou*.

Komunikací veřejnou neadresnou rozumím takový případ, kdy jsem s nějakým sdělením oslovoval veškeré účastníky kurzu. Jednalo se o informace o průběhu kurzu, všeobecné připomínky a rady a také několik výzev publikovaných v rámci diskuzního fóra.

Informace o průběhu kurzu byly stejně jako hlavní výukový materiál připraveny předem, a byly tak svou podobou zamýšleny jako statický soubor, na základě něhož bude následně možné objektivně posoudit, zda daný účastník splnil podmínky pro absolvování kurzu. Jednalo se konkrétně zejména o PDF soubor *Jak se studuje v kurzu Lineární algebra*. Dále byl studentům v záhlaví kurzu nabídnut soubor *Přehled hodnocení úkolů v kurzu* shrnující informace o maximálním bodovém zisku za jednotlivé soubory úloh (o nejvyšším možném dosažitelném počtu bodů byli ještě studenti informováni v předchozím dokumentu a u každého z jednotlivých souborů pak byl uveden počet bodů získatelný za dané úlohy).

Mezi další z této komunikace, která byla svým způsobem dost jednostranná, patří výzva k tomu, aby si studenti vyplnili profil a eventuálně si ještě jednou prostudovali způsob ovládání platformy Moodle, obojí s pomocí návodů připravených obecně pro všechny kurzy Talnet organizátory T-kurzů.

Podobné výzvy se vyskytly i v rámci diskuzního fóra (například informace o tom, že kurz již končí a ti, kteří chtějí absolvovat, by měli pokud možno co nejdříve odevzdat svá řešení úloh), primárně však diskuzní fórum mělo sloužit ke komunikaci, kterou v tomto textu pojmenovávám jako veřejnou adresnou. Tímto pojmenováním jsem chtěl zachytit fakt, že už se jedná o předem nepřipravenou výměnu informací mezi mnou jako lektorem a studentem či studenty kurzu, která už reaguje na nějaké konkrétnější situace vzniklé v průběhu.

Diskuzní fórum bylo v prostředí kurzu zařazeno pro méně formální komunikaci různých aktérů kurzu lineární algebry a příležitost k rozebírání těch problémů, jejichž řešení by mohlo zajímat i ostatní a nebyla to jen záležitost jednoho člověka. Zajímalo mě také, zda se účastníci budou snažit vytvářet si sociální vztahy i mezi sebou (blíže o tomto dále).

Potenciál využití diskuzního fóra spočíval také v jeho vzdělávací hodnotě, kdy jsem předpokládal, že by se například mohly vyskytnout otázky k hlavním výukovým materiálům, které by mohly být diskutovány právě zde. Stejně tak se zde mohla probírat témata nad rámec obsahu kurzu. O mé snaze vytvořit prostor pro takovouto „odbornou diskuzi“ jsem se již krátce zmínil v předchozí sekci. Tato aktivita byla plánována zejména pro části diskuzního fóra věnované jednotlivým lekcím. Ostatní komunikace měla probíhat v obecné diskuzi. Potenciál diskuzního fóra byl však využit pouze minimálně. Nejaktivnějším vláknem fóra bylo vlákno o představení se v kurzu.

V posledním dotazníku jsem se na důvody jejich neaktivity v diskuzním fóru účastníků konkrétně dotazoval.

V rámci kurzu bylo otevřeno diskuzní fórum, účastníci jej však příliš nevyužívali. Popište prosím vaše subjektivní důvody, proč jste nevyužíval/a diskuzní fórum více.

Uvedené důvody byly: „Nepotřebovala jsem ho využívat. Raději řeším úlohy sama, případně jsem využila tvé připomínky a nápovědy.“; „Neměl jsem moc nápadů, o čem si povídat. Většinu věcí jsem našel v prezentacích/na internetu/v knihách/prodiskutoval s vyučujícím matematiky na gymnáziu. Ke konci jsem napsal několik příspěvků, ale nesetkaly se s příliš velkou odezvou (student se ve svém příspěvku dotazoval na vhodnou literaturu o lineární algebře, které by se dalo bez problémů porozumět s gymnaziálními znalostmi – bohužel nemám žádnou zkušenost s podobným učebním textem).“

Velice důležitou součástí kurzu byla neveřejná komunikace mezi mnou a jednotlivými účastníky, která byla ze své povahy soukromá a vztahovala se k odevzdaným řešeným úlohám. Velkou důležitost měly i výpovědi z dotazníkových šetření, kde je třeba ocenit velkou upřímnost a výpovědní hodnotu uvedených odpovědí. Je vidět, že účastníci nad otázkami přemýšleli, a sázka na otevřené otázky se tak ukázala jako správná. Stejně tak oceňuji důvěru, kterou svěřili do mých rukou, protože v dotaznících odpovídali místy velmi konkrétně (například uváděli konkrétní školy, které studují, uvedli jména vyučujících apod.).

6.3.6. Student a student. Studenti kurzu nejevili zájem o budování jakéhokoli vztahu se svými spoluúčastníky, což je do jisté míry pochopitelné, protože se jedná o osobnosti, s nimiž se setkávají pouze virtuálně v rámci prostředí online kurzu. Co mě však překvapilo, bylo, že žádný student necítil potřebu zapojit se do výše zmíněné „odborné diskuze“ a projevit tak více veřejně svoje schopnosti. Předpokládal jsem, že právě ta vlastnost online kurzu, že se v něm studenti nesetkávají tváří v tvář, sníží obavy účastníků ze „ztrapnění se“ před vrstevníky, do diskuzí k jednotlivým tématům se však nikdo nezapojil.

KAPITOLA 7

Popis a vyhodnocení dílčích výukových lekcí

V následující kapitole se zaměříme na podrobný popis jednotlivých výukových lekcí kurzu lineární algebry, který byl pro středoškolské studenty realizován v rámci projektu *Talnet* v zimním semestru akademického roku 2015/2016. Již jsme si představili, že celý kurz byl rozložen do šesti samostatných lekcí, které se účastníkům kurzu zpřístupňovaly s periodou jednoho týdne. Postupně to byly lekce s názvy *Matematické struktury*, *Vektorové prostory a podprostory*, *Báze a dimenze vektorových prostorů*, *Matice*, *Soustavy lineárních rovnic* a *Unitární prostory*. Výše uvedené lekce proběhlého kurzu budou představeny v následujících třech rovinách.

- **Představení obsahu lekce.** V této části v každé proběhlé lekci seznámím čtenáře s jejím podrobným obsahem, tj. s okruhy témat, jež byly v lekci probírány, a s přehledem nově zavedených pojmů typických pro danou lekci. Rovněž budou diskutovány předpokládané nutné vstupní znalosti studujících.
- **Rozbor souboru úloh.** Studenti si dle svých možností vybírali úlohy k samostatnému řešení z připravených souborů úloh. V této části se zaměříme na rámcový popis úloh, které byly v souborech zařazeny. Také se seznámíme s tím, jaké úlohy si účastníci pro řešení v dané lekci vybrali, a které naopak nebyly řešeny vůbec.
- **Vyhodnocení a reflexe.** Ve třetí rovině popisu dílčích výukových lekcí podám souhrnné vyhodnocení, které je založeno na výpovědích účastníků kurzu prostřednictvím dotazníkového šetření, které bylo realizováno na konci každé lekce. Připomeňme si, že na vyplnění dotazníku měli respondenti omezený časový limit, který činil sedm dní po uveřejnění a zpřístupnění konkrétní lekce kurzu.

Čtenářům této kapitoly doporučuji společně s textem následujících odstavců simultánně sledovat studijní materiály, které byly pro danou lekci kurzu připraveny. Tyto materiály nejsou přílohou listinné podoby práce. Čtenář je nalezne na přiloženém CD. Jedná se především o hlavní studijní materiály, myšleno prezentace ve formátu PDF, dále soubory úloh k samostatnému řešení, z nichž si účastníci kurzu dle svých preferencí vybírali a následně vypracovávali a odevzdávali zadané úlohy, a dokument obsahující soubor všech otázek a odpovědí účastníků kurzu na již mnohokrát zmiňované dotazníky, které měly za úkol především zmapovat v oblasti motivační (nikoli výkonové) postoje studentů k jednotlivým lekcím, úlohám a podobě průběhu kurzu. Rovněž zde čtenář nalezne konkrétní podobu řešení jednotlivých úloh studenty kurzu. Obsah přiloženého CD je podrobněji rozveden v části *Seznam příloh*.

7.1. Matematické struktury

7.1.1. Představení obsahu lekce. První lekce kurzu nebyla ryze disciplínou lineární algebry, jako spíše disciplínou abstraktní algebry. Hlavním cílem této lekce bylo předat studentům kurzu základní myšlenku studia algebraických struktur. Jedná se o abstrakci od konkrétních algebraických operací na vlastnosti těchto operací. Tedy diskutovat, že existují množiny s binárními algebraickými operacemi, které mají společné vlastnosti.

Otázkou samozřejmě zůstává, zda je zahájit kurz tímto tématem pro studenty vhodné, nebo nikoli. Vzhledem k záměrně plánovanému širšímu věkovému rozpětí účastníků kurzu (16 až 19 let) jsem se rozhodl zahájit kurz úvodem do matematických struktur z několika důvodů.

Prvně je to snaha vést studenty kurzu k poznání a osvojování si netriviálních abstraktních pojmů namísto učení se numerickým postupům výpočtů. Jde o to plně využít zájem studentů o obor. Dále je zde skutečnost, že téma abstraktních algebraických struktur není zakotveno ve vzdělávacích plánech středních škol, a je proto pravděpodobné, že nikdo z účastníků se s tímto tématem detailně neseznámil v rámci studia matematiky na střední škole. To je obzvláště důležité pro motivaci účastníků, neboť se hned v první lekci podrobněji seznamují s látkou, kterou předtím buďto vůbec nepoznali, nebo se s ní seznámili na nějakém rozšiřujícím semináři pro nadané žáky nebo si látku studovali samostatně z různých pramenů ve svém volném čase. Prvek motivace spočívá v tom, že studenti mohou spíše uvidět v kurzu něco užitečného, něco, co jim skutečně pomůže zlepšit jejich matematické znalosti.

Kdyby se kurz zahájil jiným tématem – zde by se nabízely možnosti jako soustavy lineárních rovnic, vektorové prostory nebo matice – není vyloučeno, že by první lekce mohla být pro studenty jistým zklamáním. Stručně uvedu argumenty, proč jsem o tomto tvrzení přesvědčen.

Kdybychom zahájili kurz tématem soustavy lineárních rovnic, které skutečně často bývá prvním tématem vysokoškolských kurzů lineární algebry, o čemž svědčí dostupná literatura, neměli bychom k dispozici například pojmový aparát vektorových prostorů, a tudíž by bylo obtížné hovořit například o řešení homogenní soustavy jako o vektorovém podprostoru se všemi důsledky, které to obnáší. Pokud bychom chtěli zavést efektivní řešení soustav lineárních rovnic metodou Gaussovy eliminace, dostaneme nutnost zavést maticový zápis. Proto bychom v kurzu pojem matice definovali na dvou místech. Jednak při řešení soustav lineárních rovnic, jednak v kapitole Matice, kde k maticím přistupujeme jako k samostatným matematickým objektům, se kterými můžeme provádět matematické operace.

Zahájit kurz tématem vektorových prostorů je ze všech tří uvažovaných možností patrně ta nejrealističtější (pokud bychom nezačali s výukou matematických struktur). Nevýhodou takového zahájení je skutečnost, že s vektory se studenti seznamují na středních školách. Mezi studenty mohou být tací, kteří se seznámili s vektory v rámci analytické geometrie i studenti, kteří znají vektory zatím jen z fyziky. Proto mohou být znalosti student od studenta různé a ve výsledku by to tak znamenalo rozdílnou vstupní pozici v kurzu. Proto jsem se snažil a priori nepředpokládat, že s tématem vektorů jsou studenti blízce seznámeni, a volil proto zahájení tématem algebraických struktur.

Ještě se vyjádřeme k poslednímu tématu, tedy k tématu Matice. Jedná se rovněž o jedno z úvodních témat, kterým se zahajuje výuka především v technicky orientovaných kurzech. Byť bychom mohli předpokládat, že toto téma je na úvod vhodné, nezařadil jsem jej na první místo především z následujícího důvodu. Výuka tématu Matice v kurzu, který není orientován primárně na osvojování početních algoritmů, může dle mého názoru vést k tomu, že studenti si spojují matice a následně probírané vektory a vektorové prostory k sobě. Jednoduše řečeno domnívám se, že tímto postupem může vznikat dojem, že bez maticového formalismu nelze počítat úlohy v lineární algebře. Proto jsem téma matice zařadil až na čtvrté místo, aby do té doby výpočty prováděné bez použití maticového formalismu motivovaly zavedení nástroje, který numerické výpočty zpřehledňuje a usnadňuje. Tedy v kurzu se snažím matice zavést tak, aby byly nástrojem pro numerické výpočty, nikoli aby matice stály před úlohami z vektorových prostorů a mohlo by u studentů docházet k tomu, aby pouze tipovali, kam a jak mají vektory ze zadání do matice dosadit, aby „něco“ vyšlo.

Prodiskutovali jsme si, proč jsem zvolil téma Matematické struktury jako úvodní téma. Výše uvedené argumenty lze shrnout tak, že tímto tématem můžeme matematicky orientované studenty motivovat (přihlásili se do kurzu, aby se dozvěděli něco nového, a skutečně se dovídají něco nového) a především vstupní znalosti o tomto tématu účastníků různých věkových kategorií jsou prakticky na stejné úrovni. Takže zahájit kurz tímto tématem nikoho neupřednostňuje.

Předpokládané vstupní znalosti účastníků byly znalost základní terminologie středoškolské matematické logiky a naivní teorie množin a dále alespoň rámcová znalost základních důkazových technik, tj. *důkaz přímý*, *nepřímý*, *důkaz sporem* a *důkaz matematickou indukcí*. S pojmy z logiky a teorie množin se žáci středních škol seznamují zpravidla v prvním ročníku – v základní řadě učebnic pro gymnázia je látka obsažena v publikaci *Základní poznatky z matematiky* [**6**]. S důkazem matematickou indukcí se žáci buďto neseznamují vůbec, nebo jen rámcově v kapitole Posloupnosti a řady [**?**]. Tudíž důkaz matematickou indukcí není vstupní znalost takového charakteru, která by neumožňovala plnohodnotné zvládnutí připraveného kurzu. Pro studenty, kteří by cítili jisté mezery v základních předpokládaných znalostech, byl připojen externí výukový materiál (viz [**30**]).

Každá lekce byla uvedena krátkým abstraktem, který měli účastníci kurzu možnost prostudovat ještě před tím, než se obsah dané lekce zpřístupnil. Abstrakt první lekce si nyní představíme.

> Dnešní moderní pojetí algebry, resp. matematiky jde cestou studia matematických struktur. Z tohoto důvodu je vhodné se s tímto konceptem seznámit již na začátku.
>
> Během studia matematiky se student dostává na vyšší a vyšší stupně abstrakce. Nejprve dokáže abstrahovat číslo – tedy umí pracovat s čísly, aniž by se musel zabývat jejich konkrétní reprezentací (např. pracujeme pouze s číslem 3 namísto se třemi jablky atd.). Další stupeň je v okamžiku, kdy místo konkrétních čísel zavedeme proměnnou. Tedy symbol x může představovat například libovolné reálné číslo.
>
> Posledního stupně abstrakce se pokusíme dosáhnou v tomto kurzu – možná že už v této lekci. Jde o abstrahování od konkrétních operací s proměnnými k vlastnostem těchto operací.
>
> Matematická struktura je ve skutečnosti neprázdná množina s jednou nebo více operacemi. Podle vlastností operací se pak hovoří o grupách, pologrupách, tělesech, okruzích, oborech integrity a dalších. S těmi nejznámějšími se seznámíme v této lekci.

Dále se zaměřme na popis základních témat první lekce kurzu. Lekce byla zahájena připomenutím základních pojmů středoškolské matematické logiky a teorie množin. Připomenut byl pojem *kartézského součinu* a pojem *zobrazení*. Pro studenty mohlo být novým poznatkem formální definování *binární algebraická operace*. Po uvedení této definice následovaly ukázky příkladů binárních algebraických operací, se kterými se žáci seznamují v matematice základní a střední školy. Bez hlubších teoretických rámců byly připomenuty operace *standardní sčítání* a *standardní násobení*.[1] Dále byl uveden příklad operace, která je zadána kombinací operací standardní sčítání a standardní násobení. Ještě poznamenejme, že slovem standardní máme na mysli běžné sčítání a násobení přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel. V průběhu lekce bylo poukázáno na užívání *modulární aritmetiky* při zavedení konečných grup. Mezi další binární algebraické operace byly zařazeny operace *sjednocení* a *průnik* množin na potenční množině jisté základní množiny, logické operace *disjunkce*, *konjunkce*, *implikace* a *ekvivalence*, operace *skládání funkcí* na konkrétní množině $\mathcal{F}(A)$ všech funkcí $f : A \to A$, operace *součet* (spojitých) *funkcí* a operace *největší společný dělitel*.

[1] Označením hlubší teoretický rámec je myšleno zavedení operací standardní sčítání a standardní násobení způsobem, který se užívá při konstrukci číselných oborů jako algebraických struktur. Proto bylo v rámci kurzu lineární algebry používání operací standardní sčítání a standardní násobení ponecháno na intuitivním přístupu prověřeném mnohaletou početní praxí studentů.

Následovala ukázka zadání konkrétní binární algebraické operace na konečné množině pomocí *Cayleyho tabulky*. Využito bylo příkladu množiny $\mathbb{Z}_n$ s operacemi *sčítání modulo* n a *násobení modulo* n.

Další částí lekce bylo seznámení se s vlastnostmi binárních algebraických operací. Byly zavedeny pojmy *komutativita*, *asociativita*, *distributivita* a navíc pojmy *neutrální prvek* a *inverzní prvek*. U každého pojmu byly uvedeny konkrétní příklady algebraických operací a jejich vlastností.

Pro potřeby zavedení definice vektorového prostoru jsem zvolil za vhodné v rámci prezentace k lekci *Matematické struktury* rovněž připojit definici pojmu *vnější operace na množině*, resp. *levá vnější operace*. Následovalo zavedení pojmu *algebraická struktura* a vyjmenování známých typů algebraických struktur. Z vybraných typů algebraických struktur byly pro potřeby kurzu blíže specifikovány *grupa* (jako příklad algebraické struktury s jednou binární operací) a *těleso* (jako příklad algebraické struktury se dvěma binárními operacemi). Pro studenty, kteří se seznamují se základy abstraktní algebry poprvé a mohou látku studovat i z externích zdrojů, jsem prezentaci doplnil popisem rozdílu mezi zápisem algebraické struktury *aditivním*, *multiplikativním* a *obecným* a upozornil na terminologické odlišnosti jednotlivých způsobů zápisů (např. *jednotkový prvek* a *nulový prvek* nebo *inverzní prvek* a *opačný prvek*, apod.). Byly uvedeny obecné definice pro grupu (v obecném tvaru) a pro těleso (v multiplikativním a aditivním tvaru). Rovněž byla uvedena definice tělesa užitím již definovaného pojmu grupa. U každého příkladu algebraické struktury byly připojeny konkrétní příklady daných struktur.

