



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Tereza Baumová

# **Použití metody bootstrap v časových řadách**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika  
a ekonometrie

Praha 2018



Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora



Název práce: Použití metody bootstrap v časových řadách

Autor: Tereza Baumová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se věnuje studiu variant metody bootstrap vhodných pro vyšetřování vlastností autoregresních procesů s náhodnými koeficienty. Čtenář je nejprve seznámen s původní metodou bootstrap navrženou pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny a se základními variantami této metody běžně používanými pro analýzu časových řad. Poté je představen autoregresní proces s náhodnými koeficienty řádu  $p$  ( $RCA(p)$ ). Jsou popsány základní vlastnosti tohoto procesu a blíže prozkoumány vlastnosti procesu  $RCA(1)$ . V další části jsou uvedeny varianty metody bootstrap, které jsou v případě procesu  $RCA(1)$  konzistentní, a pro metodu wild bootstrap je odvozena konzistence pro proces  $RCA(2)$ . V poslední kapitole jsou na simulovaných datech ověřeny vlastnosti popsaných metod.

Klíčová slova: wild bootstrap, reziduální bootstrap,  $RCA(1)$ ,  $RCA(p)$

Title: Applications of Bootstrap Methods to Time Series

Author: Tereza Baumová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis focuses on bootstrap methods suitable for inference on random coefficient autoregressive processes. First, we introduce the original method devised for independent identically distributed random variables and its basic variants used in the field of time series analysis. Then we define a random coefficient autoregressive process of order  $p$  ( $RCA(p)$ ). We describe some basic properties of the  $RCA(p)$  process and then focus on properties of the  $RCA(1)$  process. In the next section, we list the bootstrap methods consistent if used on the  $RCA(1)$  process and we prove consistency of wild bootstrap in case of the  $RCA(2)$  process. In the last chapter we examine properties of the previously described methods on simulated data.

Keywords: wild bootstrap, residual bootstrap,  $RCA(1)$ ,  $RCA(p)$



Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucí práce, doc. RNDr. Zuzaně Práškové, CSc. za trpělivost, cenné připomínky a za čas, který věnovala konzultacím a čtení této práce. Poděkování dále patří mému zaměstnavateli za vstřícnost a Ondřeji Moravčíkovi za podporu.





# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Metoda bootstrap</b>	<b>5</b>
1.1 Bootstrap pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny . . . . .	5
1.1.1 Konzistence metody bootstrap . . . . .	7
1.2 Bootstrap pro závislá data . . . . .	9
1.2.1 Blokový bootstrap . . . . .	9
1.2.2 Parametrický reziduální bootstrap . . . . .	11
1.2.3 Neparametrický reziduální bootstrap . . . . .	13
1.2.4 Regresní bootstrap . . . . .	14
1.2.5 Wild bootstrap . . . . .	15
1.2.6 Párový bootstrap . . . . .	17
1.2.7 Další metody . . . . .	18
<b>2 Autoregresní procesy s náhodnými koeficienty</b>	<b>21</b>
2.1 Proces RCA(p) . . . . .	21
2.1.1 Stacionarita procesu RCA(p) . . . . .	22
2.1.2 Odhad autoregresního parametru procesu RCA(p) . . . . .	23
2.2 Proces RCA(1) . . . . .	25
2.2.1 Stacionarita . . . . .	25
2.2.2 Odhad parametru $\beta$ procesu RCA(1) . . . . .	26
2.3 Použití metody bootstrap u procesu RCA(1) . . . . .	31
2.3.1 Reziduální bootstrap . . . . .	31
2.3.2 Modifikace reziduálního bootstrapu . . . . .	37
2.3.3 Wild bootstrap u procesu RCA(1) . . . . .	39
2.4 Použití metody wild bootstrap na proces RCA(2) . . . . .	42
2.4.1 Stacionarita procesu RCA(2) . . . . .	43
2.4.2 Vlastnosti $\hat{\beta}_n$ . . . . .	44
2.4.3 Použití metody wild bootstrap pro proces RCA(2) . . . . .	47
<b>3 Simulace</b>	<b>59</b>
3.1 Proces RCA(1) . . . . .	60
3.1.1 Reziduální a momentové metody . . . . .	60
3.1.2 Porovnání wild bootstrapu a reziduálního KF bootstrapu . . . . .	66
3.2 Proces RCA(2) . . . . .	69
3.2.1 Implementace . . . . .	72
<b>Závěr</b>	<b>85</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>97</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>99</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>105</b>

<b>A. Přílohy</b>	<b>107</b>
A.1 Tabulky . . . . .	107
A.2 Grafy . . . . .	119

# Úvod

Při analýze časových řad je naším cílem obvykle co nejlepší odhad nějaké charakteristiky mechanismu, na základě kterého data postupně vznikala, ať už nás zajímá bodový či intervalový odhad parametru ovlivňujícího rozdělení náhodného procesu, předpověď jedné či více budoucích realizací tohoto procesu nebo testování hypotéz o vlastnostech dané řady. Například pro získání bodového odhadu parametru máme k dispozici mnoho metod (maximálně věrohodné odhady, jádrové odhady, odhady metodou nejmenších čtverců a další). Většinou nás však nezajímá jen konkrétní hodnota odhadu, ale i jeho kvalita, kterou lze posuzovat podle směrodatné odchylky odhadu, střední čtvercové chyby nebo dalších veličin navržených k tomuto účelu. Rozdělení náhodných veličin tvořících časovou řadu však zpravidla neznáme a snažíme se tedy vlastnosti zvolené charakteristiky aproximovat s využitím centrálních limitních vět. Bohužel výsledek je do značné míry ovlivněn počtem pozorování, která máme k dispozici. Chceme-li eliminovat negativní vliv malého rozsahu dat, nabízí se nám metoda bootstrap, kterou představil v roce 1979 americký statistik Bradley Efron ve svém článku Efron (1979). Jde o postup kombinující metodu *Monte Carlo* a tzv. *plug-in* přístup. Na základě principu *Monte Carlo* se v metodě bootstrap opakovaně generují nové sady dat z původního vzorku a aplikováním *plug-in* přístupu se tyto nové hodnoty, nebo již z nich spočtená hodnota konkrétní statistiky, použijí místo původních dat v dalších výpočtech.

Metoda bootstrap byla ve své prvotní podobě navržena pro posloupnosti stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin. Článek vzbudil mezi statistiky veliký zájem a protože nezávislost jednotlivých pozorování nelze v mnoha případech, zejména v oblasti finančních časových řad, očekávat, byla metoda brzy úspěšně rozšířena i na různé případy, kdy náhodné veličiny nejsou nezávislé nebo stejně rozdělené. Vzniklo tak mnoho variant metody bootstrap použitelných v různých simulacích od časových řad, kde sice předpokládáme závislost nebo heteroskedasticitu, ale nechceme se příliš omezovat předpoklady ohledně struktury této řady, až po procesy, u kterých naopak očekáváme, že se řídí konkrétním modelem, a chceme pouze odhadovat parametry tohoto modelu.

Úspěšnost použití bootstrapu závisí právě na volbě vhodné metody pro danou časovou řadu a pro statistiku, kterou odhadujeme a jejíž vlastnosti chceme zkoumat. Jelikož metoda spočívá v opakovaném replikování původního vzorku a následné aproximaci asymptotického rozdělení dané statistiky rozdělením jejího bootstrapového ekvivalentu, je potřeba, aby naše bootstrapová metoda věrně napodobovala závislostní strukturu původního náhodného procesu. Naštěstí asymptotické rozdělení dané statistiky často nezávisí na všech aspektech mnohdy značně komplikované závislostní struktury původního náhodného procesu. V mnoha případech nám stačí pro korektní aproximaci napodobit například jen střední hodnotu procesu a jeho autokovarianční funkci.

Uvedme některé z důvodů pro použití metody bootstrap při analýze časových řad:

- rozdělení procesu generujícího data sice známe, ale přesné rozdělení dané statistiky přesto nelze stanovit,
- asymptotické rozdělení dané statistiky existuje, ale neznáme jeho přesnou podobu,
- počet pozorování, která máme k dispozici, není pro asymptotické odhady dostačující (a i v případě dostatečně velkého vzorku bootstrap často poskytuje lepší výsledky, než limitní věty),
- bootstrap lze využít ke korekci vychýlení odhadů.

Metoda bootstrap je i dnes v popředí zájmu statistiků a možnosti jejího použití v různých úlohách, nejen pro časové řady, se neustále rozšiřují. V této práci se budeme zabývat několika metodami, které lze použít k posuzování charakteristik odhadů u autoregresních procesů s náhodnými koeficienty, které budeme značit zkratkou  $RCA(p)$  z anglického názvu *Random Coefficient Autoregression*. Jednou z těchto metod je wild bootstrap, tedy metoda již delší dobu známá a hojně používaná. Druhou metodou je varianta reziduálního parametrického bootstrapu, která byla navržena v nedávné době speciálně pro tyto procesy, a dvě její modifikace.

V kapitole 1 se seznámíme s metodou bootstrap, s její originální verzí navrženou pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny i s postupně vznikajícími variantami, které použití metody neustále rozšiřují na širší spektrum náhodných procesů. V kapitole 2 definujeme autoregresní proces s náhodnými koeficienty řádu  $p$  a popíšeme některé jeho vlastnosti, jako je stacionarita a odhad střední hodnoty autoregresního koeficientu. Následně se zaměříme na proces řádu 1 a ukážeme si metody bootstrap, pro které byla dokázána konzistence v souvislosti s procesy  $RCA(1)$ . Nakonec rozšíříme použití metody wild bootstrap i na proces  $RCA(2)$  a při splnění určitých předpokladů kladených na chybové složky procesu dokážeme konzistenci této metody. V poslední kapitole v několika simulacích ověříme vhodnost použití popsaných metod pro odvozování vlastností konkrétních statistik založených na odhadech autoregresních koeficientů procesů  $RCA(1)$  a  $RCA(2)$ . Většina tabulek a grafů znázorňujících výsledky simulací je obsažena v kapitole Přílohy.

# 1. Metoda bootstrap

## 1.1 Bootstrap pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny

Podívejme se nejprve na originální verzi této metody, tedy na bootstrap pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny (pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny budeme v textu místo používat zkratku *iid* a na metodu bootstrap pro *iid* data se budeme dále v textu odkazovat jako na *IID bootstrap*). Při analýze časových řad se s nezávislými daty sice příliš často nepotkáme, ale je to základ, ze kterého jsou všechny bootstrapové metody pro závislá data odvozené.