7.1.2. Rozbor souboru úloh. V této části rozboru první výukové lekce se budeme podrobněji zabývat popisem souboru úloh, který byl pro každou ze šesti lekcí vytvořen, a z něhož si účastníci kurzu vybírali úlohy k řešení, na základě kterých následně byli hodnoceni. V této části vždy bude popsán samotný soubor úloh, ve kterém budou shrnuty konkrétní úlohy s důvody, kvůli kterým byly do materiálu vybírány. Poté bude rozebráno, kteří studenti řešili jaké úlohy. Řešení jednotlivých úloh studenty lze současně sledovat v přiložených elektronických materiálech. Nyní se již věnujme rozboru souboru úloh lekce *Matematické struktury*.

Soubor úloh k samostatnému řešení studentů obsahuje celkem deset úloh, za které lze v součtu získat až 40 bodů. Jednotlivé úlohy navazují na hlavní studijní materiál, ve kterém vyloženě řešené úlohy chybí. Tedy studenti neměli k dispozici vzor, podle kterého by v jednotlivých úlohách postupovali. Z mé strany se jednalo o záměr, neboť absencí univerzálních postupů jsem chtěl u studentů vzbudit větší potřebu po konzultování a vzájemné diskuzi nad řešením prostřednictvím diskuzního fóra. To se však nestalo.

Povinností účastníka kurzu bylo zvolit si z předložených deseti úloh alespoň dvě, a ty následně vyřešit. Řešení se odevzdávala v elektronické podobě do online prostředí.

Termín odevzdávání byl stanoven harmonogramem kurzu (bylo rozebráno v kapitole *Organizace a průběh kurzu*).

Úlohy **1** a **2** se zabývají algebraickými strukturami s jednou binární algebraickou operací obecně. V prvním případě jde o důkaz jednoznačnosti neutrálního prvku, ve druhém o důkaz jednoznačnosti inverzních prvků v asociativní algebraické struktuře.

Úloha **3** je jednoduchá důkazová úloha na téma grup, konkrétně jde o formální důkaz tvrzení, že podmnožina sudých čísel množiny všech celých čísel tvoří společně s operací standardní sčítání grupu. Navíc se mělo ukázat, že lichá čísla grupu netvoří.

Jako jednu z nejobtížnějších úloh celého souboru shledávám úlohu **4**, která je zařazena pro studenty obeznámené s komplexními čísly a především s řešením binomické rovnice.

Následují úlohy **5**, **6**, které mají společné to, že se zabývají konečnými grupami. Úloha **5** je příkladem tzv. *vojenské grupy*, úloha **6** je o sčítání čísel na ciferníku hodin. V obou úlohách jde o to definovat na základě kontextu úlohy danou binární operaci pomocí Cayleyho tabulky a z jejích vlastností usuzovat na vlastnosti dané struktury.

Kombinatorickou úlohou je úloha **7**, ve které je úkolem zjistit, kolik různých binárních algebraických operací lze zadat na množině n prvků, kde $n \geq 1$.

V úloze **8** je operace $\odot$ na množině racionálních čísel zadána pomocí operací standardní sčítání a standardní násobení. Úkolem je ukázat, že takto definovaná operace $\odot$ je komutativní a asociativní. Dále je třeba rozhodnout, zda existuje neutrální prvek, popřípadě najít předpis, který libovolnému prvku přiřazuje prvek k němu inverzní.

Jako tradiční úlohu lze označit úlohu **9**, ve které se zkoumá grupa symetrií čtverce. Úkolem je jednak popsat grupu Cayleyho tabulkou, jednak ověřit, že se skutečně jedná o grupu, pokusit se nalézt všechny (co nejvíce) podgrup této grupy a nakonec rozhodnout o počtu prvků grupy symetrií u pravidelného n-úhelníku. Tato úloha je patrně úlohou nejpracnější, na čemž se shodli i její řešitelé. Proto byla ohodnocena největším počtem bodů.

Poslední úloha číslo **10** je jediná úloha, která se věnuje důkazu, že daná podmnožina reálných čísel tvoří spolu s operacemi standardní sčítání a standardní násobení těleso.

Odevzdávání vyřešených úloh se zúčastnili pouze studenti A, B, C a E. Studentka A vypracovala úlohy **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **8**, **9** a **10**. Student B řešil úlohy **1**, **2**, **3**, **5**, **6**, **9**, **10**. Student C odevzdal úlohy **1**, **3** a **7**. A konečně studentka E odevzdala úlohy **1**, **3** a úlohu **5**.

7.1.3. Vyhodnocení a reflexe. Dotazník k první lekci kurzu obsahoval celkem 7 otevřených otázek, ze kterých se 4 týkaly informací o samotných účastnících a zbývající 3 otázky zjišťovaly první dojmy účastníků z úvodní lekce kurzu.

Důležitou otázkou bylo zjištění, zda se s probíranou problematikou studenti již někde setkali, anebo je pro ně téma matematických struktur novinkou. Na otázku: *První* *lekce se věnovala úvodu do abstraktní algebry, konkrétně do studia algebraických struktur. Napište, jestli jste se i vy sami někdy s tímto tématem setkali a při jaké příležitosti. To znamená, slyšeli jste někdy o grupách, tělesech a dalších?* studenti odpovídali: „Setkala jsem se s tím asi před 2 měsíci, kdy jsem se začala sama věnovat lineární algebře, tudíž mi věci z kurzu byly známé. Něco nového jsem se však dozvěděla, především tedy při řešení úloh.“; „Ano, ale jen okrajově ve škole a na soustředění. Ve škole jsem se setkal s pojmy komutativní, asociativní apod. v souvislosti s definicí číselných oborů. Na soustředění jsem se setkal s maticemi. De facto však nic nevím.“; „Setkal jsem se s ním jen velmi povrchně, ale nikdy s jakoukoliv přesností.“; „S tímto tématem jsem dosud neměla žádně zkušenosti.“; „Slyšela. Hlavně na různých matematicko-fyzikálních soustředěních.“ Z toho lze usoudit, že účastníci kurzu se s tématem matematických struktur setkali pouze okrajově, což podporuje hypotézu popsanou v *Představení obsahu lekce*, na základě které bylo téma matematických struktur zařazeno jako první výukové téma.

Zajímavá zpětná vazba od studentů byla získána i na technické provedení hlavního studijního materiálu, kterým byla prezentace ve formátu PDF. Na otázku: *Zhodnoťte prosím hlavní výukový materiál (připravenou prezentaci) z následujících hledisek: Přehlednost, Úplnost, Porozumění, Ovládání, Grafická úprava.* studenti odpovídali takto: „Výukový materiál se mi velice líbil. Autor si dal skutečně záležet a určitě si prezentaci ponechám a v pozdější době využiji (ač jsou to základní věci). Jediné, co mi trochu vadí, je stručnost, věci jsou brány hodně okrajově. Je to však pochopitelné vzhledem k časové náročnosti kurzu a dalším účastníkům.“; „Přehlednost - velmi dobrá; Úplnost - vzhledem k tomu, že jsem o probíraném tématu předtím moc nevěděl, tak Vám budu věřit, že tam bylo vše podstatné; Porozumění - ještě budu muset procvičovat, případně pročíst vícekrát; Ovládání - ze začátku jsem měl problém s prezentací - nevěděl jsem, jak zviditelnit text na pozadí (poznámky apod.), ale pak jsem si na to zvykl a vše ok; Grafická úprava - příjemná.“; „Byla pěkná, ocenil bych i „normálně“ pdf verzi (prostě něco ve formátu skript) místo prezentace, nebo alespoň prezentaci jen s celými listy (bez 5 listů, které se postupně zobrazují), ale i tak jsem s materiálem spokojený.“; „Nejsem zvyklá na strukturu typu: vše kromě aktuálního nadpisu je napsáno vybledle. Jinak jsem většinu dobře pochopila. Styl vysvětlování mi vyhovuje a obecně jsem s učením formou prezentace spokojená.“; „Materiál mě připadal přehledný, oceňuji osnovu. Materiál mi přišel úplný. Nechyběly mi tam informace, které by mi bránily v porozumění. Materiál pro mě byl srozumitelný. Někdy jste přidal nějaké příklady k procvičení, ale neuvedl jste výsledek - nemohla jsem si zkontrolovat řešení. Osobně se mi nelíbil postupně se objevující text. Z materiálu jsem si dělala výpisky ve škole z mobilu a bylo zdlouhavé v prezentaci pořád listovat. Grafika materiálu byla přehledná a líbila se mi.“

Z výše uvedených odpovědí lze usoudit, že s formou hlavního studijního materiálu byli studenti spokojeni, co hodnotili kriticky, bylo technické provedení prezentace, které bylo uzpůsobeno na práci v tzv. *full screen* režimu, tedy zobrazení přes celou obrazovku počítače. Vzhledem k naprosté shodě všech odpovědí jsem se v tomto ohledu rozhodl od tohoto technického řešení upustit, aby materiály bylo možné prohlížet i na jiných zařízeních, jakým jsou například tablet nebo mobilní telefon.

V dotazníku ke třetí lekci *Báze a dimenze vektorových prostorů* byli studenti zpětně dotazováni na názor ve věci souboru úloh k samostatnému řešení. V daném dotazníku tomu byly věnovány tři otázky. Obsahem otázek bylo zjišťování, jaké úlohy ze zadávacího listu k první lekci považují studenti za *nejobtížnější*, *nejjednodušší* a za *nejpracnější*.

Jako nejobtížnější úloha byla studenty hodnocena úloha **4**, tedy příklad, ve kterém se vyskytují komplexní čísla. Naopak za nejjednodušší příklad byla považována důkazová úloha **1**. Konečně mezi nejpracnější úlohy byla zařazena úloha **8**, ve které se zkoumají symetrie čtverce a pro její řešení je nutné vytvořit Cayleyho tabulku o celkem 64 buňkách.

Jako lektora kurzu mě v úvodu překvapil počet přihlášených studentů, kterých bylo jedenáct, ze kterých se však nakonec do práce v kurzu zapojilo pouze pět. Jelikož jsem všem účastníkům v době zahájení kurzu posílal hromadnou zprávu, překvapilo mě, že ani poté se zbylých šest studentů do kurzu ani nepřihlásilo. Podle organizátorů se navíc mělo jednat o studenty, kteří se projektu Talnet účastní již poněkolikáté. Jednou z možných příčin mohlo být rozdělení spouštění kurzů do dvou vln, nicméně ani po spuštění druhé vlny kurzů jsem u těchto studentů nezjistil žádnou aktivitu.

Slabou stránkou nejen této lekce, ale i celého kurzu, bylo zapojení studentů v diskuzním fóru. Diskuzní fórum bylo rozděleno na společnou část a na části týkající se jednotlivých lekcí (např. *Matematické struktury*). Přispívání do diskuzního fóra nebylo povinné, ale ani na výzvu představení se v diskuzním fóru nereagovali všichni (oněch 5 studentů). Na druhou stranu lze vysoce kladně hodnotit odpovědi na otevřené otázky v dotaznících, které často byly velmi obsáhlé a podrobné.

Celkově hodnotím první lekci jako vydařenou, což lze rovněž doložit odpověďmi na poslední otázku: *Napište prosím jakýkoliv komentář k první lekci kurzu, anebo obecně ke kurzu samotnému.* Na tuto nepovinnou otázku zazněly následující odpovědi: „Potěšilo mě to a rozhodně je to pro mě přínosné. Vážím si lidí, kteří do těchto věcí dávají čas. Takže velké díky“; „Snad to zvládnu. 1. lekce je trochu šok (vzhledem k tomu, že ve škole jsem zvyklý na práci s konkrétními operacemi a teď takové zobecnění).“; „Moc se mi líbil. Doufám, že budu kurz stíhat (ne kvůli obtížnosti kurzu, ale kvůli mým jiným aktivitám), moc rád bych ho dochodil celý.“

7.2. Vektorové prostory a podprostory

7.2.1. Představení obsahu lekce. Vzhledem k časové vytíženosti účastníků a rovněž obsahovému rozsahu prezentace (hlavního studijního materiálu) jsem pro zavedení a samotnou výuku lekce *Vektorové prostory a podprostory* volil způsob, jenž lze označit (na základě dostupné literatury) za běžný. Tento způsob předkládá formální definici vektorového prostoru na prvním místě a uvedení příkladů jednotlivých modelů vektorového prostoru na místě druhém. Bylo by samozřejmě možné postupovat obráceně, tj. ukázkou několika konkrétních algebraických struktur, které mají podobné vlastnosti, a na základě toho odvodit definici vektorového prostoru, tedy požadovaný soubor axiomů. Tento postup by byl však velmi komplikovaný, neboť způsob výuky v online prostředí neumožňuje zpětnou vazbu od studentů v takovém rozsahu jako kontaktní výuka, a nelze tak bezprostředně reagovat na případné chyby v myšlenkovém procesu studentů. A jelikož podobným způsobem probíhala i výuka látky v první lekci, zůstal způsob v lekci druhé konzistentní. Obrátit směr výkladu od konkrétního k obecnému jsem se rozhodl až v poslední lekci kurzu s názvem Unitární prostory, při odvozování axiomů skalárního součinu na reálném vektorovém prostoru.

Jak již bylo řečeno, v úvodu lekce byli studenti seznámeni s definicí vektorové prostoru nad komutativním tělesem. Součástí úvodu bylo i upozornění na některá terminologická a typografická specifika práce s vektory (např. pojem a označení *nulového vektoru*, *opačný vektor*, jak se vektory zapisují v tištěných materiálech, apod.), dále formulování věty o vlastnostech vektorového prostoru, které lze dokázat přímo z axiomů definice vektorového prostoru. Důkaz této věty byl pro studenty zařazen v rámci souboru úloh k samostatnému řešení.

Následovalo představení hlavních modelů vektorových prostorů. Termínu *model vektorového prostoru* jsem použil ve shodě s publikací [**58**, s. 42]. Jako základní model vektorového prostoru byl na prvním místě uveden studentům již v obrysech známý případ vektorového prostoru *vázaných geometrických vektorů*. V rámci textu byly zavedeny operace s vázanými geometrickými vektory a nastíněn přístup k prověření platnosti axiomů této struktury. Pro náročnější studenty bylo pouze ve stručnosti přiblíženo odůvodnění, proč je pro podporu geometrické představivosti pojmů lineární algebry výhodné použití právě vektorů vázaných v bodě spíše než vektorů volných, u kterých, byť rovněž tvoří vektorový prostor, je formální zavedení (jak bylo demonstrováno v teoretické části) vysoce abstraktní.

Dalším modelem vektorového prostoru byl *aritmetický vektorový prostor*. Po definování operací s aritmetickými vektory byly ověřeny všechny vlastnosti algebraické struktury vektorového prostoru a tedy formálně dokázáno, že aritmetické vektory spolu s definovanými operacemi sčítání a násobení skalárem opravdu tvoří vektorový prostor. Rozšířil jsem výklad o poznámku týkající se pojmů *řádkový* a *sloupcový* aritmetický vektor a jak tyto různé způsoby zápisu vektoru v rámci kurzu budou řešeny. Z typografických důvodů byl za základní způsob zvolen řádkový zápis i s ohledem na konzistentnost se zápisem, který žáci užívají v analytické geometrii na střední škole. Jako významnou poznámku jsem uvedl, že v daném okamžiku, tedy v dané fázi kurzu, není k dispozici formální nástroj k tomu, abychom mohli mezi geometrickými a aritmetickými vektory provádět ztotožňování. Tedy aritmetické a geometrické vektory nejsou jedno a totéž.

Pro studenty by neměl být překážkou model vektorového prostoru všech *polynomů stupně nejvýše n*, neboť lze předpokládat, že s pojmem polynom se studenti již setkali.

Příklad vektorového *prostoru reálných posloupností* je zařazen především pro studenty, kteří se v rámci svého studia na střední škole již s pojmem číselná posloupnost seznámili. Na druhou stranu i studenti, kteří danou látku v rámci běžné výuky neabsolvovali, mají možnost se k tomuto příkladu vrátit později. Jedním z požadavků kladených na výukový materiál byla rovněž možnost jej využít v budoucnu nezávisle na probíhajícím kurzu jako pomocný studijní materiál při výuce dané látky na vysoké škole.

Jako poslední model vektorového prostoru byl uveden *konečný vektorový prostor*. Jednalo se o příklad aritmetického vektorového prostoru nad konečným tělesem $\mathbb{Z}_2$. Úkolem bylo studentům ukázat, že existují i takové vektorové prostory, které své uplatnění nalézají kupříkladu v informatice či kryptografii.

Obecný pojem *podstruktury* si měli možnost studenti osahat již v souboru úloh k první lekci, kde se v úloze **9** požadovalo nalézt podmnožiny, které s danou operací opět tvoří grupu, tedy *podgrupy*. Analogicky bylo přistupováno k definování *vektorového podprostoru*. Užitím definice vektorového podprostoru byla dokázána věta označena jako *Nutná podmínka na podprostor*, která formuluje nutnou a zároveň postačující podmínku na podmnožinu vektorů vektorového prostoru tak, aby daná podmnožina byla společně s operacemi daného prostoru jeho podprostorem.

Pojem vektorového podprostoru byl ilustrován na modelu vektorového prostoru geometrických vektorů, kde jednotlivé podprostory třídimenzionálního vektorového prostoru vázaných geometrických vektorů jsou celý vektorový prostor, triviální podprostor obsahující pouze nulový vektor, všechny přímky procházející pevným bodem O a všechny roviny procházející pevným bodem O.

Na závěr lekce bylo ukázáno řešení standardní úlohy, ve které je třeba rozhodnout, zda zadaná podmnožina reálného aritmetického vektorového prostoru tvoří nebo netvoří vektorový podprostor.