Předpokládejme tedy, že máme k dispozici pozorování  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , která vznikla realizací prvních  $n$  prvků náhodné posloupnosti  $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots\}$ , jejíž jednotlivé složky jsou nezávislé náhodné veličiny pocházející z neznámého rozdělení s distribuční funkcí  $F$ . Buď  $\theta = \theta(F)$  charakteristika tohoto rozdělení, která nás zajímá,  $T_n = T_n(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)$  statistika, pomocí které chceme  $\theta$  odhadnout, a  $R_n = R_n(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)$  její vhodně upravená verze (standardizovaná, studentizovaná či jinak modifikovaná). Pokud bychom  $F$  znali, mohli bychom spočítat hodnotu  $\theta$  přímo. Rozdělení ale neznáme, budeme tedy postupovat následujícím způsobem:

1. S využitím pozorování  $X_1, \dots, X_n$  nalezneme nějaký vhodný odhad distribuční funkce  $F$ . Obvykle se pro tyto účely používá empirická distribuční funkce, spočteme tedy

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}[X_i \leq x], \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $\mathbb{I}[X_i \leq x] = \mathbb{I}_{(-\infty, x]}(X_i)$  je indikátor množiny  $(-\infty, x]$ , tedy funkce, která nabývá hodnoty 1, pokud  $X_i \in (-\infty, x]$ , nebo 0 v opačném případě.

2. Vygenerujeme tzv. *bootstrapový výběr*. Jde o označení hodnot  $X_1^*, \dots, X_n^*$  vygenerovaných z rozdělení daného distribuční funkcí  $F_n$  (jakmile známe  $X_1, \dots, X_n$ , je  $F_n$  známá funkce). Označme  $P^*(X_j^* = X_i) = P(X_j^* = X_i | X_1, \dots, X_n)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Protože pro každé  $i, j = 1, \dots, n$  platí

$$P^*(X_j^* = X_i) = F_n(X_{(k)}) - F_n(X_{(k-1)}) = \frac{1}{n},$$

kde  $k$  je pořadí hodnoty  $X_i$  v uspořádaném náhodném výběru  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ , generujeme bootstrapový výběr pomocí výběru s vracením z  $X_1, \dots, X_n$ . Bootstrapový výběr tedy tvoří náhodné veličiny  $X_1^*, \dots, X_n^*$ , které jsou (podmíněně) nezávislé a každá nabývá hodnot  $X_1, \dots, X_n$  s pravděpodobností  $\frac{1}{n}$ .

3. Nyní přejdeme od původních dat k bootstrapovým replikám, tedy od rozdělení  $F$  k  $F_n$ . Parametr  $\theta(F)$  ve výpočtech nahradíme výrazem  $\theta^* =$

$\theta(F_n)$ , který se z  $F_n$  odvodí stejným způsobem, jako se  $\theta$  odvodí z  $F$ . Ve výrazech  $T_n$  a  $R_n$  nahradíme původní výběr bootstrapovým výběrem a získáme tak jejich bootstrapové ekvivalenty  $T_n^* = T_n(X_1^*, \dots, X_n^*)$  a  $R_n^* = R_n(X_1^*, \dots, X_n^*)$ .

Kroky 2 a 3 však neprovádíme pouze jednou. Protože neznáme rozdělení  $F$  a tudíž ani rozdělení statistik  $T_n$  a  $R_n$ , chceme jejich rozdělení aproximovat rozdělením bootstrapových statistik  $T_n^*$  a  $R_n^*$ . Ani jejich rozdělení však zpravidla neznáme. Abychom ho mohli přesně určit, museli bychom realizovat všech  $n^n$  možných výběrů s vracením z  $X_1, \dots, X_n$ , nebo eventuelně „jen“  $\binom{2n-1}{n}$  navzájem různých výběrů, a pro každý z nich spočítat hodnotu  $T_n^*$ , resp.  $R_n^*$ . I při relativně malých  $n$  to může být značně výpočetně náročné. Proto rozdělení statistik  $T_n^*$ , resp.  $R_n^*$  aproximujeme metodou *Monte Carlo*. V závislosti na počtu pozorování  $n$  a na charakteristice, kterou chceme odhadovat, zvolíme počet bootstrapových výběrů  $B \in \mathbb{N}$ . Pro  $b = 1, \dots, B$  vygenerujeme (nezávisle na sobě) bootstrapové výběry  $X_{b,1}^*, \dots, X_{b,n}^*$  a hodnoty bootstrapových statistik  $T_{b,n}^* = T_n(X_{b,1}^*, \dots, X_{b,n}^*)$ , resp.  $R_{b,n}^* = R_n(X_{b,1}^*, \dots, X_{b,n}^*)$ . Rozdělení statistik  $T_n^*$ , resp.  $R_n^*$  pak nahradíme jejich empirickým rozdělením. Stejně tak k odhadu střední hodnoty bootstrapových statistik, rozptylu nebo jiné jejich charakteristiky použijeme jejich výběrovou variantu.

Označme

$$H_n(x) = P(T_n \leq x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$H_n^*(x) = P^*(T_n^* \leq x) = P(T_n^* \leq x | X_1, \dots, X_n), \quad x \in \mathbb{R}$$

distribuční funkci statistiky  $T_n$ , resp.  $T_n^*$ . Funkce  $H_n^*$  se nazývá *teoretická distribuční funkce* získaná metodou bootstrap. Tuto distribuční funkci odhadneme empirickou distribuční funkcí

$$\widehat{H}_n^*(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbb{I}[T_{b,n}^* \leq x], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Analogicky aproximujeme i rozdělení bootstrapové statistiky  $R_n^*$ . Střední hodnotu  $E^*T_n^* = E[T_n^* | X_1, \dots, X_n]$  odhadneme výběrovým průměrem

$$\widehat{E}^*T_n^* = \bar{T}_{B,n}^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_{b,n}^*$$

a rozptyl  $\text{var}^*T_n^* = \text{var}[T_n^* | X_1, \dots, X_n]$  odhadneme výběrovým rozptylem

$$\widehat{\text{var}}^*T_n^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (T_{b,n}^* - \bar{T}_{B,n}^*)^2.$$

Statistiky  $\widehat{E}^*T_n^*$  a  $\widehat{\text{var}}^*T_n^*$  se rovněž nazývají *teoretické charakteristiky*  $T_n^*$ .

### 1.1.1 Konzistence metody bootstrap

Zatím jsme se nezabývali otázkou, na základě čeho rozhodneme, zda použití metody bootstrap bylo úspěšné, neboli zda je zvolená bootstrapová metoda pro naše data a vybranou statistiku vhodná. Zajímá-li nás rozdělení odhadované statistiky, pak se u bootstrapu pro *iid* data stejně jako u jeho různých variant pro závislá data dá říci, že bootstrap „funguje“, pokud (teoretické) rozdělení bootstrapové statistiky  $T_n^*$  je konzistentní s rozdělením  $T_n$ . Distribuční funkce  $H_n^*$  se nazývá (*silně*) *konzistentní* odhad  $H_n$ , jestliže  $\rho(H_n^*, H_n) \xrightarrow{s.j.} 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ , kde  $\rho$  je metrika na prostoru distribučních funkcí. Symbolem  $\xrightarrow{s.j.}$  značíme konvergenci skoro jistě. Často používanou metrikou je *supremální metrika*

$$\rho_\infty(F, G) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| = \|F(x) - G(x)\|_\infty.$$

Pokud  $\rho(H_n^*, H_n)$  konverguje k nule v pravděpodobnosti (tuto konvergenci budeme značit symbolem  $\xrightarrow{P}$ ), mluvíme o *slabé konzistenci*.

Není překvapivé, že jako první se objevily důkazy konzistence IID bootstrapu pro statistiky založené na výběrovém průměru  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Uvažujme tyto dvě statistiky:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \text{ a } \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right),$$

kde  $\mu = EX_1$  a  $\sigma = \sqrt{\text{var } X_1}$ . Pro vyjádření jejich bootstrapových protějšků potřebujeme znát  $\mu^*$  a  $\sigma^*$ :

$$\mu^* = E^* X_1^* = \sum_{i=1}^n X_i P^*(X_1^* = X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n,$$

$$\sigma^{2*} = E^*(X_1^* - E^* X_1^*)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 P^*(X_1^* = X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Odpovídající bootstrapové statistiky tedy mají tvar

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n^* - \mu^*) = \sqrt{n}(\bar{X}_n^* - \bar{X}_n),$$

$$\sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n^* - \mu^*}{\sigma^*} \right) = \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n^* - \bar{X}_n}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}} \right).$$

Konzistence pro tyto statistiky byla odvozena v článku Singh (1981).

**Věta 1** (Konzistence IID bootstrapu pro výběrový průměr). *1. Je-li  $EX_1^2 < \infty$ , pak*

$$\left\| P^* \left( \sqrt{n}(\bar{X}_n^* - \mu^*) \leq x \right) - P \left( \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq x \right) \right\|_\infty \xrightarrow{s.j.} 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

2. Je-li  $EX_1^4 < \infty$ , pak

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log \log n}} \left\| P^* \left( \sqrt{n} (\bar{X}_n^* - \mu^*) \leq x \right) - P \left( \sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \leq x \right) \right\|_{\infty} &= \\ &= \frac{\sqrt{2 \operatorname{var}(X_1 - \mu)^2}}{2\sigma^2 \sqrt{2\pi e}} \text{ s.j.} \end{aligned}$$

3. Je-li  $E|X_1^3| < \infty$  a  $F$  není řešetovitá, pak pro  $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \left\| P^* \left( \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n^* - \mu^*}{\sigma^*} \right) \leq x \right) - P \left( \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \leq x \right) \right\|_{\infty} \xrightarrow{\text{s.j.}} 0.$$

4. Je-li  $E|X_1^3| < \infty$  a  $F$  je řešetovitá s krokem  $h$ , tj. existují reálné konstanty  $c, h, h > 0$ , takové, že  $P(X_1 \in \{c + zh, z \in \mathbb{Z}\}) = 1$ , pak

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left\| P^* \left( \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n^* - \mu^*}{\sigma^*} \right) \leq x \right) - P \left( \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \leq x \right) \right\|_{\infty} = \frac{h}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Podle bodu 1 věty je statistika  $\sqrt{n}(\bar{X}_n^* - \mu^*)$  konzistentním odhadem  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$  a v bodě 2 je uvedena i rychlost této konvergence. Podle bodů 3 a 4 věty je konzistentní i standardizovaná statistika  $\sqrt{n}(\bar{X}_n^* - \mu^*)/\sigma^*$ . Protože podle Berry-Ésseenovy nerovnosti (viz Dodatek, věta 22) je rychlost konvergence standardizované statistiky k normálnímu rozdělení řádu  $O(n^{-\frac{1}{2}})$ , dává bootstrap pro neřešetovitá rozdělení lepší výsledky než centrální limitní věty.

*Poznámka.* Na příkladu převzatém z článku Singh (1981) si rovnou také ukažme, že IID bootstrap není spásnou metodou poskytující dobré výsledky ve všech situacích. Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je prvních  $n$  prvků stacionární posloupnosti  $m$ -závislých náhodných veličin (viz Dodatek, definice 8),  $E X_1 = \mu$ ,  $\operatorname{var} X_1 = \sigma^2$ . Označme  $\sigma_m^2 = \operatorname{var} X_1 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \operatorname{cov}(X_1, X_{i+1})$ . Je-li  $\sigma_m^2 < \infty$ , pak podle centrální limitní věty pro  $m$ -závislé náhodné veličiny (viz Dodatek, věta 21) platí

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_m^2).$$

Výběrem s vrácením vytvoříme z  $X_1, \dots, X_n$  bootstrapový náhodný výběr  $X_1^*, \dots, X_n^*$ . I po odvození z realizace  $m$ -závislého procesu veličiny  $X_i^*$  jsou (podmíněně) nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny a stejně jako u bootstrapu pro *iid* náhodné veličiny i v tomto případě platí

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n^* - \bar{X}_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ s.j.}$$

Důkaz je uveden v Lahiri (2003), věta 2.2. Protože v případě  $m$ -závislých veličin je obecně  $\sum_{i=1}^{m-1} \operatorname{cov}(X_1, X_{i+1}) \neq 0$ , rozptyly limitních rozdělení původního a bootstrapového výběru se liší, tudíž pro  $m$ -závislé náhodné posloupnosti není IID bootstrap konzistentní.



## 1.2 Bootstrap pro závislá data

Pokud se zabýváme časovou řadou, u níž lze očekávat nějakou závislost mezi jejími jednotlivými složkami, s *IID bootstrapem* nevystačíme. V poměrně krátké době po publikování článku Efron (1979) se proto objevily různé modifikace jeho postupu, které jsou určeny právě k analýze závislých dat. Volba metody závisí mimo jiné na tom, jaké předpoklady ohledně mechanismu, kterým data vznikají, jsme ochotni uvažovat. Jestliže máme důvod předpokládat, že se proces generující naše data řídí nějakým známým modelem, jehož parametry bychom chtěli odhadovat, můžeme získat dobré výsledky při použití některé z parametrických metod. Pokud naopak nemáme o závislostní struktuře konkrétní představu nebo nechceme na náhodný proces klást příliš omezující předpoklady, při jejichž nesplnění bychom dostali zkreslené výsledky, lze využít některou z neparametrických bootstrapových metod. V následujících odstavcích si základní parametrické a neparametrické metody popíšeme.

### 1.2.1 Blokový bootstrap

Blokový bootstrap je přirozeným rozšířením *IID bootstrapu* na data, o kterých předpokládáme, že jsou nějakým způsobem závislá. Tato metoda má obecné využití v případech, kdy nevíme nic konkrétního o závislostní struktuře procesu generujícího data. Postupuje se podobně, jako u *IID bootstrapu*, ale místo na jednotlivá pozorování uplatníme výběr s vrácením na celé bloky po sobě jdoucích pozorování. Základní čtyři varianty této metody se mezi sebou liší v tom, zda se jednotlivé bloky překrývají či ne a zda délka bloků je náhodná nebo deterministická. Postupem času vznikly další modifikace blokového bootstrapu, které se snaží eliminovat jeho nedostatky.

Předpokládejme, že  $X_1, \dots, X_n$  je realizace reálného stacionárního náhodného procesu  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ . Algoritmus blokového bootstrapu s pevnou délkou bloku a nepřekrývajícími se bloky vypadá následovně:

1. Zvolíme vhodnou délku bloku  $l \ll n$  a označíme  $L$  počet bloků. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že  $n = lL$ . Pozorování tedy můžeme rozdělit na bloky

$$(X_1, \dots, X_n) = (X_{1,1}, \dots, X_{1,l}, X_{2,1}, \dots, X_{2,l}, \dots, X_{L,1}, \dots, X_{L,l}).$$

2. Z množiny indexů  $\{1, \dots, L\}$  postupně vybereme s vrácením  $n$  hodnot  $\{i_1, \dots, i_n\}$ .
3. Bootstrapový výběr vytvoříme seřazením bloků s pořadími  $\{i_1, \dots, i_n\}$ .

$$(X_1^*, \dots, X_n^*) = (X_{i_1,1}, \dots, X_{i_1,l}, X_{i_2,1}, \dots, X_{i_2,l}, \dots, X_{i_n,1}, \dots, X_{i_n,l}).$$

Bootstrapovým výběrem pak nahradíme původní data ve statistice  $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ , jejíž rozdělení nebo některé konkrétní charakteristiky chceme aproximovat.

V případě blokového bootstrapu s překrývajícími se bloky upravíme bod 2 tak, že indexy  $\{i_1, \dots, i_n\}$  vybereme (s vrácením) z množiny  $\{1, \dots, n - l + 1\}$ .

Blokový bootstrap s překrývajícími se bloky a s náhodnou délkou bloku byl navržen v článku Politis a Romano (1992a) s cílem získat bootstrapový výběr, který je stacionární, stejně jako původní náhodný proces. Blokovaný bootstrap s pevnou délkou bloku ke stacionárnímu výběru nevede. Algoritmus pro získání bootstrapového výběru se upraví tak, že se v bodě 1 určí délky bloků  $l_1, \dots, l_L$  generováním nezávislých veličin s geometrickým rozdělením s vhodně zvoleným parametrem  $p \in (0, 1)$ . Počet bloků  $L$  určíme jednoduše tak, že generujeme délky bloků  $l_i$ , dokud jejich součet nedá požadovanou délku bootstrapového výběru  $n$  (poslední blok se případně ořízne). První vybraný blok má tvar  $X_{i_1}, \dots, X_{i_1+l_1-1}$ . Pokud tedy  $X_i^* = X_t$ , pak  $X_{i+1}^* = X_{t+1}$  s pravděpodobností  $1 - p$  a s pravděpodobností  $p$  bude  $X_{i+1}^*$  náhodně vybrán ze zbylých  $n - 1$  prvků. Takto získaný bootstrapový výběr má kromě stacionarity navíc markovskou vlastnost, viz Lahiri (2003), sekce 2.7.2.

Jedním z nedostatků blokového bootstrapu s překrývajícími se bloky je skutečnost, že hodnoty  $X_i$  uvnitř výběru se v bootstrapovém výběru objeví s větší pravděpodobností, než hodnoty na krajích výběru. S podobným problémem se můžeme potýkat i u bootstrapu s nepřekrývajícími se bloky v případě, že počet pozorování není násobkem délky bloku. Hodnoty na konci výběru (za posledním blokem) pak nebudou vybrány nikdy. V článku Politis a Romano (1992b) autoři proto navrhli tzv. *circular bootstrap*, tedy *kruhový bootstrap*, což je varianta blokového bootstrapu, která tento nedostatek odstraňuje. V *kruhovém bootstrapu* se hodnoty výběru  $X_1, \dots, X_n$  uspořádají do kruhu tak, že za  $X_n$  následuje  $X_1$  a vybírá se z  $n$  překrývajících se bloků nebo  $L + 1$  nepřekrývajících se bloků, kde  $L = \lfloor n/l \rfloor$ . Existují další varianty blokového bootstrapu, které redukují vychýlení způsobené porušením původní struktury na přechodech mezi bloky.

Uvnitř jednotlivých bloků, ze kterých se skládá bootstrapový výběr  $X_1^*, \dots, X_n^*$ , je zřejmě zachována závislostní struktura původního procesu. Obvyklý požadavek proto je, aby délka bloku  $l$  rostla s rostoucím počtem pozorování. V monografii Lahiri (2003), sekce 3.2.1 a 3.2.2, dokázal autor pro tzv.  $\alpha$ -mixing náhodný proces s konečnými momenty určitého řádu a pro  $l \rightarrow \infty$  a  $l/n \rightarrow 0$  při  $n \rightarrow \infty$  konzistenci blokového bootstrapu pro centrovaný výběrový průměr  $T_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ , kde  $\mu = \mathbf{E} X_1$ . Termínem  $\alpha$ -mixing se označuje jeden z druhů tzv. *slabé závislosti*. Označme

$$\alpha(s) = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \{ |\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|, A \in \mathcal{F}_t, B \in \mathcal{F}_{t+s}^\infty \},$$

kde  $\mathcal{F}_t = \sigma \{ \mathcal{X}_r, r \leq t \}$  a  $\mathcal{F}_{t+s}^\infty = \sigma \{ \mathcal{X}_r, r \geq s + t \}$ . Jsou-li prvky náhodného procesu  $\{ \mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z} \}$  nezávislé, je zřejmě  $\alpha(s) = 0$  pro všechna  $s \geq 1$ . Náhodný proces je  $\alpha$ -mixing, jestliže  $\alpha(s) \rightarrow 0$  při  $s \rightarrow \infty$ . Tedy mezi dostatečně vzdálenými prvky náhodného procesu je závislost takřka nulová.

V Lahiri (2003) je konkrétně odvozena konzistence rozptylu (resp. varianční matice pro vícerozměrný proces) a distribuční funkce  $T_n^* = \sqrt{n}(\bar{X}_n^* - \bar{X}_n)$  pro bootstrap s překrývajícími se bloky a pevnou délkou bloku (v anglické literatuře

známého jako *moving block bootstrap*), pro bootstrap s nepřekrývajícími se bloky a pevnou délkou bloku, pro *kruhový bootstrap* a pro *stacionární bootstrap*, tj. bootstrap s překrývajícími se bloky a náhodnou délkou bloku.

### 1.2.2 Parametrický reziduální bootstrap

Při analýze časových řad se často spoléháme na to, že se daná řada řídí některým známým modelem, který závisí na neznámém parametru  $\theta$ . Tento parametr pak odhadujeme. K aproximování vlastností odhadu parametru modelu lze v takovém případě použít *parametrický reziduální bootstrap*. Tato metoda spočívá v odhadnutí neznámého parametru některou běžnou metodou, spočtení reziduí odhadnutého modelu a *iid* replikování těchto reziduí. S využitím replikovaných reziduí a odhadnutého modelu pak vygenerujeme bootstrapovou repliku časové řady. Tuto metodu konkrétněji popíšeme pro autoregresní model, kterému je v literatuře týkající se bootstrapu věnována značná pozornost.

Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je realizace stacionárního procesu  $AR(p)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , neboli procesu  $\{\mathcal{X}_t, t \in T\}$  takového, že

$$\mathcal{X}_t = \varphi_1 \mathcal{X}_{t-1} + \dots + \varphi_p \mathcal{X}_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1.1)$$

kde  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  jsou reálné konstanty, pro které platí, že všechny kořeny polynomu  $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \dots - \varphi_p z^p$  leží vně jednotkového kruhu a  $\varphi_p \neq 0$ ,  $\{\varepsilon_t, t \in T\}$  je posloupnost *iid* náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním konečným rozptylem  $\sigma^2$ . V definici autoregresního procesu se sice běžně požadují nekorelované chyby, ale pro většinu odvozených asymptotických výsledků pro reziduální parametrický bootstrap je předpoklad nezávislých chyb nezbytný.