S ohledem na budoucí lekce jsem hlavní studijní materiál doplnil externími odkazy na články zabývající se užíváním *sumačního znaku* (viz [**43**] a [**44**]) při zjednodušování zápisů matematických výrazů. Práce se sumačním znakem nebyla nutnou znalostí pro absolvování kurzu, v rámci středoškolské matematiky se s užíváním sumačního znaku žáci seznamují okrajově jednak v kapitole *Posloupnosti a řady* [**34**, s. 111] a v jistém rozsahu rovněž v kapitole *Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika* [**7**, s. 91]. Tvrzení, která se například v maticové algebře snadno dokazují použitím právě zmiňované symboliky, jsem v lekci s názvem *Matice* dokazoval bez předpokladu znalosti této notace studenty. Pro studenty, kteří měli zájem se s tímto způsobem matematického formalismu blíže seznámit, jsem lekce doplňoval o zápis toho samého jak bez použití sumačního znaku, tak v sumační symbolice.

Stejně jako v případě první lekce, měli studenti možnost seznámit se týden před zpřístupněním druhé lekce s její anotací v následující podobě.

> S pojmem vektor jste se patrně setkali již ve škole. Nejčastěji se studenti seznamují s vektory ve fyzice jako reprezentanty tzv. vektorových fyzikálních veličin, tj. veličin, které kromě velikosti jsou dány i směrem působení. Takové veličiny jsou například rychlost, zrychlení, hybnost, síla, apod. Někteří se možná ve škole seznámili se základy analytické geometrie, kde pojem vektoru chápeme jako množinu tzv. orientovaných úseček, které mají stejnou velikost, směr a orientaci. Orientovanými úsečkami se vektory znázorňují i ve fyzice.
>
> Lineární algebra přináší nový pohled na pojem vektoru skrze algebraickou strukturu, kterou nazýváme vektorový prostor. V zásadě vycházíme z vlastností geometrických vektorů, které abstrahujeme i na jiné objekty. Vektorem tudíž může být jak množina orientovaných úseček, tak i polynom, číslo, ale i funkce. Vektorem totiž rozumíme každý prvek vektorového prostoru. Definici, vlastnosti a typické modely vektorových prostorů si představíme v této lekci.

Za předpokládané znalosti pro úspěšné zvládnutí druhé lekce kurzu lze považovat rámcovou orientaci v předchozí lekci, zvláště ve smyslu pochopení podstaty studia abstraktních matematických struktur. Z hlediska středoškolské látky je materiál dostupnější studentům, kteří se na střední škole nebo vlastním studiem seznámili s geometrickými vektory (například operace s geometrickými vektory jsou formálně zavedeny pomocí stejnolehlosti). Dále se předpokládá znalost a schopnost pracovat s polynomy, případně již dříve proběhlé seznámení s pojmem číselná posloupnost. Druhý z pojmů však pro samotný průběh a absolvování kurzu není nutně vyžadován.

7.2.2. Rozbor souboru úloh. Soubor úloh k lekci *Vektorové prostory a podprostory* obsahoval osm úloh, za které bylo možno v součtu získat až 40 bodů. Student si podle svých řešitelských schopností a pochopitelně i svých časových možností měl za úkol vybrat alespoň dvě z předložených osmi úloh, ty vyřešit a v elektronické podobě (ať už psáno v ruce, či zpracováno za použití počítače) je nahrát do online prostředí kurzu.

Vzhledem k poměrně teoreticky pojaté lekci obsahuje soubor úloh pouze důkazové úlohy, které jsou souhrnně zaměřeny na ověření, zda zadaná množina spolu s definovanými operacemi tvoří vektorový prostor nad konkrétním tělesem, resp. vektorový podprostor.

Úloha **1** navazuje na hlavní studijní materiál, konkrétně na důsledky definice vektorového prostoru. Jde o důkaz vybraných tvrzení platných v každém vektorovém prostoru, tj. tvrzení, jež lze dokázat pouze z axiomů struktury vektorového prostoru. Jejím cílem je u studentů podpořit budovaný koncept abstraktní matematické struktury, tedy to, že studium abstraktních matematických struktur umožňuje objevovat o těchto strukturách takové vlastnosti, které můžeme považovat za univerzální, které nezáleží na konkrétní volbě modelu dané struktury, tedy konkrétní podobě vektorů a operací s nimi. V tom je i tato úloha obtížná, což se projevilo na řešení úlohy studenty.

Společně zhodnoťme úlohy **2** a **3**, neboť jejich řešení, tj. důkaz, že se v prvním případě jedná o vektorový prostor reálných polynomů stupně nejvýše n a v druhém případě o vektorový prostor reálných posloupností, je analogický. Tyto modely vektorových prostorů byly zahrnuty do souboru úloh mimo jiného i proto, že oba byly diskutovány v hlavním studijním materiálu, a to bez důkazu. Čili úkolem je v obou případech je formálně dokázat, tj. vyjádřit se k platnosti všech axiomů vektorového prostoru pro oba vzpomínané modely.

Patrně nejobtížnější úlohou v celém souboru úloh je úloha **4**, kterou lze dohledat v mnoha publikacích (např. [**15**, s. 60]). Její řešení je obtížné především kvůli jejímu poměrně náročnému a abstraktnímu zadání, při kterém je třeba si uvědomit rozdíl operace sčítání vektorů a sčítání skalárů. V prvním případě jde o definici operace $\oplus$, ve druhém jde o standardní sčítání prvků z tělesa reálných čísel. V této souvislosti jsem zaznamenal i chyby v řešení studentů.

Následující úloha **5** zkoumá, zda množina omezených funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$ s definovanými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce skalárem tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel. Úloha je obtížná z několika důvodů. Jednak je zapotřebí znalost definice omezené funkce, jednak aplikovat techniku důkazu, že se jedná o vektorový prostor, na množinu, která může být v začátku poměrně obtížně uchopitelná, např. tím, že neutrálním prvkem je funkce.

Na úlohu **5** navazuje úloha **6**, která doplňuje předešlé zadaní o podmínku, že $|f(x)| \leq 1$, kterou se samozřejmě kompletně mění výsledek příkladu. Úloha **7** navíc mění operace sčítání funkcí a násobení funkce skalárem.

Poslední úlohou ze souboru úloh je několik cvičení, ve kterých je třeba rozhodnout, kdy zadané podmnožiny vektorů aritmetického vektorového prostoru tvoří vektorový podprostor daného reálného aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, resp. $\mathbb{R}^4$. Úloha **8** je analogií k řešenému příkladu obsaženém v hlavním studijním materiálu v kapitole s názvem *Podprostory prostoru aritmetických vektorů*.

Řešení úloh odevzdali celkem tři studenti, a to studentka A, student B a student C. Studentka A řešila úlohy **1**, **2**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**. Student B si zvolil úlohy **1**, **2**, **4** a **5** a konečně student C řešil zadání **2** a **3**.

7.2.3. Vyhodnocení a reflexe. Dotazník ke druhé lekci kurzu obsahoval celkem 8 otevřených otázek, z nichž 5 bylo zaměřeno opět na studenty samotné a zbylé 3 otázky se týkaly samotné lekce.

Hlavním tématem lekce byl pojem vektorového prostoru, který přináší nový pohled na matematický objekt, který označujeme jako *vektor*. To jsou věci samozřejmě známé, ale jaká je představa vektoru u studentů kurzu? Setkali se s ním a jak jej vnímají? Jednou z otázek dotýkajících se tohoto tématu je otázka: *Kdy a při jaké příležitosti jste se prvně seznámili s pojmem vektor? Napište, jak se pohled na tento pojem ve vás měnil v průběhu vašeho studia.* Odpovědi studentů na tuto otázku postupně byly: „S vektorem jsem se setkala poprvé už někde na konci ZŠ, ale bylo to bráno dosti okrajově. Dále při probírání analytické geometrie. Další seznámení proběhlo při probírání lineární algebry a něco málo zde na kurzu.“; „Poprvé na základce ve fyzice – s pojmem vektorová veličina, poté dlouhá doba pohledu na vektor coby na orientovanou úsečku, po pochopení základů analytické geometrie – zápis vektoru ve složkách, představa v rámci kartézského systému; nyní – ještě si musím podruhé projít prezentaci a ujasnit si to.“; „ve fyzice, hodně, nejprve jsem měl pouze intuitivní vhled do světa vektorů.“; „Poprvé jsem se s pojmem vektor setkala na začátku minulého školního roku a to ve fyzice, kdy jsme začali počítat s vektorovou rychlostí atd. Zpočátku mi vektory připadaly jako něco, co mi není souzeno chápat. S postupem času jsem látku nakonec pochopila. Z matematického hlediska jsme vektory začali probírat asi před dvěma týdny.“ Odpovědi lze shrnout do jedné, a to, že studenti se s pojmem vektor setkávají poprvé ve fyzice, mnohdy již na základní škole. Přístup ke studiu pojmu vektor ve fyzice střední školy jsem ve stručnosti shrnul v teoretické části této práce.

Jako možnou výhodu lze pokládat znalost analytické geometrie na úrovni střední školy. O tom, zda jsou účastníci kurzu s tímto tématem seznámeni ze střední školy anebo z jiných pramenů, bylo možné se přesvědčit prostřednictvím další položené otázky: *Seznámili jste se již v průběhu studia matematiky na střední škole s analytickou geometrií? Pokud ano, v jakém rozsahu?* Z odpovědí jednoznačně vyplynulo, že nikdo z přítomných studentů se s analytickou geometrií na střední škole nesetkal, nicméně současně se v odpovědích vyskytovalo, že se studenti s látkou v minulosti setkali buď při svém samostudiu nebo na letním matematicko-fyzikálním soustředění.

Na rozdíl od předchozí lekce se postoje studentů k nejobtížnější, nejlehčí a nejpracnější úloze ze zadávacího listu *Vektorové prostory a podprostory* rozcházely. Někteří například úlohu **2** považovali za nejobtížnější, jiní za nejjednodušší. Jako obtížná byla také označena úloha **8**, rovněž byla mezi nejpracnějšími úlohami.

Celkové hodnocení lekce je kladné. Z řešení úloh lze nabýt dojmu, že lekce nebyla pro studenty natolik obtížná jako lekce první, což mohlo být způsobeno také jiným stylem výuky a poměrně abstraktním tématem první lekce, ovšem z vyjádření v nepovinné části dotazníku plyne, že pro některé studenty byla druhá lekce méně zajímavá než lekce první. Zřejmě na to měly vliv i samotné úlohy k procvičování, které byly všechny vesměs podobného zadání, a to rozhodnout, zda zadaná množina s operacemi tvoří, nebo netvoří vektorový prostor.

Na otázku: *Napište libovolný komentář ke 2. lekci nebo celému kurzu*, odpověděli dva studenti: „První lekce mě zaujala více, úlohy mi přišly zajímavější. Nicméně ve druhé si mohu lépe procvičit dokazování, které mi stále činí problémy.“; „Mezi kurzem a středoškolskými hodinami je propastný rozdíl - zde se bere fest obecně a hodně se dokazuje, což u nás není moc časté, ale vyhovuje mi to.“

7.3. Báze a dimenze vektorových prostorů

7.3.1. Představení obsahu lekce. Látka třetí lekce kurzu volně navazuje na již probraný pojem vektorový prostor nad komutativním tělesem. Jejím cílem je prohloubení základních znalostí o struktuře vektorového prostoru.

Všechny odvozované pojmy jsou motivované tím, že struktura vektorového prostoru umožňuje vytvářet *lineární kombinace* vektorů. Tedy opakovaným užíváním uzavřenosti vektorového prostoru na aditivní operaci sčítání vektorů a levou vnější operaci násobení vektoru skalárem z daného tělesa lze vytvářet lineární kombinace vektorů. Vytváření lineárních kombinací považuji za klíčový jev, který spojuje další, mnohem abstraktnější definice a koncepce.

Lekce tedy v prvé řadě zavádí pojem lineární kombinace vektorů, na jehož základě formuluje poznatek, že je-li dána konečná množina vektorů M z daného vektorového prostoru V, pak všechny lineární kombinace vektorů z množiny M společně s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, které jsou definovány na prostoru V, tvoří vektorový podprostor prostoru V. To lze jednoduše ověřit právě pomocí již zmiňované a v minulé lekci dokázané nutné a postačující podmínky na vektorový podprostor. Množina lineárních kombinací vektorů z množiny M je neprázdná, neboť jistě obsahuje alespoň nulový vektor z prostoru V a navíc platí, že součet lineárních kombinací a libovolný skalární násobek lineární kombinace vektorů z množiny M je opět lineární kombinací vektorů z množiny M. Na základě tohoto faktu je následně pro množinu všech možných lineárních kombinací vektorů z množiny M zaveden pojem *lineární obal* množiny M, pro který v kurzu zavádím označení $\langle M \rangle$.

S tímto pojmem přímo souvisí další pojem užívaný v základních kurzech lineární algebry, tj. pojem *množiny generátorů*. Tento pojem je ve výukovém materiálu motivován tím, že pokud všechny lineární kombinace vektorů z množiny M tvoří vektorový prostor, tj. lineární obal množiny M je vektorový prostor, potom pouze ze znalosti prvků množiny M můžeme vytvořit, tedy vygenerovat, libovolný další vektor; proto je množina M takového vektorového podprostoru nazývána množina generátorů.

V průběhu lekce jsou v hlavním studijním materiálu představena čtyři jednoduchá tvrzení, jejichž důkazy jsou ponechány jako následné cvičení. V následující podsekci dovysvětlím, že tato lekce byla na rozdíl od ostatních lekcí kurzu omezena možností výběru úloh k vypracování. Respektive účastník kurzu si musel vybrat alespoň jednu ze čtyř uvedených vět a provést její důkaz a poté vypracovat alespoň jednu početní úlohu týkající se vyložené látky. První větou, jejíž význam shrnu jen ve stručnosti (podrobné znění tohoto tvrzení čtenář nalezne v příloze), je věta říkající, že pokud mezi vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ je vektor $\boldsymbol{v}$ lineární kombinací ostatních vektorů, potom platí $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n \rangle$.

Vyložené pojmy lineární obal a množina generátorů byly demonstrovány na příkladu vektorového prostoru geometrických vektorů a jeho podprostorů. Jednalo se o stejné schéma, jaké bylo zmíněno ve druhé lekci kurzu. Tentokrát bylo doplněno rozsáhlejším komentářem, který popisoval možné množiny generátorů jednotlivých podprostorů.

Další částí lekce bylo zavedení pojmů *lineární závislost* a *lineární nezávislost* vektorů. Při výkladu jsem vycházel z důsledku předchozí věty. V průběhu výkladu jsem využíval výsledku tvrzení, že množina vektorů je lineárně závislá právě tehdy, když v této množině existuje alespoň jeden vektor, který je lineární kombinací ostatních. Toto tvrzení bylo následně uvedeno v souboru úloh mezi důkazovými úlohami. Poté byly uvedeny dva příklady množin aritmetických vektorů a postup, jak zjistit, zda zadané množiny jsou, nebo nejsou lineárně závislé.

Spojením doposud zavedených pojmů přichází lekce s termínem *báze* vektorového prostoru V jako nejmenší množiny generátorů prostoru V. Taková množina generuje celý prostor V a navíc je lineárně nezávislá. Následovala ukázka kanonických bází ve vektorových prostorech geometrických a aritmetických vektorů a v prostoru polynomů stupně nejvýše n. Výklad byl doplněn o dva příklady. První se zabývá ověřením, že daná množina vektorů aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tvoří bázi tohoto prostoru. Druhý příklad se zaměřuje na hledání báze lineárního obalu aritmetických vektorů, tedy báze podprostoru, který je zadán jako lineární obal jisté množiny vektorů.

Na pojem báze vektorového prostoru plynule navazuje pojem *dimenze*. Bez důkazu, resp. důkaz byl přiložen jako doplňkový studijní materiál, byla zformulována Steinitzova věta o výměně. Důsledkem této věty je tvrzení, že všechny báze vektorového prostoru V mají stejný počet prvků (jednalo se o třetí tvrzení, které bylo uvedeno v souboru úloh k samostatnému řešení). Proto má smysl definovat dimenzi vektorového prostoru jako počet prvků jeho libovolné báze. V úvodu této části bylo rozlišeno, že kapitola se věnuje pouze vektorovým prostorům konečné dimenze, tedy prostorům, ve kterých existuje konečná množina generátorů. Výklad pojmu dimenze byl rovněž doplněn o příklady opírající se o již řešené úlohy (v rámci hlavního studijního materiálu). Byly určeny dimenze jednotlivých podprostorů třídimenzionální vektorového prostoru vázaných geometrických vektorů, dimenze prostoru n-rozměrných reálných aritmetických vektorů a prostoru polynomů stupně nejvýše n.

Poslední část lekce se zabývala tématem *souřadnic*, které přímo navazuje na téma báze vektorového prostoru. Poslední ze čtyř uvedených tvrzení pro samostatné dokazování účastníků byla věta o jednoznačnosti koeficientů lineární kombinace lineárně nezávislých vektorů. Tedy pokud je jistý vektor lineární kombinací lineárně nezávislých vektorů, potom jsou koeficienty této lineární kombinace určeny jednoznačně. Proto pokud vyjádříme libovolný vektor z prostoru V pomocí bázových vektorů prostoru V, pak koeficienty této lineární kombinace jsou určeny jednoznačně. To vede k zavedení pojmu souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi vektorového prostoru. Jen je třeba si uvědomit, že báze má v této chvíli podobu uspořádané množiny vektorů.

Následoval příklad na praktické počítání souřadnic aritmetického vektoru vzhledem k zadané bázi (s odkazem na již řešenou úlohu) a grafická schémata jak kosoúhlé, tak pravoúhlé souřadnicové soustavy. Rovněž byl připomenut pojem kartézský souřadnicový systém.

Na úplný závěr třetí lekce jsem zvolil diskuzi nad vztahem mezi geometrickými a aritmetickými vektory, stejně tak jako mezi aritmetickými vektory a polynomy z prostoru polynomů stupně nejvýše n. Stručně lze hovořit o *izomorfismu* mezi prostory téže dimenze nad stejným tělesem. Při výkladu je využíván právě přínos souřadnic, kde je libovolnému vektoru z prostoru konečné dimenze přiřazen aritmetický vektor. Tedy že aritmetické vektory mají v případě prostorů konečné dimenze zásadní postavení.

Jako u každé lekce měli studenti možnost seznámit se s jejím obsahem v týdnu před jejím spuštěním. Informace o třetí lekci byly, byť v hutné podobě, shrnuty do následujících několika odstavců.

> V minulé lekci jsme se seznámili s pojmy vektorový prostor a vektorový podprostor. Třetí lekce se zaměří na hlubší vlastnosti těchto struktur. Klíčovým pojmem celé kapitoly je lineární kombinace vektorů.
>
> Všechny lineární kombinace dané množiny vektorů tvoří vektorový podprostor daného vektorového prostoru. Tato daná množina vektorů pak generuje tento podprostor a nazývá se tudíž množinou generátorů. Vektory mohou být lineárně závislé, nebo nezávislé. Od toho se pak odvíjí další klíčový pojem lineární algebry, a to báze, což je množina lineárně nezávislých vektorů generujících vektorový prostor. Díky bázi můžeme popisovat vektory pomocí jejich souřadnic. Takže hledání a zavádění bází vektorových prostorů má velký význam pro souřadnicový popis vektorů v tomto prostoru. Počet prvků libovolné báze je pak označován jako dimenze vektorového (pod)prostoru.
>
> Připadá vám to všechno na úvod poměrně zmatečné? Nevadí, pojďme se v této lekci podrobně s jednotlivými pojmy blíže seznámit a určitě se daná problematika stane mnohem přehlednější.