Zkonstruování bootstrapové repliky tohoto procesu proběhne následovně:

1. Vhodnou metodou (např. metodou nejmenších čtverců) získáme odhady  $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p$  parametrů  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ . Spočteme rezidua autoregresního modelu

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1} - \dots - \hat{\varphi}_p X_{t-p} \quad \text{pro } t \geq p+1. \quad (1.2)$$

2. Odhadnutá rezidua vycentrujeme,  $\tilde{\varepsilon}_t = \hat{\varepsilon}_t - \frac{1}{n-p} \sum_{i=p+1}^n \hat{\varepsilon}_i$  pro  $t = p+1, \dots, n$ , a spočteme empirickou distribuční funkci  $F_n$  centrovaných reziduí  $\tilde{\varepsilon}_t$ .
3. Vygenerujeme bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^*$ ,  $t = p+1, \dots, n$  jako nezávislé náhodné veličiny pocházející z rozdělení  $F_n$  (neboli výběrem s vrácením z  $\{\tilde{\varepsilon}_{p+1}, \dots, \tilde{\varepsilon}_n\}$ ).
4. Zvolíme počáteční hodnoty bootstrapového výběru  $X_1^*, \dots, X_p^*$  a dopočítáme zbylé hodnoty bootstrapového výběru tak, že

$$X_t^* = \hat{\varphi}_1 X_{t-1}^* + \dots + \hat{\varphi}_p X_{t-p}^* + \varepsilon_t^* \quad \text{pro } t \geq p+1.$$

Kombinací vztahů (1.1) a (1.2) dostaneme rovnost

$$\hat{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - \sum_{i=1}^p (\hat{\varphi}_i - \varphi_i) X_{t-i}, \quad t = p+1, \dots, n.$$

Pro konzistentní odhady autoregresních parametrů tedy platí  $\hat{\varepsilon}_t \approx \varepsilon_t$ , tudíž  $\hat{\varepsilon}_t$  se chovají přibližně nezávisle a můžeme na ně použít *IID bootstrap*. Zřejmě platí  $\mathbf{P}^*(\varepsilon_t^* = \tilde{\varepsilon}_i) = \frac{1}{n-p}$  pro  $i, t = p+1, \dots, n$ , takže

$$\mathbf{E}^* \varepsilon_t^* = \frac{1}{n-p} \sum_{i=p+1}^n \tilde{\varepsilon}_i = \frac{1}{n-p} \sum_{i=p+1}^n \hat{\varepsilon}_i - \frac{1}{n-p} \sum_{i=p+1}^n \hat{\varepsilon}_i = 0.$$

Díky centrování odhadnutých reziduí modelu tedy i bootstrapová rezidua splňují podmínku nulové střední hodnoty. Počáteční hodnoty bootstrapového výběru se obvykle volí  $\{X_1^*, \dots, X_p^*\} = \{X_1, \dots, X_p\}$  a další hodnoty  $X_t^*$ ,  $t > p$  se generují tak dlouho, dokud není dosaženo stacionarity. Přebývající hodnoty na začátku se vynechají tak, aby bootstrapový výběr měl požadovanou délku  $n$ .

Konzistence této metody pro stacionární autorgresní model  $AR(p)$  byla odvozena v článku Bose (1988), a to za předpokladů:

1.  $\{\varepsilon_t\}$  jsou *iid* s  $\mathbf{E} \varepsilon_t = 0$ ,  $\text{var} \varepsilon_t = 1$  a  $\mathbf{E} \varepsilon_t^8 < \infty$ ,
2. vektor  $(\varepsilon_1, \varepsilon_1^2)'$  splňuje tzv. *Cramérovu podmínku*, tj. pro každé  $d > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že

$$\sup_{\|t\|>d} \mathbf{E} [\exp \{i (\varepsilon_1, \varepsilon_1^2) t\}] \leq e^{-\delta},$$

3. všechny kořeny polynomu  $1 + \sum_{i=1}^p \varphi_i z^i$  leží uvnitř jednotkového kruhu.

Označme  $\hat{\varphi}_n = \hat{\varphi}_n(X_1, \dots, X_n)$  odhad autorgresních parametrů  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)'$ . Bootstrapový protějšek získáme jako obvykle nahrazením původních pozorování bootstrapovým výběrem, tedy  $\hat{\varphi}_n^* = \hat{\varphi}_n(X_1^*, \dots, X_n^*)$ . Jsou-li splněny body 1–3, pak pro skoro všechny realizace platí

$$\|\mathbf{P}^*(\sqrt{n}\Sigma_n^{*1/2}(\hat{\varphi}_n^* - \hat{\varphi}_n) \leq x) - \mathbf{P}(\sqrt{n}\Sigma^{1/2}(\hat{\varphi}_n - \varphi) \leq x)\|_\infty = o(n^{-1/2}).$$

Symbolem  $\Sigma$  zde značíme varianční matici vektoru  $(X_1, \dots, X_p)'$  a symbolem  $\Sigma_n^*$  bootstrapovou varianční matici vektoru  $(X_1^*, \dots, X_n^*)'$ , tj. prvky matice  $\Sigma_n^*$  tvoří hodnoty  $\text{cov}^*(X_i^*, X_j^*)$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ . Podobné výsledky lze získat i při uvolnění podmínek na stacionaritu autoregresní posloupnosti a na nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl  $\varepsilon_t$ , viz Bose (1988). Další autoři se následně zabývali použitím parametrického reziduálního bootstrapu pro stacionární ARMA procesy, ARCH a GARCH modely a další. Odkazy na konkrétní články lze nalézt například v člancích Paparoditis a Politis (2009) a Kreiss a Paparoditis (2011b).

### 1.2.3 Neparametrický reziduální bootstrap

Uvažujme model

$$\mathcal{X}_t = m(\mathcal{X}_{t-1}, \dots, \mathcal{X}_{t-p}) + \sigma(\mathcal{X}_{t-1}, \dots, \mathcal{X}_{t-q}) \varepsilon_t, \quad t = r+1, r+2, \dots, \quad (1.3)$$

kde  $r = \max\{p, q\}$ . Dokud nic nepředpokládáme o funkcích  $m$  a  $\sigma$  a o posloupnosti  $\{\varepsilon_t\}$ , jde o velmi obecný zápis, kterým lze popsat širokou škálu modelů. Například je-li  $m$  lineární funkce a  $\sigma \equiv 1$ , jde o autoregresní model. Je-li  $m \equiv 0$  a  $\sigma^2(\mathcal{X}_{t-1}, \dots, \mathcal{X}_{t-q}) = \beta_0 + \beta_1 \mathcal{X}_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \mathcal{X}_{t-q}^2$  dostaneme model ARCH(q) s nulovou podmíněnou střední hodnotou. Na takové modely lze použít reziduální bootstrap popsany v předchozí sekci. Metoda založená na *iid* replikování reziduí se ale dá použít i v případě, že nevíme, zda se mechanismus generující data řídí nějakým parametrickým modelem, popřípadě jakým. Předpokládejme, že pozorování  $X_1, \dots, X_n$  pochází z procesu, který lze popsat modelem (1.3), kde  $\varepsilon_t$  je posloupnost *iid* náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem, a  $m$  a  $\sigma$  jsou neznámé hladké funkce. Pomocí některé z neparametrických metod získáme odhady  $\hat{m}$  a  $\hat{\sigma}$  a spočteme rezidua modelu  $\hat{\varepsilon}_t = (X_t - \hat{m}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})) / \hat{\sigma}(X_{t-1}, \dots, X_{t-q})$ . S využitím  $\hat{m}$ ,  $\hat{\sigma}$  a  $\hat{\varepsilon}_t$  pak generujeme bootstrapový výběr.

Pro jednoduchost se omezme na případ  $p = q = 1$ , tedy

$$\mathcal{X}_t = m(\mathcal{X}_{t-1}) + \sigma(\mathcal{X}_{t-1}) \varepsilon_t, \quad t = 2, 3, \dots$$

Funkce  $m$  a  $\sigma$  mají v tomto modelu konkrétní význam:  $m(\mathcal{X}_{t-1}) = \mathbf{E}[\mathcal{X}_t | \mathcal{X}_{t-1}]$  a  $\sigma(\mathcal{X}_{t-1}) = \sqrt{\text{var}[\mathcal{X}_t | \mathcal{X}_{t-1}]}$ . Funkce  $\sigma$  se zejména ve finančním prostředí nazývá volatilita a předpokládá se, že je kladná. Vyjadřuje velikost odchylky od „trendu“, respektive očekávaného systematického vývoje časové řady, reprezentovaného funkcí  $m$ . Hodnota  $\varepsilon_t$  pak určuje směr této odchylky. Předpokládáme, že  $\varepsilon_t$  jsou *iid* s  $\mathbf{E} \varepsilon_t = 0$  a  $\text{var} \varepsilon_t = 1$  a že  $\varepsilon_t$  nezávisí na  $X_1, \dots, X_t$ .

Jednou z neparametrických metod, kterou lze použít pro odhadnutí  $m$  a  $\sigma$ , je *Nadarayaův - Watsonův* jádrový odhad, který má tvar:

$$\hat{m}_h(x) = \frac{1}{\hat{p}_h(x)} \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} K_h(x - X_t) X_{t+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\hat{\sigma}_{h'}^2(x) = \frac{1}{\hat{p}_{h'}(x)} \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} K_{h'}(x - X_t) X_{t+1}^2 - \hat{m}_{h'}^2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $K$  je jádrová funkce,  $K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right)$ ,  $h, h'$  jsou vyhlazovací parametry a  $\hat{p}_h(x)$  je jádrový odhad stacionární hustoty  $p$  procesu  $\{\mathcal{X}_t, t \in T\}$ :

$$\hat{p}_h(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} K_h(x - X_t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proces replikace původního vzorku  $X_1, \dots, X_n$  s využitím jádrových odhadů tedy probíhá takto:

1. Zvolíme vhodnou jádrovou funkci  $K$  a vyhlazovací parametry  $h, h'$ . Pomocí jádrových odhadů uvedených výše získáme odhady  $\hat{p}_h, \hat{m}_h$  a  $\hat{\sigma}_{h'}$  a spočteme rezidua

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{X_t - \hat{m}_h(X_{t-1})}{\hat{\sigma}_{h'}(X_{t-1})}, t = 2, \dots, n.$$

2. Odhadnutá rezidua vycentrujeme,  $\tilde{\varepsilon}_t = \hat{\varepsilon}_t - \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \hat{\varepsilon}_i$  pro  $t = 2, \dots, n$ , spočteme empirickou distribuční funkci  $F_n$  centrovaných reziduí  $\tilde{\varepsilon}_t$  a vygenerujeme jejich bootstrapové repliky  $\varepsilon_t^*, t = 2, \dots, n$  jako *iid* náhodné veličiny s rozdělením  $F_n$ .

3. Zvolíme počáteční hodnotu  $X_1^*$  a ostatní hodnoty bootstrapového výběru vygenerujeme rekurzivně podle vzorce

$$X_t^* = \hat{m}_h(X_{t-1}^*) + \hat{\sigma}_{h'}(X_{t-1}^*) \varepsilon_t^*, t = 2, \dots, n.$$

Bootstrapový výběr  $X_1^*, \dots, X_n^*$  dosadíme místo původního vzorku  $X_1, \dots, X_n$  do jádrových odhadů a spočteme tak bootstrapové odhady  $\hat{p}_h^*(x), \hat{m}_h^*(x)$  a  $\hat{\sigma}_{h'}^*(x)$ . V článku Franke a kol. (2002) byla odvozena konzistence aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{nh}(\hat{m}_h(x) - m(x))$ , resp.  $\sqrt{nh}(\hat{\sigma}_{h'}^2(x) - \sigma^2(x))$  rozdělením statistik  $\sqrt{nh}(\hat{m}_h^*(x) - \hat{m}_h(x))$ , resp.  $\sqrt{nh}(\hat{\sigma}_{h'}^{*2}(x) - \hat{\sigma}_{h'}^2(x))$ , při splnění určitých předpokladů kladených na tvar funkcí  $m, \sigma$  a  $K$  a na hustotu a momenty inovací  $\varepsilon_t$ . V tomto článku také najdeme vhodnou volbu počáteční hodnoty  $X_1^*$ , jádrové funkce a vyhlazovacích parametrů.

## 1.2.4 Regresní bootstrap

V případě reziduálního bootstrapu, ať už parametrického nebo neparametrického, kopíruje výsledný bootstrapový výběr strukturu závislosti původního procesu. Je to způsobené tím, že hodnotu  $X_t^*$  generujeme rekurzivně s pomocí pseudo-pozorování  $X_{t-1}^*$ , eventuálně pomocí dalších předchozích replik v závislosti na řádu modelu. Tato vlastnost je pro konzistenci bootstrapu velmi důležitá. Nicméně v některých situacích pro odvození (asymptotického) rozdělení statistiky, která nás zajímá, nepotřebujeme znát veškeré aspekty závislosti dané časové řady. Vystačíme třeba jen se znalostí autokovarianční struktury, pomocí které můžeme rozdělení této statistiky dostatečně dobře aproximovat. V tom případě není nutné bootstrapem replikovat náhodný proces tak, aby věrně odrážel veškerou závislostní strukturu původního procesu. Stačí dosáhnout napodobení toho aspektu závislosti, který je pro odvození rozdělení statistiky určující. K tomuto účelu lze využít tzv. *regresní bootstrap*.

Uvažujme neparametrický model z předchozí sekce, tedy

$$\mathcal{X}_t = m(\mathcal{X}_{t-1}) + \sigma(\mathcal{X}_{t-1}) \varepsilon_t, t = 2, 3, \dots$$

Funkce  $m$  a  $\sigma$  odhadneme stejným způsobem jako u neparametrického reziduálního bootstrapu. Spočteme rezidua a vycentrujeme je, spočteme jejich empirickou distribuční funkci  $F_n$  a bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^*$  generujeme opět jako *iid* veličiny z rozdělení  $F_n$ . Bootstrapové repliky již ale negenerujeme autoregresním (rekurzivním) způsobem  $X_t^* = \hat{m}_h(X_{t-1}^*) + \hat{\sigma}_{h'}(X_{t-1}^*) \varepsilon_t^*$  jako dříve. Místo toho se na model

díváme jako na regresní model s fixním designem a replikujeme pseudo-pozorování  $X_t^*$  pomocí odhadnutého modelu v závislosti na skutečných pozorováních  $X_{t-1}$ , tedy

$$X_t^* = \hat{m}_h(X_{t-1}) + \hat{\sigma}_{h'}(X_{t-1}) \varepsilon_t^*, \quad t = 2, \dots, n.$$

Náhodné veličiny  $X_t^*$  jsou nyní nezávislé (podmíněně na původním vzorku) a bootstrapový výběr  $X_1^*, \dots, X_n^*$  tudíž nezachovává strukturu závislosti původní časové řady.

Odvození konzistence regresního bootstrapu pro aproximaci rozdělení statistik  $\sqrt{nh}(\hat{m}_h(x) - m(x))$  a  $\sqrt{nh}(\hat{\sigma}_{h'}^2(x) - \sigma^2(x))$  lze najít v článku Franke a kol. (2002). Autoři dokázali konzistenci za předpokladu, že tyto statistiky mají asymptoticky normální rozdělení, a za dalších ne příliš striktních předpokladů týkajících se zejména spektrální hustoty procesu, funkcí  $m$  a  $\sigma$  a atributů jádrových odhadů. My tuto metodu v této práci použijeme v kombinaci s tzv. *wild bootstrapem* pro replikování pozorování autoregresního modelu s náhodnými koeficienty.

### 1.2.5 Wild bootstrap

*Wild bootstrap* byl navržen v článku Wu (1986) jako vhodná metoda pro replikaci reziduí v modelu lineární regrese s chybami sice nekorelovanými, ale heteroskedastickými. Wu zkoumal různé odhady rozptylu OLS odhadu parametrů lineárního modelu a zatímco výše popsany reziduální bootstrap vede v případě heteroskedastických chyb k vychýlenému odhadu, odhad získaný pomocí wild bootstrapu vychýlením zatížený není. Wild bootstrap se od té doby začal hojně využívat v kombinaci s jinými bootstrapovými metodami právě v případech, kdy se zabýváme modelem, u kterého nelze předpokládat *iid* chybové složky.

Princip metody wild bootstrap si ukážeme na modelu

$$\mathcal{X}_t = m(\mathcal{X}_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad t = 2, 3, \dots,$$

kde chyby  $\varepsilon_t$  jsou sice nezávislé, ale heteroskedastické s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma_t^2 > 0$ . Porovnáme-li tento model s modelem v předchozích sekcích, volatilita je schovaná v chybové složce, její vlastnosti zkoumat nebudeme a budeme se zajímat jen o odhad funkce  $m$ . Algoritmus pro vygenerování bootstrapového výběru postupuje následovně:

1. Pomocí jádrového odhadu spočteme  $\hat{m}_h(x)$  a dopočítáme rezidua  $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{m}_h(X_{t-1})$ ,  $t = 2, \dots, n$ .
2. Nezávisle na  $X_1, \dots, X_n$  vygenerujeme  $\nu_2, \dots, \nu_n$  jako *iid* veličiny s rozdělením s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem.
3. Spočteme bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^* = \hat{\varepsilon}_t \nu_t$ ,  $t = 2, \dots, n$ .
4. Vygenerujeme  $X_1^*, \dots, X_n^*$  tak, že  $X_t^* = \hat{m}_h(X_{t-1}) + \varepsilon_t^*$ .

Podívejme se na vlastnosti  $\varepsilon_t^*$ :

$$\mathbf{E}^* \varepsilon_t^* = \mathbf{E} [\varepsilon_t^* | X_1, \dots, X_n] = \mathbf{E} [\hat{\varepsilon}_t \nu_t | X_1, \dots, X_n] = \hat{\varepsilon}_t \mathbf{E} \nu_t = 0,$$

$$\text{var}^* \varepsilon_t^* = \text{var} [\varepsilon_t^* | X_1, \dots, X_n] = \mathbf{E} [\hat{\varepsilon}_t^2 \nu_t^2 | X_1, \dots, X_n] = \hat{\varepsilon}_t^2 \mathbf{E} \nu_t^2 = \hat{\varepsilon}_t^2.$$

Pokud bychom bootstrapová rezidua generovali jako dříve výběrem s vracením, byla by podmíněně homoskedastická. Tím, že jsme do modelu dodali externí zdroj variability  $\nu_t$ , docílili jsme heteroskedasticity bootstrapových reziduí. Díky tomu, že  $\text{var} \nu_t = 1$ , nedochází k přílišnému zkreslení variability v původním modelu. Právě přenásobení reziduí náhodnou veličinou nesouvisející s danou časovou řadou vyjadřuje název metody „wild“, neboli „divoký“ bootstrap.

Pro bootstrapový výběr platí

$$\mathbf{E}^* X_t^* = \mathbf{E} [\hat{m}_h(X_{t-1}) + \varepsilon_t^* | X_1, \dots, X_n] = \hat{m}_h(X_{t-1}),$$

$$\text{var}^* X_t^* = \mathbf{E} [(X_t^* - \hat{m}_h(X_{t-1}))^2 | X_1, \dots, X_n] = \mathbf{E} [\varepsilon_t^{*2} | X_1, \dots, X_n] = \hat{\varepsilon}_t^2.$$

Bootstrapové repliky  $X_1^*, \dots, X_n^*$  jsou nyní nezávislé podmíněně na  $X_1, \dots, X_n$  a stejně jako u regresního bootstrapu z předchozí sekce nekopírují závislostní strukturu původního procesu. Přesto lze tuto metodu použít, s využitím bootstrapového výběru spočítat bootstrapový odhad  $\hat{m}_h^*(x)$  a s jeho pomocí aproximovat rozdělení statistiky  $\sqrt{nh}(\hat{m}_h(x) - m(x))$ . Odvození konzistence této metody za relativně mírných předpokladů (především asymptoticky normální rozdělení statistiky  $\sqrt{nh}(\hat{m}_h(x) - m(x))$ ) stejně jako vhodnou volbu počáteční hodnoty  $X_1^*$ , jádrové funkce a vyhlazovacích parametrů lze nalézt v článku Franke a kol. (2002).

Jak již bylo řečeno, velkým přínosem metody wild bootstrap je, že její kombinací s jinou metodou bootstrap lze použít onu druhou metodu i v případech, kde by sama o sobě nedávala dobré výsledky. Goncalves a Kilian (2004) vyšetřovali možnosti použití metody bootstrap pro aproximaci rozdělení odhadu koeficientů stacionárního autoregresního modelu, kde chyby jsou martingalové diference vykazující podmíněnou heteroskedasticitu. Wild bootstrap zde použili ve spojení s regresním a parametrickým reziduálním bootstrapem. Pro jednoduchost si to ukážeme na modelu  $AR(1)$ . Nechť tedy náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  vznikne realizací procesu  $\mathcal{X}_t = \varphi \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $t = 2, 3, \dots$ , kde  $|\varphi| < 1$  a  $\mathbf{E} [\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ .  $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma \{\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_1\}$  je  $\sigma$ -algebra indukovaná inovacemi do času  $t - 1$ . Nechť dále  $\mathbf{E} \varepsilon_t^2 = \sigma^2 < \infty$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{E} [\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma^2 > 0$ . Tedy  $\{\varepsilon_t\}$  tvoří posloupnost martingalových diferencí a podmíněný rozptyl se může u jednotlivých inovací lišit. Těmto podmínkám vyhovují například ve finančních časových řadách oblíbené modely ARCH a GARCH, některé modifikace modelu GARCH a modely stochastické volatility. Při splnění několika dalších podmínek na momenty  $\varepsilon_t$  lze dokázat, že statistika  $\sqrt{n}(\hat{\varphi}_n - \varphi)$  konverguje v distribuci k normálnímu rozdělení  $N(0, 1 - \varphi^2)$  (v autoregresním procesu vyššího řádu konverguje analogická statistika pro vektor parametrů procesu  $AR(p)$  k normálnímu rozdělení s varianční maticí  $C$ ), kde  $\hat{\varphi}_n$  je OLS odhad parametru  $\varphi$ , tedy

$$\hat{\varphi}_n = \frac{\sum_{t=2}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2}.$$



Tvar matice  $C$  a odvození asymptotické normality lze nalézt v Goncalves a Kilian (2004).