Mezi předpokládané znalosti účastníků kurzu lze zařadit především zvládnutí druhé lekce kurzu, která je úvodem do studia vektorových prostorů. Dále je to schopnost orientace v matematické symbolice a rozeznávání logické struktury matematických vět (věty ve tvaru implikace, ekvivalence, existenční věty, věty o jednoznačnosti, apod.) Z hlediska praktických početních dovedností je to schopnost řešit soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a tří lineárních rovnic o třech neznámých. Na tomto místě upozorňuji, že odevzdávání vypracovaných úloh nebylo časově omezeno, tedy účastníci nemuseli úlohy řešit do zveřejnění další lekce. Proto v případě, kdyby řešení soustav lineárních rovnic bylo nad jejich dosavadní schopnosti, mohli počkat na lekci *Soustavy lineárních rovnic*, zde se seznámit s efektivními postupy řešení soustav, a vrátit se k předchozím úlohám.

7.3.2. Rozbor souboru úloh. Třetí soubor úloh k samostatnému řešení obsahoval celkem 13 příkladů, za jejichž řešení mohl student získat celkem 45 bodů.

Jak již bylo zčásti uvedeno v předchozí sekci, požadavky na výběr úloh k řešení z daného souboru úloh se od ostatních zadávacích listů lišily. Soubor úloh je rozdělen do dvou částí. První část obsahuje celkem čtyři tvrzení, která byla zmiňována v představení obsahu třetí výukové lekce. Druhá část zadávacího listu obsahovala devět úloh, které byly zaměřeny především na zvládání standardních početních postupů lineární algebry (bude rozebráno později).

Úkolem studentů bylo z předloženého materiálu vybrat a vyřešit, resp. dokázat, alespoň dvě úlohy tak, aby z každé části byla řešena alespoň jedna úloha. Student měl tedy za úkol dokázat alespoň jedno tvrzení a vyřešit jeden početní příklad.

Jak již bylo řečeno, úlohy **1**, **2**, **3** a **4** jsou tvrzení, která se v průběhu třetí lekce objevila v hlavním studijním materiálu a úkolem studentů bylo se je pokusit dokázat. U každého tvrzení byl doplněn návod k usnadnění důkazu. Předpokládal jsem, že studenti různého věkového rozpětí budou též různě citliví a zběhlí v určení, zda má daná věta existenční podobu nebo má tvar ekvivalence apod. a jakou důkazovou technikou ji dokázat. Proto se v návodech vyskytovala doporučení jako „důkaz veďte sporem, tvrzení má tvar ekvivalence, takže je dokazujeme jako dvě implikace, apod.“

Druhá část úloh, o kterých se zde hovoří jako o úlohách početních, se zaměřuje na zvládnutí základních početních postupů lineární algebry, mezi které zařazuji schopnost ověřit, chcete-li dokázat, zda zadaná množina vektorů daného vektorového prostoru tvoří bázi tohoto prostoru, určit souřadnice vektoru vzhledem k zadané bázi, najít bázi lineárního obalu vektorů (určit bázi vektorového podprostoru, který je zadán jako lineární obal množiny generátorů) a stanovit jeho dimenzi, rozhodnout o lineární nezávislosti resp. závislosti zadané množiny vektorů či rozhodnout, zda daný vektor patří do lineárního obalu zadané množiny vektorů. Jednotlivé úlohy se potom zaměřují na procvičení jmenovaných schopností.

Úlohy **5** a **6** se zaměřují na prověření, že zadaná množina vektorů je bází daného vektorového prostoru. V úloze **5** jde o prostor aritmetických vektorů $\mathbb{R}^3$, v případě úlohy **6** se jedná o prostor polynomů stupně nejvýše dva, tj. prostor $P^2(x, \mathbb{R})$. Obě úlohy jsou doplněny o úkol stanovit souřadnice jednoho konkrétního vektoru vzhledem k zadané (uspořádané) bázi.

Příklady **7**, **8** a **9** jsou zacíleny na schopnost ověřit, zda je zadaná množina vektorů lineárně nezávislá, nebo závislá. První dvě z uvedených úloh se týkají prostorů aritmetických vektorů a prostoru polynomů, úloha **9** zapojuje mezi řešitelovy kompetence i znalosti a schopnost aplikace goniometrických identit.

Úlohy **10** a **11** procvičují schopnost rozhodnout, zda zadaný vektor leží, nebo neleží v lineárním obalu dané množiny vektorů. Specifikem příkladu **11** je toto rozhodnutí provést v závislosti na reálném parametru.

Analogická úloha ke cvičení **12** byla řešena v rámci hlavního studijního materiálu, jednalo se o stanovení báze (a určení dimenze) vektorového podprostoru prostoru aritmetických vektorů, který je zadán jako lineární obal množiny generátorů.

V souboru poslední uvedenou úlohou je příklad **13**, který navazuje jednak na sadu důkazových úloh z lekce *Vektorové prostory a podprostory* a jednak na schopnost nalezení báze vektorového podprostoru. Na rozdíl od ostatních úloh z druhé části souboru je zadání formulováno obecně pro libovolné přirozené číslo $n \geq 1$.

Z řešitelského hlediska jde při řešení úloh **5** až **12** převážně o strategii přepisu zadaného problému na soustavu lineárních rovnic a její následné řešení. Proto jsou úlohy koncipovány tak, aby řešené soustavy obsahovaly nejvýše tři rovnice o třech neznámých. Výjimku tvoří úloha **12**, kde v případě c je třeba touto zmíněnou strategií řešit soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých. Nutno však poznamenat, že v tomto konkrétním případě je mnohem jednodušší přímo nahlédnout, že pro vektor $(0, -1, 1)$ platí $(0, -1, 1) = (1, 0, 2) - (1, 1, 1)$.

Záměrně jsem úlohy tohoto typu zvolil co do pořadí dříve než lekce *Matice* a *Soustavy lineárních rovnic*. Byť jsme v této fázi kurzu ochuzeni o úlohy s vektory ve více dimenzích, domnívám se, že je důležité formulovat studentům zadané úlohy bez znalostí maticového počtu, neboť zde nedochází k fixaci na maticový aparát. V rámci kurzu totiž na matice nahlížíme jako na početní aparát, jazyk, kterým lze výpočty tohoto typu zpřehlednit a zefektivnit.

Vypracované úlohy odevzdali studenti A, B a C. Studentka A dokazovala tvrzení **1** a **2**. Mezi početní příklady zařadila úlohy **5**, **6**, **7**, **8**, **10**, **11**, **12**, **13**. Student B dokazoval tvrzení **4** a početně řešil úlohu **5**. Student C dokázal tvrzení **3** a vyřešil úlohu **8**.

7.3.3. Vyhodnocení a reflexe. Dotazník ke třetí lekci obsahoval 8 otevřených otázek. Dvě otázky se týkaly zhodnocení všech tří předešlých lekcí a jsou zpracovány v rámci kapitoly *Shrnutí*. Další tři otázky se věnovaly hodnocení souborů úloh z první a druhé lekce z hlediska náročnosti a pracnosti zadaných úloh. Jedna otázka se týkala řešení souborů úloh a je taktéž vyhodnocena v další kapitole diplomové práce. Podkladem pro hodnocení třetí lekce kurzu jsou odpovědi na zbývající dvě otázky a na otázku položenou v lekci *Soustavy lineárních rovnic* ohledně složitosti důkazových úloh.

Již mnohokrát bylo připomínáno, že výběr úloh k řešení byl ve třetí lekci upřesněn v tom smyslu, že studenti byli povinni si vybrat jedno z uvedených čtyř tvrzení (a to dokázat) a jeden početní příklad. Protože tyto důkazové úlohy nebyly úplně jednoduché, bylo v dotazníkovém šetření zjišťováno, zda se studenti na střední škole setkali s formálním přístupem k pojmu důkaz. Tedy jestli například vědí, co to znamená důkaz přímý, nepřímý, důkaz sporem, apod. Konkrétní podoba otázky v dotazníku byla následující: *Setkali jste se během svého středoškolského studia se systematickou výukou toho, jakým způsobem se v matematice dokazují tvrzení? Pokud ano, uveďte prosím, zda jste při této výuce také sami měli dokázat nějaká jednoduchá tvrzení.* Na otázku zazněly odpovědi: „Ve školní lavici určitě ne. Ve svém volném čase jsem se s důkazy setkala už minulý školní rok. Naopak mi vadí, že ve škole není o důkazech ani zmínka. Nicméně to souvisí s mým výběrem SŠ.“; „Ano, v 1. ročníku jsme probírali důkaz přímý, nepřímý a sporem, dokazovali jsme např. iracionalitu π. Na soustředění jsem se setkal s indukcí.“; „Lehce, naštěstí se matematice věnuji i mimo gymnázium.“

Přestože se jedná převážně o velmi známá tvrzení lineární algebry, která lze dohledat v mnoha publikacích, z řešení studentů lze soudit, že na důkazech pracovali všichni samostatně a že důkaz „objevil“ každý ze studentů sám nebo jen s malým přispěním externích materiálů či rad vyučujícího.

V souvislosti s výukou matematiky jsem do dotazníku zařadil následující otázku: *Uplatňuje se někdy v rámci vašeho středoškolského studia výuka ve stylu definice-věta-důkaz? Pokud byste se na střední škole s takovým přístupem setkali, hodnotili byste ho spíše pozitivně, nebo spíše negativně?* Uvedené odpovědi studentů byly: „To skutečně ne. Hodnotila bych to velice příznivě a mrzí mě, že bez mého samostudia by mě škola v žádném případě nepřipravila na vysokoškolskou matematiku.“; „Jenom zřídka, ale určitě bych ho vnímal velmi kladně, ale nevím, co by na to řekli spolužáci, kteří už tak nemají rádi matematiku...“; „Mám to rád, to je matematika.“ Z odevzdaných odpovědí je poměrně obtížné odvozovat obecné hypotézy, ale orientace na výukový styl definice-věta-důkaz může být zapříčiněn tím, že student, který se sebevzdělává v matematice a vyhledává si informace na internetu nebo v odborných publikacích, nalezne bezpochyby odborný styl výkladu, který je vlastní matematické literatuře a který je rozdílný od stylu výkladu látky v učebnicích matematiky. Problém pak může spočívat v rozlišení matematiky jako rozumové aktivity a výsledku matematického vědění. Vzhledem k tomu, že studijní materiály jasně rozlišovaly mezi definicí, větou a důkazem, byla výše položená otázka zařazena do dotazníku.

Ze všech důkazových úloh (tedy ze čtyř úloh v první části souboru úloh ke třetí lekci kurzu) byla studenty jako nejobtížnější vybrána úloha **1** společně s úlohou **2**.

V této fázi kurzu již někteří ze zapsaných a zprvu aktivních studentů svoji další aktivitu ukončili nebo přerušili, což je dobře patrné na počtech odpovědí v dotaznících. Ke všem otázkám a odpovědím je přístup umožněn v příloze této práce.

Rovněž se mezi studenty začala objevovat první odevzdaná řešení úloh. Potěšilo mě, že v konkrétních případech studenti řešili více úloh než počet, který byl požadován. To je možné pozorovat ze závěrů podkapitoly *Rozbor souboru úloh*.

7.4. Matice

7.4.1. Představení obsahu lekce. Čtvrtá lekce kurzu následovala po oddechovém týdnu, který byl určen harmonogramem Talnet kurzů. Během tohoto týdne mají mít studenti možnost dopracovat některé úkoly a nepravidelně se rovněž organizují tematicky zaměřené exkurze apod. Ty se ovšem samotného kurzu lineární algebry nedotýkaly.

Kapitolu *Matice* jsem záměrně zařadil na úvod druhé části kurzu. Z předchozích lekcí, které byly zaměřeny převážně teoreticky, zvláště pak třetí lekce, lze usoudit, že mnoho úlohových situací v lineární algebře souvisí s řešením soustav lineárních rovnic. Proto je lekce *Matice* motivována jako prostředek k efektivnímu řešení numerických úloh lineární algebry. Právě proto byla kapitola zařazena až na čtvrté místo, aby matice byly studenty chápány jako objekty, resp. nástroj, umožňující řešení numerických výpočtů. Tato lekce se maticemi zabývá jako samostatným matematickým objektem, který v budoucnu (v následující lekci) bude užíván při hledání řešení soustav lineárních rovnic.

V pořadí čtvrtá lekce byla studentům motivována následujícím popisem, který měli možnost si přečíst již v době týdenního studijního volna.

> Cvičení z minulé lekce jasně naznačila, že mnoho úloh v lineární algebře vede ve výsledku na řešení soustav lineárních rovnic. Po týdnu oddychu se proto zaměříme na praktický početní aparát lineární algebry. Nebyla by to však lineární algebra, kdybychom se nevěnovali práci s objekty, které nazýváme matice. V další lekci se pak ukáže, že jejich význam se uplatňuje při hledání řešení soustav lineárních rovnic. Matice jako samostatné objekty studuje tato lekce.
>
> Po definici a seznámení se se základními typy matic se zaměříme na početní operace. Například zjistíme, že všechny matice stejného typu tvoří spolu s operacemi sčítání a násobení matice skalárem vektorový prostor nad daným polem. Tím se nám zase rozšiřuje paleta modelů vektorových prostorů. Na závěr se podíváme na jednoduché aplikace maticového počtu.

Samotná lekce je rozdělena do tří částí. V první části se studenti dovídají, co jsou to matice a jaké základní typy matic rozeznáváme. Je zde uvedena definice matice s několika doplňujícími poznámkami (různé značení matic v literatuře, pojem *řádkový* a *sloupcový index*, atd.). Následují definice *nulové*, *jednotkové*, *transponované*, *diagonální*, *symetrické* a *antisymetrické matice.* Vždy je definice doplněna konkrétním příkladem. Vzhledem k tomu, že výše jmenované pojmy jsou elementární, nebylo nutné se jimi zabývat podrobněji.

Druhá část lekce je pojmenována *Operace s maticemi.* Formálním způsobem jsou představeny operace sčítání matic stejného typu, násobení matice skalárem a nakonec násobení matic mezi sebou. Při tom se v kapitole rozvíjí představa vektorového prostoru o další model, vektorový prostor matic typu (m, n) nad tělesen T. Je také nalezena báze tohoto prostoru a stanovena jeho dimenze.

Veškeré závěry vlastností operací s maticemi včetně některých zatím nedokázaných tvrzení byly shrnuty do věty a poté dokázány. Důkaz se podrobně zaměřil na ověření *asociativity* maticového násobení a *distributivity* násobení matic vzhledem ke sčítání matic. První zmiňovaná vlastnost byla ve výukovém materiálu dokázána bez použití sumační symboliky, distributivita byla ověřena již s použitím sumačního znaku. Větu následovalo tvrzení o vlastnostech maticových operací ve vztahu k maticovému transponování. Toto tvrzení bylo rovněž dokázáno.

Třetí a poslední část lekce s názvem *Vybrané aplikace maticového počtu* obsahovala dvě podsekce. V první podsekci je ukázán vztah mezi vytvářením lineárních kombinací sloupcových aritmetických vektorů a násobením matice a sloupcového vektoru.

Máme-li m-rozměrné sloupcové aritmetické vektory $\boldsymbol{v}_1^T, \boldsymbol{v}_1^T, \ldots, \boldsymbol{v}_n^T$ a utvoříme jejich lineární kombinaci $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1^T + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2^T + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n^T$, potom tuto lineární kombinaci můžeme ekvivalentně přepsat jako násobení matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n), jejíž k-tý sloupec je vektor $\boldsymbol{v}_k^T$, sloupcovým n-rozměrným aritmetickým vektorem $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ obsahujícím koeficienty dané lineární kombinace. Tato vlastnost je důležitá např. při přechodu ze *sloupcového pohledu* na soustavu lineárních rovnic k jejím přepisu do tvaru $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{b}^T$.

Jako druhou aplikaci maticového počtu jsem zařadil a danou kapitolu nazval *Matice jako operátor*, tu lze charakterizovat jako jednoduchý úvod do studia lineárních zobrazení. Pokud např. daným dvojrozměrným aritmetickým vektorem máme na mysli souřadnicový zápis geometrického vektoru v rovině, a zapůsobíme na tento vektor zleva čtvercovou maticí řádu 2, potom je výsledkem jiný dvojrozměrný vektor, jejž chápeme jako obraz původního vektoru vzhledem k zobrazení danému konkrétní čtvercovou maticí. Na tuto problematiku navazují úlohy v souborech úloh k samostatnému řešení.

Tato lekce volně navazuje na předešlé lekce především v části zabývající se vektorovým prostorem matic typu (m, n) nad tělesem T. Od studentů však mnoho vstupních znalostí nevyžaduje. Obtížnější partií je určitě důkazová část, ve které se diskutují vlastnosti maticového násobení, konkrétně asociativita a distributivita, a dále část zkoumající vztah maticového násobení a transponování matic. Celá lekce je spíše praktičtěji orientována – na rozdíl od předešlých třech lekcí.

7.4.2. Rozbor souboru úloh. Soubor úloh připravený pro samostatné řešení studentů obsahuje osm úloh, za které je v součtu možné získat až 45 bodů. K úspěšnému absolvování kurzu student nemusí řešit všech osm úloh, stačí, aby si ze souboru vybral alespoň dvě z nich.

Jednotlivé příklady byly voleny tak, aby jednak podporovaly početní dovednosti s maticemi a jednak prohlubovaly teoretické znalosti studentů. Úloha číslo **1** je ukázkou druhého typu zmíněných příkladů. Navazuje na v lekci probírané téma o vektorovém prostoru matic typu (m, n). Úloha je zformulována tak, že student má za úkol vyjádřit se, zda množina všech symetrických, resp. antisymetrických matic řádu n tvoří vektorový podprostor prostoru reálných čtvercových matic řádu n. Součástí úlohy je rovněž stanovit případnou bázi daných podprostorů a stanovit jejich dimenze. Vzhledem k tomu, že podkapitola *Vektorový prostor matic typu* (m, n) (nad tělesem T) zavedla další model struktury vektorového prostoru, propojuje úloha **2** schopnosti rozhodnout, zda zadaná množina vektorů (zde čtvercových komplexních matic řádu 2) tvoří bázi prostoru komplexních čtvercových matic řádu 2. Tato úloha je v souboru obsažena především pro studenty, kteří ovládají práci s komplexními čísly. Tedy první dvě úlohy souboru navazují na úlohy ve třetí lekci kurzu a hlouběji rozvádí pojem vektorového prostoru.