Nevýhodou reziduálního bootstrapu a regresního bootstrapu je, že nedokážou korektně odhadnout varianční matici  $C$ . Jejich spojením s wild bootstrapem se tento nedostatek odstraní. Pro vygenerování reziduí metodou wild bootstrap je potřeba nejprve spočítat rezidua původního modelu  $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\varphi}_n X_{t-1}$ ,  $t = 2, \dots, n$ , vygenerovat opět nezávislé hodnoty  $\nu_2, \dots, \nu_n$  z rozdělení s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem a dopočítat bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^* = \hat{\varepsilon}_t \nu_t$ . Bootstrapový výběr  $X_1^*, \dots, X_n^*$  se v případě regresního bootstrapu spočte pomocí vztahu  $X_t^* = \hat{\varphi}_n X_{t-1} + \varepsilon_t^*$ , zatímco u reziduálního parametrického bootstrapu je  $X_t^* = \hat{\varphi}_n X_{t-1}^* + \varepsilon_t^*$ . Obě metody lze použít ke konzistentní aproximaci rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\varphi}_n - \varphi)$  statistikou  $\sqrt{n}(\hat{\varphi}_n^* - \hat{\varphi}_n)$ , kde  $\hat{\varphi}_n^*$  je OLS odhad parametru  $\varphi$  v modelu  $X_t^* = \varphi X_{t-1}^* + \varepsilon_t$ . Všechny potřebné předpoklady pro odvození tohoto výsledku lze nalézt v Goncalves a Kilian (2004).

Využití metody wild bootstrap pro popis chování odhadů parametrů v některých dalších modelech si ukážeme v další sekci a následujících kapitolách. Poznamenejme ještě, že pro rychlejší konvergenci rozdělení bootstrapové statistiky k rozdělení původní statistiky se často kromě  $E \nu_t = 0$  a  $\text{var } \nu_t = 1$  požaduje navíc ještě  $E \nu_t^3 = 1$ .

## 1.2.6 Párový bootstrap

Další metodou, která si umí poradit s heteroskedasticitou v modelu, je tzv. *párový bootstrap*. Tato metoda byla původně navržena pro nedynamické regresní modely, kde pozorování lze rozdělit do skupin podle nějakého třídícího prvku, například oblasti pozorování. Lze ji ale využít i v dynamických modelech, jako je třeba proces  $AR(p)$ , jehož chybové složky se řídí modelem martingalových diferencí, který byl popsán v předchozí sekci. Princip párového bootstrapu aplikovaného na časovou řadu spočívá v replikování párů tvořených hodnotou  $X_t$  a vektorem obsahujícím všechny hodnoty  $X_{t-j}$ ,  $j \geq 1$ , na kterých  $X_t$  závisí. V případě procesu  $AR(p)$  jde tedy o výběr s vrácením z párů  $\{X_t, (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'\}$ ,  $t \geq p+1$ . Máme-li  $\{X_t^*, (X_{t-1}^*, \dots, X_{t-p}^*)'\}$ ,  $t = p+1, \dots, n$  bootstrapové repliky původních párů a označíme-li  $\mathbf{X}_{t-1}^* = (X_{t-1}^*, \dots, X_{t-p}^*)'$ , bootstrapová statistika analogická OLS odhadu  $\hat{\varphi}_n = (\hat{\varphi}_{n,1}, \dots, \hat{\varphi}_{n,p})'$  má tvar

$$\hat{\varphi}_n^* = \left( \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n \mathbf{X}_{t-1}^* \mathbf{X}_{t-1}^{*'} \right)^{-1} \left( \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n \mathbf{X}_{t-1}^* X_t^* \right).$$

Goncalves a Kilian (2004) ukázali, že asymptotické rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\varphi}_n - \varphi)$  lze úspěšně aproximovat asymptotickým rozdělením statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\varphi}_n^* - \hat{\varphi}_n)$ . Metodu také simulačně porovnávali s wild bootstrapem kombinovaným s regresním bootstrapem a reziduálním parametrickým bootstrapem a na jejich datech párový bootstrap vykazoval o něco lepší výsledky než regresní bootstrap, ale o něco málo horší výsledky než reziduální parametrický bootstrap.

## 1.2.7 Další metody

Výše jsme popsali metody, které považujeme za základní nebo je budeme dále v práci používat. Existují ale i další bootstrapové metody. Některé jsou zcela odlišné od těch již uvedených, nicméně rozšiřování použitelnosti bootstrapu ve statistice se zejména ubírá směrem aplikování a přizpůsobování již známých postupů na nové problémy, pro které ještě nebyla konzistence některé bootstrapové metody dokázána. Stručný popis dalších používaných metod lze nalézt například v článcích Paparoditis a Politis (2009) a Kreiss a Paparoditis (2011b). Je třeba upozornit, že různí autoři mohou stejné metody nazývat různě nebo naopak různé metody označovat stejným názvem. Vyplatí se tedy obezřetně sledovat, jak ten který autor data skutečně replikuje. Zmíníme ještě stručně několik dalších metod.

### Sítový bootstrap

*Sítový* (z anglického výrazu *sieve*) bootstrap je metoda vycházející z úvahy, že přestože často modelujeme časové řady pomocí autoregresního procesu určitého konečného řádu, ve skutečnosti nelze v mnoha případech říct, že pozorování v čase  $t$  závisí jen na předchozích  $p$  hodnotách. Správnější by bylo v dané situaci předpokládat, že hodnota v čase  $t$  závisí na všech předchozích hodnotách, tedy že se časová řada řídí modelem  $AR(\infty)$ . Model  $AR(\infty)$  aproximujeme odhadnutými modely  $AR(p(n))$ , kde řád modelu  $p(n)$  roste s rostoucím počtem pozorování. „Sítovost“ bootstrapu je teoretický princip, který je ale potřeba uplatnit na nějakou konkrétní metodu. V článku Goncalves a Kilian (2007) ukázali autoři konzistenci sítového bootstrapu za použití párového bootstrapu a tzv. *fixed-design wild bootstrapu*, který odpovídá výše popsanému regresnímu bootstrapu v kombinaci s wild bootstrapem. S pomocí těchto metod approximovali rozdělení statistik založených na prvních  $k$  koeficientech procesu  $AR(\infty)$ , kde chybová složka se řídí modelem martingalových diferencí s možnou podmíněnou heteroskedasticitou, a  $k$  roste s rostoucím  $n$ .

### Markovský bootstrap, lokální bootstrap

Předpokládáme-li, že naše data byla vytvořena Markovovým procesem, můžeme za jistých podmínek použít *markovský bootstrap*. Na základě daného vzorku dat  $X_1, \dots, X_n$  některou neparametrickou metodou odhadneme přechodovou distribuční funkci

$$F(x|x_{t-1}, \dots, x_{t-p}) = \mathbf{P}(X_t < x | X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_{t-p} = x_{t-p}), x \in \mathbb{R}.$$

Zvolíme počáteční hodnoty  $X_1^*, \dots, X_p^*$  a další hodnoty bootstrapového výběru vygenerujeme tak, aby pravděpodobnost výběru hodnoty z  $X_1, \dots, X_n$  odpovídala odhadnutým pravděpodobnostem přechodu v závislosti na předchozích pseudo- pozorováních. S touto metodou úzce souvisí *lokální bootstrap*, kde se data replikují výběrem z původního vzorku pomocí vhodné váhové funkce takovým způsobem, aby pravděpodobnost  $\mathbf{P}(X_t^* = X_s | \mathbf{X}_{t-1})$  byla tím větší, čím blíže je vektor  $\mathbf{X}_{t-1}^*$  vektoru  $\mathbf{X}_{s-1}$  ve smyslu nějaké vhodné metriky. Připomeňme, že symbolem  $\mathbf{X}_{t-1}$  značíme vektor předchozích pozorování  $(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$ . Podrobnější popis těchto metod a odkazy na jejich použití lze najít v článcích Paparoditis a Politis (2009) a Kreiss a Paparoditis (2011a).

## Frekvenční bootstrap

Všechny výše popsané metody pracují s časovými řadami v časové doméně. Ve statistické analýze časových řad se ovšem používají i metody fungující ve spektrální doméně a i ve světě bootstrapu několik frekvenčních metod vzniklo. Předpokládáme-li, že naše data jsou tvořena lineárním procesem, tedy spektrální hustota  $f(\lambda)$  tohoto procesu existuje, můžeme některou z nich použít. Jejich stručný popis lze najít například v článku Kreiss a Paparoditis (2011a).



## 2. Autoregresní procesy s náhodnými koeficienty

Klasické autoregresní procesy, lineární a ARMA procesy představují velmi oblíbenou třídu modelů, pomocí kterých se ve statistice analyzují časové řady. Výsledky týkající se jejich stacionarity, odhadů koeficientů, predikcí a jejich dalších vlastností jsou známy a chování časové řady řízené autoregresním procesem lze oproti některým jiným modelům srozumitelně interpretovat. V praxi se ale ukazuje, že předpoklady kladené na autoregresní proces nejsou v mnoha situacích splnitelné. Jeden problém představují nezávislé stejně rozdělené chyby. Sice se často z praktických důvodů předpokládá, že chyby v modelu užitém pro interpretaci časové řady jsou nezávislé a stejně rozdělené, v mnoha reálných situacích ale chybové složky tento předpoklad porušují. Goncalves a Kilian (2004) ukázali přítomnost heteroskedasticity v řadě ekonomických jevů. Ve finančních časových řadách se proto přechází například k modelům ARCH a GARCH, které si umí s heteroskedasticitou chybové složky poradit a představují proto realističtější pohled na takovou časovou řadu.

Jiným nedostatkem klasického autoregresního procesu může být předpoklad, že koeficienty modelu jsou deterministické a zůstávají neměnné po celou dobu průběhu procesu. Je zřejmé, že u déle probíhajícího procesu se okolnosti ovlivňující jeho chování mohou změnit. Stejně tak míra závislosti pozorování  $X_t$  na předchozím pozorování  $X_{t-1}$ , kterou koeficient autoregresního procesu představuje, se může v rámci jednoho procesu lišit pro „malá“ a „velká“ pozorování  $X_{t-1}$ . Z toho důvodu se začaly používat prahové modely a modely s koeficienty měnícími se v čase. Další variací autoregresního procesu je autoregresní proces s náhodnými koeficienty, který budeme značit zkratkou *RCA* pocházející z anglického výrazu *random coefficient autoregression*. Tento proces byl představen v článku Anděl (1976) s argumentem, že zejména u přírodních jevů modelovaných autoregresním procesem jsou koeficienty tohoto modelu často tvořeny směsí různých náhodných faktorů. Je tedy principiálně správnější uvažovat o parametrech modelu jako o náhodných veličinách. V této kapitole se budeme zabývat právě autoregresními modely s náhodnými koeficienty, s homoskedastickými i heteroskedastickými chybami, a použitím metody bootstrap pro aproximaci asymptotického rozdělení odhadů koeficientů modelu.