Úloha **3**, která je ze všech příkladů v souboru úloh nejvíce bodově ohodnocena, vyžaduje od studenta dobré porozumění zadání. Jde o rozšiřující úlohu, která seznamuje řešitele s pojmy jako např. *komutátor*, *Lieova algebra* či *Jacobiho* identita. Jedná se o důkazovou úlohu, která byla zpracována na základě publikace [**31**, s. 149-150].

Zatímco příklady **1** a **2** se zaměřovaly především na sčítání matic a násobení matice skalárem, úlohy **4** a **5** jsou zařazeny za účelem lepšího procvičení maticového násobení. Úloha **4** zavádí pojem mocnina matice a úkolem řešitele je nejprve přes konkrétní příklady mocnin zadané matice odhadnout její tvar pro libovolné přirozené číslo n. Svoji hypotézu pak má ověřit matematickou indukcí. Naproti tomu úloha **5** je poměrně komplexní úlohou, kde nejde pouze o maticové násobení. Student musí nejprve zvážit, za jakých podmínek může dané matice násobit, a stanovit tak všechny dvojice matic, které násobit lze. Ověří si, že maticové násobení není komutativní a konečně si na několika příkladech procvičí naučený algoritmus výpočtu maticového součinu.

Poslední skupinou jsou úlohy **6**, **7** a **8**, které rozšiřují pohled na matice ve shodě s poslední částí lekce *Vybrané aplikace maticového počtu*, a to konkrétně pohled na matice jako operátory. Což je z hlediska kurzu lineární algebry synonymem pro maticovou reprezentaci lineárního zobrazení.

Úloha **6** se věnuje studiu analytického popisu speciálních shodných zobrazení v rovině. Konkrétně jde o středovou souměrnost podle počátku O, osové souměrnosti podle os x a y souřadnicového systému Oxy a nakonec popis stejnolehlosti se středem v bodě O a koeficientem k. Úloha patří mezi ty náročnější, a to především proto, že analogická úloha nebyla ani v rámci této lekce, ani v rámci lekcí předešlých, řešena ani zadávána. Jednalo se o jednu z úloh, které měly u účastníků kurzu vzbudit jistý zájem o diskuzi nad postupem řešení v prostředí diskuzního fóra. K tomu ovšem bohužel nedošlo. Úloha byla doplněna o hledání vlastních vektorů daného zobrazení (dané matice endomorfismu), kde z definičního vztahu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^T = \lambda\boldsymbol{v}^T$ šlo o interpretaci vlastního vektoru $\boldsymbol{v}^T$ jako vektoru samodružného. Potom algoritmický postup hledání vlastních čísel a vektorů, který v lekci nebyl probírán, není nutné nasazovat.

Zvláštní místo mělo otočení v rovině kolem počátku O o úhel α. V úloze **7** byla studentům ponechána možnost experimentování a hledání důkazu, že zadanou maticí je v rovině popsána zmiňovaná rotace. Tato úloha od řešitele vyžadovala i znalost goniometrických identit, zvláště pak součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus.

Poslední úloha číslo **8** byla zařazena za účelem motivace, tedy opodstatnění definice maticového násobení ve tvaru, jakým byla operace s maticemi zavedena. Úloha se zabývá skládáním lineárních zobrazení, z jejích výsledků plyne, že násobení matic odpovídá skládání lineárních zobrazení.

Řešení úloh odevzdali studenti A, B a C. Studentka A řešila úlohy **1**, **2**, **4**, **5**, **7**, **8**. Student B si vybral příklady **2**, **4** a **5** a student C řešil úlohy **2**, **3** a **4**. Úloha **6** nebyla řešena žádným studentem.

7.4.3. Vyhodnocení a reflexe. Dotazník ke 4. lekci obsahoval pouze 5 otázek. První se týkala účastníků samotných, zbylé pak studované lekce *Matice*. Toto shrnutí je rovněž doplněno o otázky z 5. lekce, které se týkaly zhodnocení obtížnosti úkolů v souboru úloh.

Není vyloučeno, že téma studované v této lekci může být na středních školách (převážně matematicky nebo technicky orientovaných) zařazeno nad rámec vzdělávacích programů. První otázka týkající se aktuální lekce proto zněla: *Setkali jste se v průběhu svého studia s maticemi? Pokud ano, kde? Jak vám byly představeny?* Představme si jednotlivé odpovědi: „Ano, setkala jsem s nimi v rámci svého samostudia. Na SŠ nikoliv.“; „Jen zde v kurzu a na soustředění, kde mi byly představeny jako dobrá metoda k řešení lineárních rovnic.“; „Ano, v nepovinných hodinách matematiky, dříve sám při svém vlastním studiu.“; „Ano, narazila jsem na maticový počet v Excelu v informatice.“

Z uvedených odpovědí je patrné, že studenti se s maticemi setkali již před studiem kurzu.

Další otázka zněla: *Umíte bez problémů používat matice? Použili jste je už někdy při řešení nějakého problému? Dovedete si představit situaci, kdy byste po maticích sáhli? Jaká by to byla situace?* Na tuto otázku odpovídali studenti takto: „Bez problému bych asi neřekla, ale učím se s nimi a tento kurz mi možná ukáže něco nového. Jsou vhodné k řešení soustav rovnic, takže v tomto případě.“; „Zatím si jen tady v kurzu procvičuju. Nejspíš bych je použil při řešení soustav lineárních rovnic, popř. ve fyzice jsem se setkal s tenzory, což je pokud vím jistý druh matice.“; „Vím o nich, ale momentálně je nepotřebuji, proto jsem se s nimi nesnažil pořádně učit zacházet.“; „Doteď jsem znala pouze základy práce s maticemi a nebyla jsem schopná je aplikovat na problémy. V průběhu lekce jsem se přesvědčila, že více než jeden koncept jsem chápala špatně.“

Za obtížný moment v lekci *Matice* je možné označit část týkající se důkazu asociativity maticového násobení a distributivity maticového násobení ke sčítání. První tvrzení o asociativnosti dané operace bylo studentům v kurzu představeno bez použití sumačního znaku a tím pádem se jeho důkaz prodloužil. Proto byla velkou otázkou této lekce matematická symbolika. Tohoto tématu se týkala i následující otázka, jejímž úkolem bylo zjistit zpětnou vazbu studentů na matematický jazyk a symboliku používanou v tomto kurzu.

Konkrétní znění otázky bylo následující: *V průběhu minulých lekcí a ve velké míře i ve 4. lekci našla uplatnění matematická notace (značky logických spojek, suma ad.). Popište prosím, jak subjektivně hodnotíte svoji schopnost tento „matematický jazyk“ číst.* Na otázku studenti odpovídali takto: „Zde v kurzu je použito celkem málo matematických symbolů, takže pro mě nebyl problém rozumět jim. Jinak se setkávám s matematickým jazykem a učím se psát v programech, jež ho podporují.“; „Matematickou symboliku v tomto kurzu jsem bez problému přečetl. Svoji schopnost číst tyto značky považuji spíše za horší, pořád mám problémy s operátory jako např. nabla.“; „Myslím, že jsem bez problému schopný matematický jazyk číst.“; „S obtížemi, ač jsem se v podstatě se všemi značkami už někdy setkala, nová látka mi skrze ně nikdy vysvětlována nebyla a některé značky jsem si musela i opakovaně dohledávat, abych text pochopila. Myslím si, že jde jen o zvyk a jak často je používám. Teď už se mi s nimi pracuje o mnoho lépe.“

Účastníci byli zpětně dotázáni, jakou z úloh v materiálu *K samostatnému řešení* k lekci *Matice* hodnotí jako nejobtížnější a nejsnazší, a aby uvedli důvody své volby. Jako nejsnazší úlohy byly označovány úlohy číslo **4** a **5**, nejobtížnější byly shledány úlohy **3** a **6**.

Jako lektora mě velmi potěšily komentáře studentů: „Momentálně jsem dost ve skluzu a budu ještě dělat úlohy ze třetí lekce, nicméně matice mi přijdou užitečné a na úlohy se velmi těším.“; „Líbila se mi mnohem víc než předchozí, neboť zde bylo více příkladů než v teoretičtějších předchozích lekcích.“; „Pěkná lekce :)“; „Doposud pro mě nejtěžší lekce, především část o vlastnostech maticových operací.“

Na základě výpovědí studentů označuji 4. lekci za velmi vydařenou.

7.5. Soustavy lineárních rovnic

7.5.1. Představení obsahu lekce. Předposlední lekce kurzu je zaměřena na výklad algoritmu řešení soustav lineárních rovnic metodou *Gaussovy eliminace*, konkrétněji metodou *Gaussovy-Jordanovy eliminace*. Cílem lekce je studentům představit postup řešení obecného systému m lineárních rovnic o n neznámých. Na rozdíl od předchozích lekcí je v této lekci kladen významný důraz na praktičnost. Látku probíranou v této lekci mohou studenti prakticky uplatňovat již ve svém současném studiu na střední škole. Zvládnutí řešení soustav libovolného počtu lineárních rovnic a neznámých umožňuje také efektivně řešit úlohy ze třetí lekce *Báze a dimenze vektorových prostorů*.

Nyní se seznamme s úvodním textem 5. lekce.

> Jak už jsme si minule řekli, nutnost řešení soustav lineárních rovnic je častým závěrem při řešení problémů z lineární algebry. Po exkurzu do maticového počtu uskutečněného v předchozí lekci se nyní naučíme soustavy lineárních rovnic efektivně řešit.
>
> Na střední škole se nejčastěji setkáváme se řešením soustav tří lineárních rovnic o třech neznámých. Metody, které se při řešení uplatňují, souhrnně označujeme za eliminační. Ať už použijeme sčítací nebo dosazovací metodu, vždy to ve výsledku vede na situaci, kdy v nové rovnici je méně neznámých než v předchozí.
>
> Není vyloučeno, že s Gaussovou metodou eliminace se někteří z vás již setkali. Výhoda Gaussovy-Jordanovy eliminační metody spočívá v její algoritmizaci – tedy postup je možno aplikovat na libovolnou soustavu s libovolným počtem lineárních rovnic a neznámých a vždy dojdeme k cíli. O především praktickém postupu řešení soustav lineárních rovnic je předposlední lekce našeho kurzu.

Lekce je rozdělena do tří hlavních kapitol. První nese název *Gaussova eliminační metoda*. V této kapitole zahajuji výklad připomenutím pojmu *ekvivalentní úpravy rovnic*, jež předpokládám, že studenti na jisté úrovni znají ze základní a střední školy. Jsou zde uvedeny tři základní úpravy soustavy rovnic: záměna pořadí rovnic, vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem (nenulovým prvkem z tělesa T), přičtení k jedné rovnici libovolný λ-násobek jiné rovnice ($\lambda \in T$). Dále je to připomenutí, že již na základní a střední škole se žáci učí řešit soustavy lineárních rovnic metodami, jež souhrnně označujeme za tzv. *eliminační*, jako jsou metoda *sčítací*, *dosazovací* a *srovnávací*. Dále je vyložen algoritmus Gaussovy eliminace pro případ soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých, který je doplněn motivačními příklady.

Motivační příklady jsou ukázková řešení postupně tří soustav tří lineárních rovnic o třech neznámých, kde tyto soustavy jsou voleny s ohledem na počet řešení. Upozorňuji, že řešení daných soustav je provedeno Gaussovou-Jordanovou eliminací bez použití maticového zápisu, tedy bez užití *rozšířené matice soustavy*. Cílem lekce bylo studentům představit Gaussovu eliminaci jako vhodně volené užívání sčítací metody řešení soustav lineárních rovnic. Během ukázkového řešení příkladů jsem se názornost úlohy snažil zvýšit a připojil geometrický pohled na soustavu lineárních rovnic, konkrétně *řádkový pohled*, který jednotlivé rovnice chápe jako analytické vyjádření roviny ve trojrozměrném eukleidovském prostoru. Princip ekvivalentní úpravy spočívá samozřejmě v tom, že takovou úpravou se změní soustava lineárních rovnic, ale nezmění se její řešení. To znamená, že se roviny, které jednotlivé rovnice popisují, změní, ale jejich průnik (společný průsečík, průsečnice, prázdná množina, celá rovina) se nezmění. Vhodnost tohoto geometrického přiblížení je závislá na matematické úrovni studentů. Je vhodnější pro ty studenty, kteří se s analytickým vyjádřením roviny v prostoru setkali.

První řešená soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých měla právě jedno řešení, tudíž jejím řešením byl polohový vektor mířící do jediného bodu třírozměrného prostoru. Zde dodávám, že řešení soustavy lineárních rovnic je aritmetický vektor, je to uspořádaná n-tice prvků z tělesa T, které splňují všechny rovnice soustavy. Druhá soustava byla ukázkou systému rovnic, který má nekonečně mnoho řešení, které závisí na volbě jednoho parametru. Zde bylo využito geometrického pohledu k diskuzi, že každé řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic lze napsat jako součet tzv. *partikulárního řešení* (libovolné jedno řešení nehomogenní soustavy) a řešení *homogenní soustavy* (toto řešení tvoří vektorový podprostor příslušného n-rozměrného aritmetického prostoru, a proto bývá zapisováno jako lineární obal báze tohoto podprostoru). K tomu jsem se v kurzu dostal s předpokladem předchozích znalostí, které se opírají především o obsah lekce *Báze a dimenze vektorového prostoru*.

Poslední motivační úloha byla zaměřena na ukázku soustavy rovnic, jež nemá řešení. Tedy tři roviny, které jsou popsány rovnicemi dané soustavy, nemají žádný společný bod (vektor).

Jako můstek mezi přechodem ze standardního k maticovému zápisu soustavy lineárních rovnic jsem využil jednak již řešené soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých z první kapitoly lekce, jednak poznatek o maticovém násobení a lineárních kombinacích sloupcových aritmetických vektorů, který byl diskutován ve čtvrté lekci v části *Vybrané aplikace maticového počtu*. Zde je zaveden přepis soustavy tří rovnic o třech neznámých do podoby $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{b}^T$, kde $\boldsymbol{A}$ je tzv. *matice soustavy*, sloupcový vektor $\boldsymbol{x}^T$ je *vektor neznámých* a konečně vektor $\boldsymbol{b}^T$ je *vektor pravých stran*. Při odvozování jsem vycházel z tzv. *sloupcového pohledu* na soustavu lineárních rovnic.

Toto je úvod druhé kapitoly páté lekce, která nese název *Maticová reprezentace soustavy lineárních rovnic*. Na základě předešlých úvah byly pojmy matice soustavy, vektor neznámých, vektor pravých stran, stejně tak jako pojem *řešení soustavy lineárních rovnic* rozšířen na obecnou soustavu m-lineárních rovnic o n-neznámých nad tělesem T. Zavedeny byly rovněž termíny *homogenní* a *nehomogenní* soustava.

Následovalo zavedení zápisu každé obecné soustavy lineárních rovnic do maticového tvaru a pro potřeby řešení do *rozšířené matice soustavy*. Při této příležitosti bylo užívání ekvivalentních úprav na soustavu lineárních rovnic přeformulováno do podoby *elementárních řádkových úprav* provedených na rozšířenou matici soustavy a její cílené převedení do *odstupňovaného*, resp. *redukovaného odstupňovaného tvaru*, přičemž význam uvedených pojmů byl zastřešen příslušnou definicí. Řešení konkrétního příkladu soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých bylo předvedeno na první motivační úloze, tentokrát s přepisem na rozšířenou matici soustavy a převodem elementárními řádkovými úpravami na redukovaný odstupňovaný tvar.

V poslední části druhé kapitoly jsem se věnoval výkladu podmínek řešitelnosti obecné soustavy lineárních rovnic. Standardním přístupem k této problematice je zavedení pojmu *hodnost matice* jako dimenze řádkového, resp. sloupcového podprostoru dané matice. Řešitelnost soustavy rovnic pak je formulována pomocí známé *Frobeniovy věty*. Tento pojem však v kurzu nebyl zaveden a naopak jeho dodatečné zavedení spatřuji jako bezvýznamné pro další látku. S ohledem na rozsah lekce jsem se proto rozhodl zkoumat nejprve na konkrétních příkladech rozšířených matic soustavy, jež byly převedeny do redukovaného odstupňovaného tvaru, zda mají dané soustavy řešení, či nikoliv, a na základě toho zformulovat větu (bez důkazu, jde tedy o jakési pozorování) popisující řešitelnost obecné soustavy lineárních rovnic. Využil jsem k tomu pojmu *pivotní* a *nepivotní* sloupec, jehož používání, ač jde o v české literatuře pojem výjimečně užívaný, lze doložit např. zahraniční literaturou (viz [**45**]). Pivotní a nepivotní sloupec byl definován společně s pojmy odstupňovaný tvar a redukovaný odstupňovaný tvar. Jeho aplikací je možné popisně vyjádřit, za jakých podmínek má soustava právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení závislých na k parametrech nebo kdy soustava nemá řešení. Zároveň je tu přímý vztah k hodnosti matice jako počtu pivotních sloupců.

Třetí kapitola 5. lekce s názvem *Řešené příklady* předkládá ukázky dvou složitějších úloh vedoucích na řešení soustav lineárních rovnic. První příklad obsahuje přímé řešení soustavy tří lineárních rovnic o pěti neznámých a rovněž přepis řešení soustavy do tvaru součtu partikulárního řešení a řešení příslušné homogenní soustavy. Druhá úloha vede na diskuzi nad počtem řešení a je úlohou na hledání báze vektorového podprostoru čtyřrozměrných aritmetických vektorů a ukazuje i recept na ověření lineární nezávislosti aritmetických vektorů.

Mezi předpokládané znalosti a dovednosti potřebné ke studiu této lekce lze zařadit řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a tří lineárních rovnic o třech neznámých metodami běžně užívanými na základní a střední škole. Výhodu mají studenti, kteří se již nějakým způsobem (ať už v rámci studia na střední škole či samostudia) setkali s analytickou geometrií prostorových útvarů. Vzhledem k tomu, že tato část analytické geometrie není obsažena v *Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia* (viz [**42**, s. 25]), nelze ji od studentů vyžadovat. V neposlední řadě jsou v lekci zahrnuty poznatky z předešlých lekcí, především z lekcí *Báze a dimenze vektorových podprostorů* a *Matice*.

7.5.2. Rozbor souboru úloh. Pátá lekce kurzu byla úmyslně zaměřena praktickým směrem, a proto i soubor úloh k procvičování toto respektoval. Nebyly zde na studenty kladeny žádné neobvyklé podmínky ohledně výběru úloh k řešení, a tak si studenti mohli vybrat alespoň dvě úlohy k řešení zcela libovolně.