### 2.1 Proces RCA(p)

Definujme nyní autoregresní model řádu  $p \in \mathbb{N}$  s náhodnými koeficienty.

**Definice 1** (Proces *RCA*( $p$ )). *Nechť  $p \in \mathbb{N}$  a pro náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  platí*

$$\mathcal{X}_t = \sum_{i=1}^p b_i(t) \mathcal{X}_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

*kde*

(A1)  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin,  $E \varepsilon_t = 0$  a  $\text{var} \varepsilon_t = \sigma^2$  pro všechna  $t \in \mathbb{Z}$ , kde  $0 < \sigma^2 < \infty$ ,

(A2)  $\{\mathbf{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_p(t))', t \in \mathbb{Z}\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných vektorů se střední hodnotou  $E \mathbf{b}(t) = E (b_1(t), \dots, b_p(t))' = (\beta_1, \dots, \beta_p)' = \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$  a varianční maticí  $\text{var} \mathbf{b}(t) = \boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}_{p \times p}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , kde  $\boldsymbol{\Omega}$  je pozitivně definitní matice s konečnými prvky. Posloupnosti  $\{\mathbf{b}(t), t \in \mathbb{Z}\}$  a  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  jsou navzájem nezávislé.

Pak řekneme, že náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je autoregresní proces řádu  $p$  s náhodnými koeficienty.

Prvky varianční matice  $\boldsymbol{\Omega}$  budeme značit  $\omega_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ . Definici procesu  $RCA(p)$  lze rozšířit i pro náhodné vektory  $\mathcal{X}_t = (\mathcal{X}_{1,t}, \dots, \mathcal{X}_{q,t})'$ ,  $q \geq 2$ . S takovým procesem pracují Nicholls a Quinn (1982), my se ale budeme zabývat jen skalární verzí procesu  $RCA(p)$ . Chceme-li mít jistotu, že řád modelu je dodržen, tedy koeficient  $b_p(t)$  je nenulový s.j., měli bychom také dodat předpoklad  $\beta_p \neq 0$  nebo  $\text{var} b_p(t) = \omega_{pp} > 0$ , nicméně tento předpoklad se v literatuře často vynechává. Uvedená definice modelu představuje jeho základní variantu. Později v této kapitole se budeme věnovat i verzi modelu, kde je uvolněn předpoklad nezávislosti a homoskedasticity chybových složek v modelu.

### 2.1.1 Stacionarita procesu $RCA(p)$

Jednou z prvních vlastností, které nás u náhodného procesu zajímají, je jeho stacionarita. Anděl (1976) odvodil postačující podmínky slabé stacionarity pro proces  $RCA(p)$ , kde jednotlivé složky jsou skalární náhodné veličiny a  $t \in \mathbb{N}$ . Nicholls a Quinn (1982) následně dokázali striktní stacionaritu pro proces  $RCA(p)$ , kde jednotlivé složky jsou náhodné veličiny či vektory a  $t$  prochází  $\mathbb{N}$  či  $\mathbb{Z}$ .

Pro uvedení podmínek striktní stacionarity procesu  $RCA(p)$  potřebujeme autoregresní vlastnost (2.1) procesu  $RCA(p)$  přepsat do jiného tvaru. Z předpokladů definice procesu  $RCA(p)$  vidíme, že pro koeficienty autoregresního procesu platí  $\mathbf{b}(t) = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{B}(t)$ , kde  $\mathbf{B}(t) = (B_1(t), \dots, B_p(t))'$  jsou *iid* náhodné vektory s nulovou střední hodnotou a varianční maticí  $\boldsymbol{\Omega}$ . Označme  $\mathbf{X}_t$  náhodný vektor  $(\mathcal{X}_t, \dots, \mathcal{X}_{t-p+1})'$ . Vztah (2.1) nyní můžeme rozepsat do maticové rovnice

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{C} + \mathbf{D}_t)\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{J}_t, \quad (2.2)$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{p-1} & \beta_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} B_1(t) & \dots & B_p(t) \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{J}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Označme  $\mathcal{F}_t = \sigma \{ \varepsilon_s, \mathbf{B}(s) : s \leq t \}$   $\sigma$ -algebru tvořenou informacemi o složkách představujících variabilitu v modelu získaných do času  $t$ . Náhodný proces  $\{ \mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z} \}$  se označuje jako  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný či  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný, pokud pro každé  $t$  je  $\mathcal{X}_t$   $\mathcal{F}_t$ -měřitelná náhodná veličina. V následujících dvou větách uvedeme podmínky pro existenci slabě a striktně stacionárního procesu  $RCA(p)$ .

**Věta 2.** *Nechť matice  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}_t$  jsou jako v (2.2) a necht' platí*

$$(A3) \quad |\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{kde symbol } \otimes \text{ značí Kroneckerův součin matic a } \lambda_i \text{ jsou vlastní čísla matice } [E(\mathbf{D}_t \otimes \mathbf{D}_t) + \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}].$$

*Pak existuje jediný  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný náhodný proces, který je řešením rovnice (2.1). Tento proces je navíc slabě stacionární.*

Definice Kroneckerova součinu je uvedena v kapitole Dodatek 2, definice 7. Důkaz věty lze nalézt v knize Nicholls a Quinn (1982), důsledek 2.2.1. Pro slabou stacionaritu není potřeba, aby  $\varepsilon_t$  a  $\mathbf{B}(t)$  byly *iid*, stačí, aby byly nezávislé a měly stejnou střední hodnotu pro všechna  $t$  a konstantní rozptyl, respektive varianční matici. Slabá, resp. striktní stacionarita procesu  $\{ \mathcal{X}_t \}$  tedy úzce souvisí se slabou, resp. striktní stacionaritou náhodných procesů  $\{ \varepsilon_t \}$  a  $\{ \mathbf{B}_t \}$ . Podmínky pro striktní stacionaritu procesu  $\{ \mathcal{X}_t \}$  jsou uvedené v následující větě:

**Věta 3.** *Nechť  $\{ \varepsilon_t, t \in \mathbb{Z} \}$  a  $\{ \mathbf{B}(t), t \in \mathbb{Z} \}$  jsou náhodné procesy splňující podmínky (A1) a (A2). Jestliže existuje  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný slabě stacionární náhodný proces  $\{ \mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z} \}$ , který je řešením rovnice (2.1), pak  $\{ \mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z} \}$  je striktně stacionární a ergodický.*

Důkaz je uveden v knize Nicholls a Quinn (1982), věta 2.7. Definice *ergodicity* a některé vlastnosti ergodického náhodného procesu jsou popsány v dodatku 2. Ergodicita je vlastnost, která umožňuje s využitím výběrového průměru posuzovat charakteristiky náhodného procesu z jediné jeho realizace i v případě, že nejde o posloupnost nezávislých náhodných veličin. Je to dané tím, že u ergodického procesu se rovnají limity  $\lim_{t \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{X}_t(\omega)$ , kde  $N$  je počet prvků množiny  $\Omega$ , a  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{X}_t(\omega)$ , pro libovolné  $\omega \in \Omega$ . Při dostatečně velkém počtu pozorování budeme tedy dostávat „stejně“ výsledky, ať už naše realizace procesu začala výběrem kteréhokoli  $\omega$ . Tuto vlastnost vyjadřuje ergodická věta (věta 19). V této práci využijeme ergodicitu procesu  $RCA(p)$  pro odvození konvergence bootstrapové statistiky  $\sqrt{n} (\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$  k normálnímu rozdělení.

### 2.1.2 Odhad autoregresního parametru procesu $RCA(p)$

Dá se očekávat, že v praxi při řešení takřka libovolného problému zahrnujícího autoregresní proces budeme potřebovat odhad jeho koeficientů  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)'$ , v některých případech i odhad rozptylu chybové složky  $\sigma^2$ . Symbol  $\varphi$  zde používáme pro odlišení deterministického parametru klasického autoregresního modelu od střední hodnoty náhodného parametru modelu  $RCA(p)$ . V případě klasického autoregresního modelu  $AR(p)$ , tedy modelu splňujícího vztah

$$\mathcal{X}_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i \mathcal{X}_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t \geq p+1,$$

lze parametr  $\varphi$  odhadnout metodou nejmenších čtverců. Odhad metodou nejmenších čtverců je dán vzorcem

$$\hat{\varphi}_n = \left( \sum_{t=p+1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=p+1}^n \mathbf{X}_{t-1} X_t, \quad (2.3)$$

kde  $n$  je počet pozorování. Odhad parametru  $\sigma^2$  má tvar

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n (X_t - \hat{\varphi}'_n \mathbf{X}_{t-1})^2.$$

U modelu  $RCA(p)$  nás přirozeně také zajímá hodnota autoregresních koeficientů  $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_p(t))'$ . V tomto případě jde ale o náhodné veličiny a jako takové je přímo odhadovat nelze. Spokojíme se tedy s odhadem jejich střední hodnoty  $\boldsymbol{\beta}$ . Kromě  $\sigma^2$  jsou nyní v modelu navíc další neznámé parametry, které v některých případech může být potřeba také odhadnout. Jde o jednotlivé složky matice  $\boldsymbol{\Omega} = \text{var } \mathbf{b}(t)$ . Odhad těchto parametrů budeme potřebovat při aplikaci bootstrapu pro aproximaci rozdělení odhadu  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$ .

I v případě náhodných koeficientů lze parametr  $\boldsymbol{\beta}$  odhadnout metodou nejmenších čtverců. Odhad  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$  má stejný tvar, jako odhad autoregresních koeficientů u modelu  $AR(p)$  daný vzorcem (2.3). Pro zjednodušení značení budeme nadále zpravidla předpokládat, že máme k dispozici pozorování  $X_{-p+1}, \dots, X_0, X_1, \dots, X_n$ . Odhad  $\boldsymbol{\beta}$  tedy bude mít podobu

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_n = \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} X_t. \quad (2.4)$$

V Nicholls a Quinn (1982), věta 3.1 je odvozena silná konzistence odhadu  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$  a konvergence statistiky  $\sqrt{n} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})$  k normálnímu rozdělení.