Soubor úloh *Soustavy lineárních rovnic* obsahuje ve srovnání s ostatními soubory méně příkladů. Za celkem 4 úlohy mohli studenti získat až 20 bodů. To odpovídá třetině z množství bodů nutných pro absolvování kurzu. V případě úloh **1**, **2** a **3** se jednalo o explicitně zadané soustavy lineárních rovnic. Příklad **1** byla soustava čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých, která měla právě jedno řešení. Příklad **2** byla soustava čtyř lineárních rovnic o pěti neznámých, která měla nekonečně mnoho řešení, a konečně úloha **3** obsahuje soustavu pěti lineárních rovnic o čtyřech neznámých, která nemá řešení.

Předešlé úlohy tak bylo možné řešit zcela algoritmicky. Poslední úloha číslo **4** byla zaměřena na užití soustavy lineárních rovnic pro rozhodnutí lineární závislosti, resp. nezávislosti, zadané množiny vektorů z prostoru $\mathbb{R}^5$ a následné stanovení nějaké konkrétní báze vektorové podprostoru, který byl touto množinou vektorů generován. Tato úloha byla pouhým rozšířením příkladu řešeného na konci hlavního studijního materiálu k této lekci.

Odevzdávání úloh k 5. lekci kurzu se zúčasnili pouze dva studenti. Studentka A vyřešila všechny předložené úlohy zcela bezchybně. Z jejích řešení je však možné vysledovat, že eliminační algoritmus u ní není ještě natolik upevněn. To se projevuje například ve volbě, jakou rovnici od které odečíst atp. V řešení nepostupuje směrem k vytváření nulové dolní trojúhelníkové matice. Student B řešil rovněž všechny úlohy, v úloze **2** však důsledkem numerické chyby při úpravách rovnic dospěl k chybnému řešení, ve čtvrté úloze chybělo stanovení báze daného podprostoru.

7.5.3. Vyhodnocení a reflexe. Předposlední lekce byla pro mne jako lektora kurzu zajímavým zjištěním. Od této lekce jsem měl velká očekávání především proto, že tvorba studijního materiálu byla velmi náročná a zdlouhavá. Obsah lekce jsem se v materiálu snažil co nejlépe uchopit, bylo zařazeno relativně hodně příkladů a výklad látky postupoval od konkrétního k obecnému. Vzhledem k tomu, že předešlé studijní materiály byly studenty hodnoceny vesměs kladně, až na drobné nedostatky jako ukázky konkrétních příkladů a jejich řešení (což ovšem bylo z mé strany záměrem, neboť studijní materiál měl především pobízet účastníky kurzu k diskuzi právě nad těmito konkrétnostmi), domníval jsem se, že tato lekce bude hodnocena o to lépe. Než se však podíváme na reakce studentů, doplním, že v dotazníkovém šetření bylo zahrnuto celkem 7 otázek. Přímo 5. lekce se týkaly právě 4 z nich.

Při plánování kurzu jsem vycházel z přesvědčení, že pokud se někdo blíže zajímá o matematiku, nečiní mu řešení soustav lineárních rovnic veliké problémy. Bylo možné předpokládat, že se studenti s pojmem Gaussova eliminace již před kurzem seznámili. Proto první otázka zněla: *Seznámili jste se na střední škole s Gaussovou eliminační metodou pro řešení soustav lineárních rovnic? Pokud ano, jakým způsobem vám byla představena?* Odpovědi účastníků zněly: „Na SŠ jsem se s touto metodou nesetkala. Nicméně tuto metodu jsem znala před tímto kurzem (vlastní použití).“; „Bohužel zatím ne.“; „Ano, méně exaktně než tady v kurzu.“

Další otázka se zaměřila na oblast užití řádkového a sloupcového pohledu, tedy na geometrické přiblížení soustav lineárních rovnic. Formulace otázky byla následující: *V rámci lekce jsme zapojili i geometrickou analogii k řešení soustav lineárních rovnic (řádkový pohled a sloupcový pohled). Zhodnoťte, zda vám tato analogie pomohla k lepšímu pochopení probírané látky.* Odpovědi studentů mne trochu překvapily: „Osobně geometrický pohled na věc nemám příliš ráda. Tudíž v mém případě užitečná nebyla.“; „Pouze až znázornění řešení, jinak je mi přívětivější zápis rovnic.“; „Určitě pomohla.“

Otázka týkající se podoby hlavního studijního materiálu zněla: *Zhodnoťte podobu hlavního studijního materiálu (prezentace) z následujících hledisek: Přehlednost, názornost, úplnost, srozumitelnost.* Od studentů zazněly tyto odpovědi: „Všechny prezentace jsou velice přehledné a působí dobrým dojmem, takže ani zde nic nevytýkám. Tato prezentace je až moc podrobná a obsahuje informace, bez kterých bych se obešla (příliš triviální), naopak mi především v minulých chyběla trochu pokročilejší látka. Některé úlohy jsou až moc složité – vzhledem k trivialitě studijních materiálů.“; „Jsem spokojen: přehlednost – bez problému; názornost – množství řešených příkladů je velkým kladem této lekce; úplnost – no, budu věřit, že všechny potřebné věci tam jsou; srozumitelnost – jelikož se jedná o věci v praxi používané, tak mi je lekce mnohem srozumitelnější než poněkud abstraktní lekce 1-3.“; „Pěkné, úplné, líbila se mi.“

Poslední otevřená otázka vyzývala k napsání libovolného komentáře k 5. lekci. Mezi odpověďmi se vyskytlo např. „Nemusela být tak podrobná (lekce, pozn. autora) a hodilo by se mi více času na řešení kurzu.“ nebo „Soustavy lineárních rovnic jsou nudné chytače pidi chyb.“

Na základě odpovědí lze lekci *Soustavy lineárních rovnic* hodnotit pozitivně. Některým studentům geometrický a velmi konkrétní přístup k tématu vyhovoval, jiní jej k lepšímu porozumění nepotřebují.

7.6. Unitární prostory

7.6.1. Představení obsahu lekce. Poslední lekce kurzu se věnuje *skalárnímu součinu* na reálných vektorových prostorech. Cílem lekce je studentům, kteří se se skalárním součinem setkali již během studia na střední škole, rozšířit znalosti z hlediska přístupu lineární algebry. Pro studenty, kteří zatím o skalárním součinu neslyšeli, je v lekci podrobně rozebráno jeho zavedení. Cílem lekce je především ukázat studentům, že skalární součin není jen jeden (ve smyslu *standardní skalární součin* na reálném aritmetickém vektorovém prostoru), ale je to obecný pojem, který ve svém důsledku umožňuje na vektorových prostorech zavádět pojem vzdálenosti, čímž si získává důležité postavení v matematickém formalismu moderních fyzikálních teorií.

Podobně jako v předešlých pěti lekcích, měli i v této poslední lekci studenti možnost seznámit se s jejím obsahem prostřednictvím následujícího textu, který se účastníkům kurzu zpřístupnil v průběhu týdne věnovanému řešení soustav lineárních rovnic.

> Vítejte v poslední lekci kurzu lineární algebry.
>
> Dnes se budeme zabývat opět více teoretickým a abstraktním tématem, kde ústředním pojmem celé kapitoly bude *skalární součin.*
>
> Termín skalární součin již může být některým z vás známý, ať už z fyziky nebo z analytické geometrie. Označení součin je z dnešního pohledu poněkud zavádějící, neboť bychom se mohli domnívat, že jde o operaci s vektory. Skalární součin je ve skutečnosti zobrazení, které dvěma vektorům přiřazuje reálné (komplexní) číslo. Takové zobrazení tvoří jakousi dodatečnou strukturu vektorového prostoru, na kterém je definováno. Vektorový prostor se skalárním součinem nazýváme *unitární prostor.*
>
> V této lekci se zaměříme pouze na studium vektorových prostorů nad tělesem reálných čísel.
>
> Unitární prostory nalezneme v mnoha aplikacích, asi nejvýraznější je pochopitelně matematický formalismus kvantové mechaniky (Hilbertův prostor). Díky skalárnímu součinu můžeme definovat na vektorových prostorech pojmy jako *délka vektoru*, *vzdálenost* nebo *úhel*, který spolu svírají dva vektory. Protože se se skalárním součinem setkávají studenti již na středních školách, byla by škoda se o něm v poslední části kurzu nezmínit a axiomaticky jej nezavést.

Jak úvodní text naznačil, celá lekce je věnována skalárnímu součinu na reálných vektorových prostorech. Výukový materiál se opírá o postup zavedení skalárního součinu uvedený v teoretické části práce. Proto si zde jen stručně daný koncept připomeňme a rozeberme jej z hlediska přístupu hlavního studijního materiálu. O konkrétním provedení zavedení skalárního součinu si čtenář může nejpřesnější představu učinit z příloh této práce.

Lekce je rozdělena na tři části. První studuje pojem skalárního součinu vzatý z fyziky a zobecňuje jej na aritmetický vektorový prostor. Druhá část se věnuje axiomatickému zavedení skalárního součinu, a to na základě vlastností tohoto zobrazení, které byly odvozeny v první části. Poslední část výukového materiálu je rozšiřujícího charakteru a věnuje se pohledu lineární algebry na analytickou geometrii, resp. jejich vzájemnému matematickému vztahu.

První kapitola lekce nese název *Motivace skalárního součinu.* Účastníkům kurzu je představeno pojetí skalárního součinu ve fyzice a jeho uplatnění při výpočtu mechanické práce $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = \|\boldsymbol{F}\|\|\boldsymbol{s}\| \cos \varphi$, kde $\boldsymbol{F}$ je síla, která působí na těleso a s vektorem posunutí $\boldsymbol{s}$ svírá úhel φ. Tímto způsobem definovaný skalární součin se nejprve zobecňuje na vektorovém prostoru geometrických vektorů a ukazuje se, že díky planimetrickým větám, především větě kosinové, je jeho explicitní zavedení nadbytečné. Nicméně v jiných modelech vektorových prostorů, kde pojmy jako úhel nebo délka vektoru nemají smysluplný význam, je zavedení skalárního součinu na tomto prostoru nutné.

Dále se provádí diskuze vlastností skalárního součinu geometrických vektorů. Zřejmá je *symetričnost* tohoto zobrazení a *pozitivní definitnost* (připomínám, že se v této lekci zaměřujeme výhradně na reálné vektorové prostory). Naproti tomu pomocí planimetrických vět je v textu dokázána *bilinearita* skalárního součinu.

Následuje část o izomorfismu vektorového prostoru geometrických vektorů a prostoru aritmetických vektorů příslušné dimenze. V této části se odvozuje analytické vyjádření skalárního součinu v aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$. Rovněž se v rámci této kapitoly řeší úloha zkoumající jiné předpisy pro skalární součin na prostoru aritmetických vektorů.

Druhá část lekce s názvem *Axiomatické zavedení skalárního součinu* se opírá o poznatky získané podrobnějším výkladem první části lekce a formuluje definici skalárního součinu, resp. *vektorového prostoru se skalárním součinem*, nad tělesem reálných čísel. Definice je doplněna dalšími ukázkami modelů vektorových prostorů a jejich možných skalárních součinů, jako jsou prostor polynomů stupně nejvýše n a vektorový prostor reálných matic typu (m, n). Dále je zaveden pojem *norma* vektoru a prostřednictvím věty o *Schwarzově nerovnosti* popsán vztah mezi velikostí skalárního součinu (jeho absolutní hodnotou) dvou vektorů a součinem jejich norem, tedy že $|g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$. Důkaz Schwarzovy nerovnosti je proveden pro reálný vektorový prostor. Posledním zavedeným pojmem je úhel mezi dvěma vektory, který je založen na již studovaném předpisu skalárního součinu pro geometrické vektory.

Poslední část lekce, jež byla nazvána *Cesta od lineární algebry ke geometrii prostoru*, měla za cíl ve stručnosti studentům ukázat, jak analytický popis geometrických objektů souvisí se studiem lineární algebry, a intuitivně předložit téma afinního eukleidovského prostoru, tedy prostoru bodů, jehož zaměřením je reálný aritmetický vektorový prostor se standardním skalárním součinem. Popsat tedy model úplného algebraického popisu geometrického prostoru.

7.6.2. Rozbor souboru úloh. Soubor úloh *K samostatnému řešení* k poslední lekci kurzu *Unitární prostory* obsahoval celkem sedm úloh, za které mohli studenti získat maximálně 40 bodů.

Požadavky na výběr úloh k řešení byly stejné jako v ostatních lekcích. Tedy student měl povinnost vybrat si z předložených příkladů alespoň dva, ty řešit a své závěry sdílet prostřednictvím Moodlu s lektorem kurzu. Na základě řešení bylo studentovi přiděleno příslušné množství bodů.

Úlohy **1** a **2** byly do souboru zařazeny za účelem rozšířit studentovo povědomí o dalších matematických strukturách, konkrétně *normovaném prostoru* a *metrickém prostoru* a jejich vztahu k vektorovému prostoru se skalárním součinem. Úloha **3** využívá přepisu normy vektoru pomocí skalárního součinu. Při geometrickém pojetí vektorů se jedná o tvrzení, jež se někdy označuje za *větu o rovnoběžníku* [**15**, s. 161]. Následující úloha **4** je standardní úlohou na ověření, zda zobrazení na dvojrozměrných aritmetických vektorech je, nebo není skalární součin. Analogická úloha byla uvedena jako řešený příklad v hlavním studijním materiálu k této lekci. Navíc je v úloze zaveden nový pojem *ortogonální doplněk* a příslušná část úlohy požaduje jeho stanovení vzhledem k zadanému skalárnímu součinu.

Úlohy **5** a **6** se zaměřují na skalární součin zavedený na prostorech matic typu (m, n) a polynomů stupně nejvýše jedna. V obou úlohách jde o důkaz, že se jedná o skalární součin na daném vektorovém prostoru, a o následnou aplikaci skalárního součinu v konkrétní situaci. Úloha **6** byla zařazena primárně pro studenty, kteří buď ze střední školy nebo prostřednictvím svého samostudia ovládají integrální počet funkcí jedné proměnné.

Nejtěžší a nejvíce bodově hodnocenou úlohou byla úloha **7**, která zobecňuje popis skalárního součinu na aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$. Jedná se vlastně o ověření obecného předpisu pro skalární součin vzhledem k reálným parametrům A, B, C a D. Součástí je i obrácená úloha, tj. nalézt předpis pro skalární součin tak, aby vektory $(1, 2)$ a $(-1, 0)$ tvořily ortonormální bázi. Tento problém byl řešen na analogickém příkladu v hlavním studijním materiálu.

Odevzdávání úloh se v poslední lekci zúčastnili opět pouze dva studenti. První z nich řešil úlohy **4** a **6**. Druhý řešil úlohy **1**, **2**, **4**, část úlohy **5** a úlohu **6**. Úlohy **3** a **7** se v řešení studentů vůbec neobjevily.

7.6.3. Vyhodnocení a reflexe. Z popisu poslední lekce kurzu je zřejmé, že šlo o lekci teoretičtější. Ovšem v této lekci, na rozdíl od lekcí *Matematické struktury* či *Vektorové prostory a podprostory*, jsem k tématu skalárního součinu přistupoval více induktivním způsobem. Hlavní studijní materiál je rozsáhlý, ale dle mého názoru vydařený v tom, že obsahuje postupné zavedení skalárního součinu na prostoru geometrických vektorů, odvození vlastností tohoto skalárního součinu pouze pomocí planimetrických vět a jeho zobecnění na libovolný vektorový prostor (ve smyslu definice skalárního součinu).

Dotazník k poslední lekci obsahoval 6 otázek, mezi kterými se však 4 týkaly celkového zhodnocení kurzu – ty tvoří podklad následující kapitoly *Shrnutí*. Proto je zpětná vazba studentů obsažena pouze ve dvou otázkách.

Znění první z nich má podobu: *Setkali již jste se v průběhu svého středoškolského nebo jiného studia s pojmem skalární součin? Pokud ano, jak vám byl představen?* Z následujících odpovědí je vidět, že poslední lekce se zúčastnili už jen dva studenti „Ano, se skalárním součinem dokonce už i v posledním ročníku ZŠ ve fyzice. Dále v analytické geometrii. Popravdě si jeho představení ze školy nevybavuji. Vím, o co jde, a pracovat s tím na určité úrovni umím.“; „Na gymnáziu ne, ale na soustředění ano (Letní Matematicko-Fyzikální Soustředění 2015). Tam nám jej představili jen stručně jako nástroj používaný ve fyzice, který 2 vektorům přiřadí 1 skalár + uvedli nám vzorce.“

Druhá z položených otázek zněla: *Popište prosím vaše dojmy z poslední prezentace.* „Poslední lekce se mi líbí. Ačkoliv je dost obsáhlá, působí na mě dobrým dojmem. Opět mi dala a dá něco přínosného.“; „Přehledná jako všechny ostatní, ale všechny (a ta poslední není výjimkou) jsem si musel přečíst alespoň 2x, abych tématu porozuměl, občas jsem používal i jiné zdroje (např. server matematika.cz, kde jsem našel články věnované lingebře v poněkud srozumitelnější formě). Jinak mi přišla hodně teoretická, plná definic a důkazů - možná by nebylo špatné přidat víc příkladů do prezentace.“

Z odpovědí je jasné, že k poslední lekci kurzu se dostali pouze dva studenti.

V řešení úlohy **1** mne studentka A upozornila na překlep v zadání trojúhelníkové nerovnosti (chyba v zadání byla opravena, v příloze je již úloha v pořádku). Na druhou stranu tento nechtěný omyl hodnotím pozitivně, neboť tak studentka ukázala, že důkazem chybného tvrzení dospěla k závěru, že zadané tvrzení neplatí a je nutné jej přeformulovat (opravit).

Na samotné lekci se trochu podepisovala skutečnost, že se jedná o lekci poslední a že je do týdne třeba vypracovat a odevzdat úlohy ze všech lekcí kurzu. I přes to, že studenti odevzdávali úlohy vesměs postupně, chyběla jim alespoň jedna lekce z předešlých, jejíž úlohy bylo třeba vyřešit. Proto byl poslední týden trochu hektičtější. Samozřejmě bylo možné prodloužit termín odevzdávání, termín byl stanoven jednak na základě počtu zapsaných účastníků, kterých bylo původně jedenáct, jednak dle harmonogramu T-kurzů, který byl zveřejněn na webových stránkách projektu. Posunutí termínu by však ke studentům, kteří pravidelně posílali svá řešení a uzpůsobili si tak svůj volný čas pro plnění povinností spojených s kurzem, bylo nespravedlivé. Proto jsem byl z pozice lektora důsledný na dodržení předepsaných podmínek.[2]

[2] O to víc mě překvapily hromadné zprávy posílané všem účastníkům Talnet kurzů o prodloužení termínů apod. Jednalo se o zásahy do harmonogramu kurzů bez předchozí domluvy se všemi lektory kurzů.

KAPITOLA 8

Shrnutí

Kurz lineární algebry proběhl jako jednosemestrální online kurz v rámci projektu Talnet od října do prosince 2015. V rámci tohoto projektu byl jednou ze tří alternativ výuky matematiky v podzimním bloku Talnetu. Zároveň měl vcelku výhodnou pozici, aby si zajistil dostatek účastníků, neboť jako jeden z mála kurzů začínal v první vlně spouštění a navíc byl koncipován tak, aby umožňoval zapojení poměrně širokého věkového spektra studentů.

Výše uvedené faktory podle všeho hrály roli v poměrně velkém počtu přihlášených, skutečně se však do kurzu zapojilo podstatně menší množství studentů.

Výslednou podobu kurzu ovlivnily faktory, které jsou blíže rozvedeny v kapitolách *Kurz lineární algebry* a *Organizace a průběh kurzu*, zejména však to byla obsahová stránka kurzu, kdy samotné jeho téma bylo poměrně abstraktní a obtížné, a dále faktory organizačního rázu. V době, kdy již bylo nutné kurz lineární algebry připravovat, ještě stále nebyly vyjasněny některé detaily, nebylo zřejmé, jak probíhá bodování v Talnetu, jaké funkce na platformě Moodle bude možné využít, neměl jsem žádné bližší informace o možnostech komunikace se studenty a o obvyklé míře jejich zapojení do společného řešení problému.

To vedlo k přístupu zaměřeném ve velké míře na obsah, kdy byly hlavní výukové materiály připraveny mimo prostředí Moodle a pojaty jako PDF dokumenty a podobně i další důležité materiály nebyly součástí samotného prostředí. Nicméně se toto pojetí ukázalo jako výhodné z hlediska ovlivňování grafické podoby těchto materiálů, používání matematické symboliky (kde byly obzvláště patrné mezery v systému Moodle) a v neposlední řadě to umožňovalo účastníkům kurzu materiály si stáhnout a případně s nimi dále pracovat i mimo kurz, do nějž již v budoucnosti nebudou moci vstoupit.

V případných dalších ročnících kurzu lineární algebry však stojí za zvážení, zda nezapojit i více aktivit přímo v online prostředí. Jednou z takových možností by mohl být krátký opakovací test před začátkem lekce, který by bylo možné připravit již ve stávajícím prostředí Moodle tak, jak jej využívá Talnet. Otázkou zůstává, zda by nebylo vhodné i nějak odměňovat zapojení studentů ve vzájemné komunikaci, či jim dokonce jako jeden z úkolů nezadat projevy v diskuzním fóru, tento přístup by však mohl snížit míru svobody účastníků kurzu a jeho efekt na kvalitu příspěvků v diskuzním fóru je sporný.

V rámci prostředí Talnet působila kromě mne a účastníků ještě osoba facilitátora, jehož úloha v rámci kurzů byla nominálně pomoci studentům s motivací a prací v jednotlivých kurzech. Strategie, které by k tomuto cíli mohly vést, však byly od počátku nejasné, a ve výsledku tak facilitátor působil zejména jako technická podpora. Důležitou roli sehrál v prvních týdnech výuky, kdy došlo k poruše Moodlu znemožňující přihlášení do kurzu.

Pozitivně hodnotím, že se mi podařilo poměrně úspěšně odhadnout cílovou skupinu kurzu lineární algebry a vytvořit výukové prostředí způsobem, který jim ve většině vyhovoval. Je samozřejmé, že pokud by byl kurz mířen na průřez běžné populace, bylo by nutné zvolit jiné strategie. Akcentování svobody volby, předkládání ne zcela triviálních úloh i snaha najít ekvilibrum mezi obdobou středoškolského matematického přístupu a čistě matematickým textem se však v případě studentů zapojených v projektu vyplatila.

Podmínky absolvování byly na první pohled poměrně mírné (nutnost získat 60 bodů z 230), byly však takto formulovány záměrně, aby bylo možné sledovat nejen, zda účastníci dokáží řešit úlohy, ale také které úlohy ze zadávacích listů si zvolí, což byla svým způsobem zpětná vazba. Mezi účastníky se tak objevila studentka, která se poněkud ambiciózně snažila řešit co největší množství úloh, jiní volili podle svých osobních preferencí nebo momentální situace (časové možnosti, zda je zapotřebí již rychleji sbírat body nutné pro absolvování apod.).

K volbě úloh se v rámci dotazníkového šetření vyjádřili následovně:

Podle čeho si vybíráte úlohy ze zadávacího listu, které budete řešit? Zvolili jste si nějakou cílenou strategii řešení úloh?

„Snažím se vyřešit úlohy, jež mě zaujmou, o jejich bodové ohodnocení mi příliš nejde.“;„Vybírám zatím ty úlohy, které mi přijdou jednodušší. Pak se podívám na ostatní.“; „Většinou volím takové, které se dají vyřešit rychle.“

Účastníci kurzu obvykle jako motivaci k volbě kurzu uváděli zájem o matematiku. Někteří se poněkud kriticky vyjadřovali k nabídce rozvoje matematických znalostí na své škole. Jedna studentka uvedla, že by se prostřednictvím kurzu lineární algebry chtěla naučit českou matematickou terminologii, neboť na její střední škole probíhá výuka ve španělském jazyce. Domnívám se, že očekávání týkající se tohoto cíle kurz lineární algebry nemohl splnit, a studentka v kurzu v průběhu přestala pracovat.

Z pěti lidí, kteří započali s prací v kurzu, nakonec absolvovali pouze dva. Bohužel však moje možnosti zjistit důvod jejich nepokračování v kurzu byly velmi omezené. Komunikaci s nimi zajišťoval facilitátor, který mi později sdělil, že studenti v kurzu nepokračovali, neboť byly jejich časové možnosti omezeny školními a jinými povinnostmi. Bližší informace mi nejsou známy.

Reakce studentů na charakter kurzu byly povětšinou pozitivní. Studentka, která kurz nakonec absolvovala, se vyjádřila v tom smyslu, že ji „překvapilo, jak pěkně je udělaný“ a ocenila i „některé zajímavé úlohy“. Přestože se v rámci projektu Talnet přihlásila do více kurzů, podle odpovědi v dotazníku absolvovala pouze kurz Lineární algebra.

Druhý účastník, který kurz absolvoval, ve své výpovědi uvádí, že preferuje přednášky oproti textu, tedy situace, kdy je „přednášející fyzicky přítomen a mluví“. Tomuto studentovi tedy z možností nabízejících se motivovaným a talentovaným studentům k rozvoji jejich odborných znalostí nejspíše nejvíce vyhovují rozšiřující přednášky pro středoškolské studenty, které pořádají některé univerzity. Tento student také v rámci dotazníkového šetření uvedl, že se takovýchto aktivit v minulosti již účastnil. Je možné, že by tomuto studentovi vyhovovalo lépe, kdyby se v rámci online kurzů vyskytovala i nějaká videa nebo by účastníci sami prostřednictvím videovstupů komunikovali s lektorem.

Celkově se podle mně podařilo odhadnout přibližný profil účastníka kurzu s dostatečnou přesností. Studenti byli poměrně spokojeni s hlavními studijními materiály, některé výtky a bližší informace o přijetí prezentací obsahuje předchozí kapitola.

Drobný nesoulad se projevil u první lekce, kdy se ukázalo, že si studenti nespouštějí prezentaci ve *full screen* režimu a následně dochází k chybnému zobrazení použitých efektů. Na základě tohoto zjištění nebyly tyto efekty postupného zobrazování informací na stránce použity u dalších prezentací, i když jsem to původně považoval za vhodné z hlediska orientace. Je ale možné, že účastníci kurzu chtěli mít otevřené kromě hlavního studijního materiálu i jiné okno (např. pokud si vyhledávali informace i z jiných zdrojů), nebo používali ke spuštění i jiná zařízení než počítač, kde byl režim *full screen* nevýhodný. U předposlední lekce zase považovali názorný postup výkladu za příliš zdlouhavý.

Názory na to, která z lekcí byla nejobtížnější, se v průběhu kurzu měnily. Jedna ze studentek po absolvování tří lekcí označila lekci první, ale zároveň jí přišla „nejzajímavější“, jistá netriviálnost ji tedy spíše motivovala, než odradila od pokračování v kurzu. Po skončení všech lekcí pak tatáž studentka považovala za nejsložitější část celého kurzu důkazové úlohy ve třetí lekci. Další absolvent pak označil první lekci za „šok, protože tak abstraktní matematiku nikdy předtím nebral“. Nejsnazší byla pro oba absolventy lekce pátá, neboť obsahovala jim již poměrně dobře známé informace.

Ti účastníci, kteří kurz nakonec absolvovali, se projevovali poměrně vysokou mírou samostatnosti. Neváhali využít i jiných zdrojů, aby si případně doplnili informace či svou představu více zpřesnili, oba také poměrně rychle začali s řešením úloh ze zadávacích listů a zasílali je již v průběhu prvních tří lekcí. Pokud jsem měl k jejich řešení nějaké připomínky, nebylo úplné či správné, často stačilo pouze naznačit a studenti byli schopni úkol vypracovat lépe.

V rámci kurzu příliš nefungovalo diskuzní fórum, jehož potenciál tak zůstal spíše nevyužit. Možné důvody, proč tomu tak bylo, uvádím v kapitole *Organizace a průběh* *kurzu.* Stejně jako u všech závěrů uvedených v kapitolách experimentální části této diplomové práce se však jedná spíše o domněnky vytvořené na základě velmi malého množství informací.

Dotazníkového šetření, které bylo nedílnou součástí kurzu lineární algebry, se totiž zúčastnilo jen velmi malé množství respondentů. To se vzhledem k obvyklému množství účastníků kurzu Talnet dalo očekávat a dotazníky se snažily dopad této skutečnosti zmírnit zaměřením na kvalitativní přístup a pokládání otevřených otázek. Výsledný dojem však musí být nutně zkreslen faktem, že v konečné fázi průběhu kurzu již na otázky odpovídali pouze dva účastníci a že v rámci projektu Talnet zcela nebo téměř zcela chybí odezva od těch, kdo v práci ustali. Aby bylo možné zcela přesně stanovit pozitivní či negativní dopady kurzu lineární algebry, bylo by nutné kurz opakovat v dalších letech a pokusit se získat i názor těch, které kurz dostatečně nezaujal.

Kurz jako celek se nicméně ukázal jako funkční, kdy příklady plnily předpokládanou roli indikátorů porozumění jednotlivým lekcím. V rámci Moodlu se podařilo vytvořit přehledné prostředí, v němž se kurz odehrával, s jednoduchým členěním a uměřenou grafikou, kterou většina účastníků ocenila.

Velmi příjemným překvapením pak bylo nasazení obou absolventů kurzu. Za obdivuhodný považuji přístup absolvující studentky, která se snažila řešit drtivou většinu úloh obsažených v zadávacích listech. Tato účastnice kurzu podle svých výpovědí uvedených v dotazníkovém šetření zvolila ne zcela šťastně střední školu, která jí nabízí jen omezené možnosti rozvoje jejího matematického zájmu. Ve svém volném čase si však podle všech známek doplňuje znalosti takovým způsobem, který má potenciál jí zajistit matematickou úroveň podstatně vyšší, než má např. průměrný absolvent gymnázia.

U druhého absolventa jsem měl subjektivně pocit, že se jedná o člověka, jehož zájem tíhne spíše k technice a matematické aplikaci. Aby však mohl tento svůj cíl uskutečnit, uznává tento student důležitost i teoretičtějších matematických znalostí, které si i pomocí kurzů Talnet snaží rozšířit. O to více je třeba ocenit jeho nasazení, ačkoli byl podle jeho vlastních slov kurz více abstraktní, než mu bylo zcela příjemné a pohodlné.

Obecně má kurz **Matematika IV** - Lineární algebra potenciál úspěšného pokračování i v dalších letech pouze s malými úpravami.

Závěr

Diplomová práce si na svém počátku stanovila několik cílů, kterých chtěla dosáhnout. Poslední odstavce této práce budou věnovány jejich zhodnocení.

Text je rozdělen na část teoretickou a experimentální. Primárním úkolem teoretické části bylo v učebním obsahu středních škol (se zaměřením na gymnázia) nalézt taková témata lineární algebry, která bychom mohli volně označit jako hypotetické „mosty“ mezi středoškolskou matematikou a lineární algebrou jako vysokoškolským předmětem. Tento úkol byl splněn v první kapitole práce a podrobněji rozveden v kapitole druhé.

Důvod, proč se touto problematikou zabývat, lze opřít o následující výstižný úryvek.

> Matematické disciplíny se na vysoké škole tradičně podávají způsobem „definice, tvrzení, důkaz, příklad“ a učitel často vyzývá studenty, aby zapomněli vše, co se učili na střední škole, protože to je „špatně“.
> [**56**, s. 9]

Snaha diplomové práce je proto navrhnout způsob, jakým by mohla směřovat výuka tématu lineární algebry například v rozšiřujících seminářích z matematiky na gymnáziích nebo v mimoškolních zařízeních s ohledem na to, jak poté probíhá výuka lineární algebry na vysokých školách. Tedy tak, aby představy, které si žáci v průběhu tohoto vzdělávání vytvářejí, našly uplatnění i později. V souvislosti s tím bylo poukázáno na různé problémy (např. terminologické), kdy se za stejnými pojmy skrývají různé koncepce.

Závěrem první kapitoly je skutečnost, že v obsahu gymnaziální matematiky je velké množství témat, která blíže či vzdáleněji souvisejí s lineární algebrou. S ohledem na hierarchii lineární algebry jako matematické disciplíny, kdy některé pojmy předcházejí jiné, ze všech těchto témat vyvstávají tři, jimiž jsou *vektory a vektorové prostory, skalární součin* a *soustavy lineárních rovnic a matice.*

Druhá kapitola této diplomové práce se pokusila vyjádřit, kterým aspektům středoškolské výuky těchto témat je třeba věnovat zvláštní pozornost (a to na základě rozboru přístupů k výuce daných témat uplatňovaných v učebnicích pro gymnázia a střední odborné školy), aby bylo tyto středoškolské znalosti možné využít jako nosné pro budování vysokoškolského pojetí lineární algebry.

Pro potřeby experimentální části byla do části teoretické zařazena také kapitola, která s výukou lineární algebry přímo nesouvisí, nazvaná *Specifika online vzdělávání.* Bylo třeba teoreticky reflektovat skutečnost, že didaktický experiment, který lze ve stručnosti formulovat jako návrh, příprava a provedení online vzdělávacího kurzu, se nebude odehrávat v prostředí běžné třídy, ale skrze internet. Je třeba si připustit, že výuka v online prostředí má své zvláštnosti, a proto se uvedená kapitola věnuje mimo jiné také pedagogicko-psychologickým aspektům, které je třeba brát v úvahu při návrhu a realizaci takového projektu.

Cílem experimentální části bylo navrhnout, realizovat a vyhodnotit online vzdělávací kurz lineární algebry pro žáky středních škol v rámci projektu Talnet. Tento kurz se uskutečnil na podzim roku 2015.

Experimentální část byla primárně zhodnocena a shrnuta v kapitole *Shrnutí*, podrobněji se kapitola *Popis a vyhodnocení dílčích výukových lekcí* vyjadřuje k jednotlivým lekcím. Na tomto místě je ještě vhodné se vyjádřit k tomu, že ne všechny závěry teoretické části týkající se možných cest budování lineární algebry na základě středoškolského obsahu mohly být plnohodnotně využity. Je to proto, že účastníci online kurzu byli v době jeho plánování neznámí včetně toho, o jaké jejich středoškolské znalosti by bylo možné se opřít.

Na vzdělávací kurz, který byl předmětem experimentální části, byly kladeny dva konkurenční nároky. Na jednu stranu bylo nutné vytvořit takový vzdělávací obsah, který by studenty bavil a v němž by spatřovali smysl. Na rozdíl od didaktických experimentů prováděných fyzicky ve třídě se tento odlišoval primárně tím, že musel cílit na vnitřní motivaci účastníků v kurzu setrvat a ideálně jej absolvovat. Na druhé straně stála potřeba kvalitního výstupu, který je nutný podložit množstvím dat.

To vedlo ke stanovení cílů kurzu lineární algebry a hlavních myšlenek o podobě kurzu, které byly v obecnější rovině formulovány v kapitole *Kurz lineární algebry* a v konkrétnějším pojetí se zaměřením i na technické zajištění kurzu v kapitole *Organizace a průběh kurzu*. V rámci těchto kapitol bylo nalezeno optimální nastavení kurzu, které respektovalo oba dva zmíněné nároky.

Na závěr nám zbývá vyjádřit se ke splnění čtvrtého cíle formulovaného v úvodu této práce, tedy zda je možné zapojit do současného středoškolského studia prvky lineární algebry. Na základě uskutečněného online kurzu lze tvrdit, že motivovaní žáci se zájmem o matematiku jsou schopni tuto matematickou disciplínu úspěšně studovat.

Složitější otázkou je míra zapojení lineární algebry v běžné výuce matematiky, jíž se zúčastňují i ti, kteří o matematiku bližší zájem mít nemusí. Za vhodné řešení by proto bylo možné považovat rozšiřující matematické semináře, v nichž by mohla probíhat výuka stavějící lineární algebru na základě středoškolských znalostí. V běžné výuce lze také způsob výkladu některých pojmů modifikovat tak, aby jejich pochopení nebylo na překážku v průběhu dalšího studia lineární algebry na vysoké škole.

Celá problematika, kterou se diplomová práce zabývá, je značně rozsáhlá. To samozřejmě v důsledku ovlivňuje i rozsah samotné práce. Důležitou součástí jsou potom přílohy, ve kterých čtenář nalezne konkrétní materiály použité v průběhu kurzu. Je zde třeba vyzdvihnout vlastní přínos autora, který se neprojevuje pouze v originálním návrhu kurzu včetně vytvoření všech jeho materiálů, ale i v teoretické části práce.

Závěrem lze tedy konstatovat, že vytyčené cíle byly v práci splněny. Připravený kurz lineární algebry má navíc potenciál pro znovuotevření v dalších ročnících projektu Talnet a není proto vyloučeno, že v budoucnu může být na základě opakovaných vyhodnocení dále modifikován nebo rozšiřován.

Seznam příloh

Níže je uveden seznam příloh, které jsou uloženy na přiloženém CD. Jedná se většinou o dokumenty ve formátu PDF. Seznam příloh respektuje kořenovou strukturu adresářů na datovém nosiči. Každý soubor je zde opatřen charakterizujícím popiskem, konkrétním názvem souboru, jeho velikostí a v případě, že jde o textový dokument nebo prezentaci, také počtem stran resp. počtem snímků.

- **Organizace kurzu**
  - **Jak se studuje v kurzu Lineární algebra**
    (`StudiumLA.pdf`, 76 kB)
    Dokument určený pro studenty kurzu, který je seznamuje s průběhem kurzu a formálními požadavky na absolvování. [2 strany]
- **Hlavní studijní materiály**
  - **Matematické struktury**
    (`Lekce1_MatematickeStruktury.pdf`, 722 kB)
    Prezentace k 1. lekci, zobrazení, binární algebraické operace, algebraické struktury, grupa a těleso. [82 snímků]
  - **Vektorové prostory a podprostory**
    (`Lekce2_VektoroveProstory.pdf`, 645 kB)
    Prezentace ke 2. lekci, vektorový prostor a podprostor, modely vektorových prostorů. [29 snímků]
  - **Báze a dimenze vektorových prostorů**
    (`Lekce3_BazeaDimenze.pdf`, 360 kB)
    Prezentace ke 3. lekci, lineární kombinace, lineární obal, množina generátorů, lineární závislost a nezávislost, báze, dimenze, souřadnice. [24 snímků]
  - **Matice**
    (`Lekce4_Matice.pdf`, 412 kB)
    Prezentace ke 4. lekci, matice, operace s maticemi a jejich vlastnosti, aplikace maticového počtu. [36 snímků]
  - **Soustavy lineárních rovnic**
    (`Lekce5_SoustavyRovnic.pdf`, 5 MB)
    Prezentace k 5. lekci, soustavy lineárních rovnic, Gaussova eliminace. [37 snímků]
  - **Unitární prostory**
    (`Lekce6_UnitarniProstory.pdf`, 519 kB)
    Prezentace k 6. lekci, skalární součin, unitární prostor, geometrie definovaná skalárním součinem. [29 snímků]
- **K samostatnému řešení**
  - **Matematické struktury**
    (`MatematickeStruktury.pdf`, 81 kB)

Soubor úloh k 1. lekci, který obsahuje celkem 10 úloh s celkovým bodovým ohodnocením 40 bodů. [2 strany]

- **Vektorové prostory a podprostory**
  (`VektoroveProstory.pdf`, 88 kB)
  Soubor úloh ke 2. lekci, který obsahuje celkem 8 úloh s celkovým bodovým ohodnocením 40 bodů. [2 strany]
- **Báze a dimenze vektorových prostorů**
  (`BazeaDimenze.pdf`, 103 kB)
  Soubor úloh ke 3. lekci, který obsahuje celkem 13 úloh s celkovým bodovým ohodnocením 45 bodů. [2 strany]
- **Matice**
  (`Matice.pdf`, 100 kB)
  Soubor úloh ke 4. lekci, který obsahuje celkem 8 úloh s celkovým bodovým ohodnocením 45 bodů. [2 strany]
- **Soustavy lineárních rovnic**
  (`SoustavyRovnic.pdf`, 57 kB)
  Soubor úloh k 5. lekci, který obsahuje celkem 4 úlohy s celkovým bodovým ohodnocením 20 bodů. [1 strana]
- **Unitární prostory**
  (`UnitarniProstory.pdf`, 101 kB)
  Soubor úloh k 6. lekci, který obsahuje celkem 7 úloh s celkovým bodovým ohodnocením 40 bodů. [2 strany]

- **Řešení studentů**
  - **Matematické struktury**
    (`Reseni_MatematickeStruktury.pdf`, 1 MB)
    Soubor obsahuje nashromážděná řešení úloh, která studenti vypracovali k 1. lekci kurzu. [10 stran]
  - **Vektorové prostory a podprostory**
    (`Reseni_VektoroveProstory.pdf`, 1 MB)
    Soubor obsahuje nashromážděná řešení úloh, která studenti vypracovali ke 2. lekci kurzu. [8 stran]
  - **Báze a dimenze vektorových prostorů**
    (`Reseni_BazeaDimenze.pdf`, 1 MB)
    Soubor obsahuje nashromážděná řešení úloh, která studenti vypracovali ke 3. lekci kurzu. [10 stran]
  - **Matice**
    (`Reseni_Matice.pdf`, 2 MB)
    Soubor obsahuje nashromážděná řešení úloh, která studenti vypracovali ke 4. lekci kurzu. [9 stran]
  - **Soustavy lineárních rovnic**
    (`Reseni_SoustavyRovnic.pdf`, 931 kB)
    Soubor obsahuje nashromážděná řešení úloh, která studenti vypracovali k 5. lekci kurzu. [5 stran]
  - **Unitární prostory**
    (`Reseni_UnitarniProstory.pdf`, 834 kB)

Soubor obsahuje nashromážděná řešení úloh, která studenti vypracovali k 6. lekci kurzu. [7 stran]

- **Dotazníkové šetření**
  - **Výsledky dotazníkového šetření**
    (`Dotazniky.pdf`, 76 kB)
    Soubor obsahující všechny výpovědi studentů kurzu na otázky dotazníkového šetření. Jednotlivé dotazníky ze všech lekcí obsahují 41 otázek. [10 stran]
- **Prostředí kurzu**
  - **Obrázek 1** (`Obrazek_1.png`, 161 kB)
    Na snímku je zachyceno hlavní prostředí kurzu z pozice studenta. Úvodní slovo obsahovalo nejen představení lektora kurzu, ale také základní zdroj informací potřebných pro rychlou orientaci ve výukovém prostředí.
  - **Obrázek 2** (`Obrazek_2.png`, 142 kB)
    Část s obecnými informacemi ke kurzu. Kromě v příloze uvedeného souboru *Jak se studuje v kurzu Lineární algebra* byly rovněž studentům poskytnuty informace o nastavení profilu či nápověda pro základní ovládání online prostředí nebo tabulka možných bodových zisků z jednotlivých lekcí.
  - **Obrázek 3** (`Obrazek_3.png`, 82 kB)
    Vzhled aktuální lekce. Na pravém okraji jsou automaticky zaškrtávací políčka, jde o přehled plnění aktivit, který dává studentovi přehled o již splněných úkolech či otevřených dokumentech. Lektor má díky tomu možnost sledovat průběžnou aktivitu studentů.
  - **Obrázek 4** (`Obrazek_4.png`, 76 kB)
    Vzhled lekce, která již proběhla a v daném okamžiku kurzu není aktuální. Jednotlivé lekce se v prostředí Moodle seřazují pod sebe od první lekce (nahoře) po šestou lekci (dole).
  - **Obrázek 5** (`Obrazek_5.png`, 55 kB)
    Na konec online prostředí je zařazena sekce *Diskuzní fórum*, která je rozčleněna na sekce týkající se jednotlivých lekcí nebo obecné diskuze.
  - **Obrázek 6** (`Obrazek_6.png`, 68 kB)
    Ukázka vzhledu dotazníku v prostředí Moodle. Dotazníky byly vytvářeny pomocí stejnojmenného nástroje, který umožňuje editaci otázek a jejich vyhodnocení.
  - **Obrázek 7** (`Obrazek_7.png`, 70 kB)
    Komunikace mezi studentem a lektorem nad odevzdaným úkolem je v prostředí méně přehledná. Matematický text, který byl pokaždé součástí této zpětné vazby, se zobrazil až po odeslání odpovědi studentovi.
  - **Obrázek 8** (`Obrazek_8.png`, 86 kB)
    Tabulka umožňující lektorovi sledovat plnění povinných úkolů nutných k absolvování kurzu. Navíc jsem nastavil nutnost schválení absolvování učitelem. Podobně se zobrazovalo plnění všech aktivit studentů v průběhu kurzu.

Literatura

[1] ALLY, MOHAMED. *Foundations of Educational Theory for Online Learning* In: ANDERSON, Terry a Fathi ELLOUMI. Theory and Practice of Online Learning. [online]. Athabasca: Athabasca University, 2004, s. 29. ISBN 0-919737-59-5. [cit. 2016-05-09].
Dostupné z: `http://cde.athabascau.ca/online_book/pdf/TPOL_book.pdf`

[2] BEČVÁŘ, JINDŘICH. *Lineární algebra.* Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2005, 435 s. ISBN 80-86732-57-6.

[3] BICAN, LADISLAV. *Lineární algebra a geometrie.* Vyd. 2. Praha: Academia, 2009, 303 s. ISBN 978-80-200-1707-9.

[4] BLAŽEK, JAROSLAV, MILAN KOMAN A BLANKA KUSSOVÁ. *Algebra a teoretická aritmetika.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983, 96 s.

[5] BUDINSKÝ, BRUNO. *Analytická a diferenciální geometrie.* 2., uprav. vyd. Praha: SNTL–Nakladatelství technické literatury , 1983, 296 s. Matematika pro vysoké školy technické.

[6] BUŠEK, IVAN A EMIL CALDA. *Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 195 s. ISBN 978-80-7196-366-0.

[7] CALDA, EMIL A VÁCLAV DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 170 s. ISBN 978-80-7196-365-3.

[8] CALDA, EMIL. *Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 134 s. ISBN 978-80-7196-364-6.

[9] CALDA, EMIL. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 1. díl.* Praha: Prometheus, 1996, 215 s. ISBN 978-80-7196-020-1.

[10] CALDA, EMIL. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 4. díl.* Praha: Prometheus, 1999, 208 s. ISBN 978-80-7196-139-0.

[11] CDL OF THE UNIVERSITY OF CENTRAL FLORIDA. *Advance Organizer.* Teaching Online: Pedagogical Repository [online]. [cit. 2016-06-09].
Dostupné z: `https://topr.online.ucf.edu/index.php/Advance_Organizer`

[12] DEMLOVÁ, MARIA A JOZEF NAGY. *Algebra.* Matematika pro vysoké školy technické, sešit III. 1. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1982, 187 s.

[13] DILLENBOURGH, P., BAKER M., BLAYE A. A C. O'MALLEY. *The evolution of research on collaborative learning* In: SPADA, E. a P. REIMAN. Learning in Humans and Machine: Towards an interdisciplinary learning science. [online].
Oxford: Elsevier, 1996, s. 27. [cit. 2016-05-09].
Dostupné z: `http://tecfa.unige.ch/tecfa/publicat/dil-papers-2/Dil.7.1.10.pdf`

[14] ERTMER, PEGGY A. A TIMOTHY J. NEWBY. *Behaviorism, Cognitivism, Constructivism: Comparing Critical Features From an Instructional Design Perspective* [online]. Performance Improvement Quarterly. 2013, 26(2). [cit. 2016-06-09]
Dostupné z: `http://ocw.metu.edu.tr/pluginfile.php/3298/course/section/1174/peggy_2013_comparing_critical_features.pdf`

[15] FIRLOVÁ, Renata a Jiří ŠIMON. *Cvičení z algebry I (Lineární algebra).* 1. vyd. Ostrava: Pedagogická fakulta v Ostravě, 1988, 168 s.

[16] HORSKÝ, Zdeněk. *Vektorové prostory.* Matematika pro vysoké školy technické, sešit II. 1. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1970, 88 s.

[17] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrální počet.* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 210 s. ISBN 978-80-7196-363-9.

[18] CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 223 s. ISBN 978-80-7196-362-2.

[19] KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie.* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 220 s. ISBN 978-80-7196-163-5.

[20] KOLB, David. *Experiential Learning: Experience as The Source of Learning and Development* [online]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.
Dostupné z: `http://academic.regis.edu/ed205/kolb.pdf`

[21] KOLOUCHOVÁ, Jana, Jana ŘEPOVÁ a Václav ŠOBR. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 5. část.* Praha: SPN, 1986, 172 s.

[22] LEPIL, Oldřich, Milan BEDNAŘÍK a Radmila HÝBLOVÁ. *Fyzika pro střední školy.* 4., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2006, 266 s. ISBN 80-7196-184-1.

[23] LYNCH, Richard a Myron DEMBO. *The Relationship Between Self-Regulation and Online Learning in a Blended Learning Context* [online]. 2004. [cit. 2016-05-09].
Dostupné z: `http://www.irrodl.org/index.php/irrodl/article/viewArticle/189/271`

[24] MAC LANE, Saunders a Garrett BIRKHOFF. *Algebra.* 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1974, 662 s.

[25] MAREŠ, Jiří. *Pedagogická psychologie.* Praha: Portál, 2013. ISBN 978-80-262-0174-8.

[26] MAREŠ, J. a M. OUHRABKA. *Žákovo pojetí učiva* Pedagogika: Časopis pro vědy o vzdělávání a výchově [online]. 1992, 1992(1). [cit. 2016-06-09].
Dostupné z: `http://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=3566&lang=cs`

[27] MEANS, Barbara, TOYAMA Yukie, MURPHY Robert, BAKIA Marianne a Karla JONES. *Evaluation of Evidence Based Practices in Online Learning: A Meta-Analysis and Review of Online Learning Studies* [online]. Washington, D. C.: U. S. Department of Education, 2009, s. 93. [cit. 2016-05-09]. Dostupné z: `http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED505824.pdf`

[28] MEDEK, Václav a Alica SIVOŠOVÁ. *Matematika pro gymnázia, sešit 5.*
Praha: SPN, 1979, 179 s.

[29] MEYEN, Edward L., Ron AUST, John M. GAUCH, H. Scott HINTON, Robert E. ISAACSON, Sean J. SMITH a Meng Yew TEE. *E-Learning: A Programmatic Research Construct for the Future* [online]. Journal of Special Education Technology. 2002, 17(3) s. 10. [cit. 2016-06-09]. Dostupné z: `http://www.academia.edu/8908787/`

[30] MORAVEC, Luboš *Webová aplikace pro výuku matematické logiky na střední škole* [online]. [cit. 2015-10-16].
Dostupné z: `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//diplomky/moravecdp/index.php`

[31] MOTL, Luboš a Miloš ZAHRADNÍK. *Pěstujeme lineární algebru.* 3.vyd. Praha: Karolinum, 2002, 348 s. ISBN 80-246-0421-3.

[32] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Funkce.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 168 s. ISBN 978-80-7196-357-8.

[33] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Goniometrie.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 139 s. ISBN 978-80-7196-359-2.

[34] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Posloupnosti a řady.* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 126 s. ISBN 978-80-7196-391-2.

[35] ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 2. část.* Praha: SPN, 1984, 142 s.

[36] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 659 s. ISBN 978-80-7196-356-1.

[37] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie.* 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 206 s. ISBN 978-80-7196-358-5.

[38] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Stereometrie.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 223 s. ISBN 978-80-7196-178-9.

[39] PONDĚLÍČEK, Bedřich. *Algebraické struktury s binárními operacemi.* Praha: SNTL, 1977, 255 s. Matematický seminář SNTL.

[40] PROCHÁZKA, Ladislav, Ladislav BICAN, Tomáš KEPKA a Petr NĚMEC. *Algebra.* 1. vyd. Praha: Academia, 1990, 560 s. ISBN 80-200-301-0.

[41] *Projekt Talnet* [online]. 2015 [cit. 2016-05-20]. Dostupné z: `http://www.goah.cz/souteze/soubory/Talnet_kurzy_2015-16.pdf`

[42] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007, 100 s. ISBN 978-80-87000-11-3.

[43] ŘEPÍK, Michal *Používáme sumační znak I* [online]. [cit. 2015-06-07]. Dostupné z: `http://www.michalrepik.cz/matematika/pouzivame-sumacni-znak.html`

[44] ŘEPÍK, Michal *Používáme sumační znak II* [online]. [cit. 2015-06-07]. Dostupné z: `http://www.michalrepik.cz/matematika/pouzivame-sumacni-znak2.html`

[45] STRANG, Gilbert. *Introduction to Linear Algebra.* 4.vyd. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 2009, 574 s. ISBN 978-0-980232-71-4.

[46] SVOBODA, Emanuel. *Přehled středoškolské fyziky.* 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2006, 531 s. ISBN 80-7196-307-3.

[47] ŠEDIVÝ, Jaroslav a Václav MEDEK. *Matematika pro gymnázia, sešit 8.* 2. vyd. Praha: SPN, 1980, 243 s.

[48] TALNET: Online k přírodním vědám. *Matematika 0 – Talnet* [online]. 2011 [cit. 2016-05-17]. Dostupné z: `http://www.talnet.cz/matematika-0`

[49] TALNET: Online k přírodním vědám. *Matematika I – Talnet* [online]. 2011 [cit. 2016-05-17]. Dostupné z: `http://www.talnet.cz/matematika-i`

[50] TALNET: Online k přírodním vědám. *Matematika II – Talnet* [online]. 2011 [cit. 2016-05-17]. Dostupné z: `http://www.talnet.cz/matematika-ii`

[51] TALNET: Online k přírodním vědám. *Matematika III – Talnet* [online]. 2011 [cit. 2016-05-17]. Dostupné z: `http://www.talnet.cz/matematika-iii`

[52] TALNET: Online k přírodním vědám. *O nadání - Talnet* [online]. 2011 [cit. 2016-05-17]. Dostupné z: `http://www.talnet.cz/o-nadani`

[53] TALNET: Online k přírodním vědám. *Soustředění – Talnet* [online]. 2011 [cit. 2016-05-17]. Dostupné z: `http://www.talnet.cz/soustredeni`

[54] TALNET: Online k přírodním vědám. *T-kurzy – Talnet* [online]. 2011 [cit. 2016-05-17]. Dostupné z: `http://www.talnet.cz/t-kurzy`

[55] URGOŠÍK, Bohuš. *Fyzika.* 2., uprav. vyd. Praha: SNTL–polytechnická knižnice, 1987, 296 s.

[56] VONDROVÁ, Naďa, Milan HEJNÝ a Darina JIROTKOVÁ. *Úvod do studia analytické geometrie.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2005. 146 s. ISBN 80-7290-188-5.

[57] *Výroční zpráva NIDV 2014* [online]. Národní institut pro další vzdělávání, 2015 [cit. 2016-05-20]. Dostupné z: `http://www.nidv.cz/cs/download/vyrocni_zpravy/vyrocni_zprava_NIDV_2014.pdf`

[58] VYŠÍN, Jan. *Základy vektorové algebry.* 1.vyd. Praha: SPN Matematická knižnice, 1966, 180 s. Edice Odborná literatura pro učitele.

[59] ZIMMERMAN, Barry. *Self-Regulated Learning and Academic Achievement: An Overview* Educational Psychologist. 1990, 25(1).
Dostupné z: `http://itari.in/categories/ability_to_learn/self_regulated_learnin_g_and_academic_achievement_m.pdf`

[60] ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov.* 1. vyd. Bratislava: Marenčin PT, c2011, 741 s. ISBN 978-80-8114-111-9.