**Věta 4.** *Nechť  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je striktně stacionární  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný proces  $RCA(p)$  splňující předpoklady (A1) a (A2) a  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$  je odhad  $\boldsymbol{\beta}$  daný vzorcem (2.4). Pak*

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_n \xrightarrow{s.j.} \boldsymbol{\beta}, \quad n \rightarrow \infty.$$

*Platí-li navíc*

$$(A4) \quad E \mathcal{X}_t^4 < \infty,$$

*pak*

$$\sqrt{n} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{as}), \quad n \rightarrow \infty,$$

*kde  $\boldsymbol{\Sigma}_{as} = \sigma^2 \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} E [(\mathbf{X}_t \mathbf{X}'_t)(\mathbf{X}'_t \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X}_t)] \mathbf{V}^{-1}$  a  $\mathbf{V} = E [\mathbf{X}_t \mathbf{X}'_t]$ .*

Symbolem  $\xrightarrow{d}$  zde značíme konvergenci v distribuci. Odhad parametru  $\sigma^2$  se již ovšem liší od odhadu v modelu  $AR(p)$ , neboť variabilita je v modelu  $RCA(p)$  rozložena mezi  $\sigma^2$  a  $\boldsymbol{\Omega}$ . My se v následujících sekcích budeme zabývat odhadem



těchto parametrů v modelu  $RCA(1)$  a  $RCA(2)$ . Výpočet jejich odhadů v modelu  $RCA(p)$  lze nalézt v knize Nicholls a Quinn (1982), rovnice (3.2.4) a (3.2.5). V této knize lze také nalézt postup pro odhad parametrů modelu metodou maximální věrohodnosti a odvození konzistence této metody.

## 2.2 Proces RCA(1)

V literatuře se často pracuje jen s autoregresním procesem s náhodnými koeficienty řádu 1. Z části je to kvůli jednoduššímu a přehlednějšímu zápisu, nicméně některé výsledky či postupy byly zatím odvozeny jen pro model  $RCA(1)$ . I my se budeme nyní věnovat procesu  $RCA(1)$ , kde  $\mathcal{X}_t$  jsou jednorozměrné náhodné veličiny a  $t \in \mathbb{Z}$ . V této části přejdeme od značení  $b_1(t)$  a  $B_1(t)$  k  $b_t$  a  $B_t$ , střední hodnotu autoregresního koeficientu  $b_t$  budeme značit  $\beta$  a jeho rozptyl  $\omega^2$ . Struktura procesu  $RCA(1)$  je určena vztahem

$$\mathcal{X}_t = b_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

který se často ještě rozepisuje do tvaru

$$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t) \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

kde  $\{B_t : B_t = b_t - \beta, t \in \mathbb{Z}\}$  je posloupnost *iid* náhodných veličin, pro které platí  $E B_0 = 0$  a  $\text{var } B_0 = \omega^2$ .

### 2.2.1 Stacionarita

V sekci 2.1.1 jsme uvedli postačující podmínky pro slabou a striktní stacionaritu procesu  $RCA(p)$ , které se v případě procesu  $RCA(1)$  samozřejmě výrazně zjednoduší. Matice v předpokladu (A3) má v jednorozměrném případě tvar  $\beta^2 + \omega^2$ , předpoklad pro stacionaritu se tedy zredukuje na podmínku

$$(A3') \quad \beta^2 + \omega^2 < 1.$$

Podívejme se na střední hodnotu a rozptyl  $\mathcal{X}_t$ :

$$E \mathcal{X}_t = E [(\beta + B_t) \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t] = \beta E \mathcal{X}_{t-1},$$

neboť  $E B_t = E \varepsilon_t = 0$ . Má-li být proces striktně či slabě stacionární, pak  $E \mathcal{X}_t = E \mathcal{X}_{t-1}$ , a tudíž buď  $E \mathcal{X}_t = 0$  nebo  $\beta = 1$ . Z předpokladu  $\beta^2 + \omega^2 < 1$  ale vyplývá také  $|\beta| < 1$ , musí tedy platit  $E \mathcal{X}_t = 0$ .

$$\text{var } \mathcal{X}_t = E [(\beta + B_t) \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t]^2 = E (\beta + B_t)^2 E \mathcal{X}_{t-1}^2 + E \varepsilon_t^2,$$

neboť  $B_t$  a  $\mathcal{X}_{t-1}$  jsou nezávislé a  $\varepsilon_t$  nezávisí ani na  $B_t$  ani na  $\mathcal{X}_{t-1}$ . Dále je

$$E (\beta + B_t)^2 = \beta^2 + 2\beta E B_t + E B_t^2 = \beta^2 + \omega^2,$$

ze stacionarity tedy dostaneme

$$\text{var } \mathcal{X}_t = (\beta^2 + \omega^2) \text{var } \mathcal{X}_t + \sigma^2,$$

a tudíž

$$\text{var } \mathcal{X}_t = \frac{\sigma^2}{1 - \beta^2 - \omega^2}. \quad (2.7)$$

Po vydání Nicholls a Quinn (1982) se i další autoři zabývali procesem  $RCA(1)$  s cílem najít méně omezující předpoklady pro jeho stacionaritu. V článku Aue a kol. (2006), věta 3.1, je dokázána stacionarita za slabších podmínek:

**Věta 5.** *Nechť platí předpoklady:*

(A1')  $\{(\varepsilon_t, B_t)', t \in \mathbb{Z}\}$  je posloupnost iid náhodných vektorů.

(A2')  $E \ln^+ |\varepsilon_1| < \infty$ ,  $E \ln^+ |b_1| < \infty$ ,  $-\infty < E \ln |b_1| < 0$ ,

kde  $\ln^+(x)$  značí kladnou část přirozeného logaritmu. Pak řada

$$\mathcal{X}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} b_{t-j} \quad (2.8)$$

konverguje absolutně s pravděpodobností 1 pro každé  $t \in \mathbb{Z}$  a náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je jediné kauzální stacionární řešení rovnice (2.5).

Výraz 2.8 získáme tak, že rovnici (2.5) rozepíšeme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_t &= \varepsilon_t + b_t (b_{t-1} \mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \varepsilon_t + b_t \varepsilon_{t-1} + b_t b_{t-1} (b_{t-2} \mathcal{X}_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} b_{t-j}. \end{aligned}$$

**Závěr:** Požadujeme-li od procesu  $RCA(1)$  pouze slabou stacionaritu, stačí ověřit podmínky  $E \mathcal{X}_1 = 0$  a  $\beta^2 + \omega^2 < 1$  a požadavky na nezávislost prvků procesů chybových složek  $\{\varepsilon_t\}$  a  $\{B_t\}$  a jejich první a druhé momenty. Pro striktní stacionaritu potřebujeme navíc, aby složky procesů  $\{\varepsilon_t\}$  a  $\{B_t\}$  byly *iid*. Druhou možností, jak zjistit, zda je daný proces stacionární, je ověřit předpoklady (A1') a (A2'). Není zde kladena podmínka na existenci a konečnost druhých momentů  $\omega^2$  a  $\sigma^2$ , podmínka (A2') je tedy slabší než předpoklad  $\beta^2 + \omega^2 < 1$ . Nicméně její ověření může být problematictější.

## 2.2.2 Odhad parametru $\beta$ procesu $RCA(1)$

Již víme, že při splnění předpokladů (A1) - (A3), eventuálně (A1') a (A2'), je proces  $RCA(1)$  striktně stacionární a odhad parametru  $\beta$  metodou nejmenších čtverců je konzistentní. Je-li navíc splněn předpoklad (A4), statistika  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  konverguje v distribuci k normálnímu rozdělení. Odhad metodou nejmenších čtverců má tvar

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}. \quad (2.9)$$

a asymptotická varianční matice  $\Sigma_{as}$  se zredukuje na asymptotický rozptyl

$$\sigma_{as}^2 = \frac{\sigma^2}{E \mathcal{X}_1^2} + \frac{\omega^2 E \mathcal{X}_1^4}{(E \mathcal{X}_1^2)^2}, \quad (2.10)$$

*Poznámka.* V předpokladu (A2) je zahrnuta podmínka  $0 < \omega^2$ . Je-li  $\omega^2 = 0$ , dostaneme klasický autoregresní proces  $AR(1)$ , jehož parametr značíme  $\varphi$ . Asymptotický rozptyl statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\varphi}_n - \varphi)$  u striktně stacionárního procesu  $AR(1)$  má tvar  $\sigma^2/\text{var } \mathcal{X}_1$ , kde  $\text{var } \mathcal{X}_1 = \sigma^2/(1 - \varphi^2)$ , viz. Prášková (2004b), věta 10.1. Protože u stacionárního procesu  $RCA(1)$  je

$$E \mathcal{X}_1^2 = \text{var } \mathcal{X}_1 = \frac{\sigma^2}{1 - \beta^2 - \omega^2},$$

viz. vzorec (2.7), dojdeme při  $\omega^2 = 0$  ke stejnému výsledku.

Obvykle  $\sigma^2$  a  $\omega^2$  jsou neznámé parametry a stejně tak neznáme momenty  $E \mathcal{X}_1^2$  a  $E \mathcal{X}_1^4$ . Přesnou hodnotu asymptotického rozptylu  $\sigma_{as}^2$  tedy spočítat nemůžeme. Můžeme ji alespoň aproximovat tak, že nahradíme neznámé momenty  $\mathcal{X}_t$ ,  $\varepsilon_t$  a  $b_t$  jejich konzistentními odhady.

### Odhad $E \mathcal{X}_t^2$ a $E \mathcal{X}_t^4$

Již víme, že je-li proces  $RCA(1)$  stacionární, pak

$$E \mathcal{X}_t^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \beta^2 - \omega^2}. \quad (2.11)$$

V Kreiss a Fink (2013) je odvozen i tvar  $E \mathcal{X}_t^4$ , a to následujícím způsobem. Za podmínek, které jsme stanovili v předpokladech (A1') a (A2') a které zaručují striktní stacionaritu procesu  $RCA(1)$ , lze využít výsledek odvozený v Aue a kol. (2006), lemma 3, týkající se vyšších momentů náhodných veličin  $\mathcal{X}_t$ :

**Lemma 6.** *Nechť  $\{(B_t, \varepsilon_t)', t \in \mathbb{Z}\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných vektorů a  $-\infty \leq E \ln^+ |b_0| < 0$ . Nechť pro nějaké  $\nu \geq 1$  platí  $E |\varepsilon_0|^\nu < \infty$ ,  $E |B_0|^\nu < \infty$  a  $E |b_0|^\nu < 1$ . Pak  $E |\mathcal{X}_t|^\nu < \infty$ .*

Stacionarity sice můžeme dosáhnout za předpokladů (A1') a (A2'), pro odhad  $E \mathcal{X}_t^4$  ale potřebujeme ještě zesílit předpoklady kladené na chybové složky procesu  $RCA(1)$ . Místo předpokladu (A1') nebo (A1) a (A2) tedy nadále budeme předpokládat:

- (B1) Posloupnost  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  splňuje předpoklad (A1),  $E \varepsilon_t^k < \infty$  pro  $k \leq 8$ , přičemž liché momenty jsou nulové. Označme  $\delta_4 = E \varepsilon_t^4$ .
- (B2) Posloupnost  $\{b_t, t \in \mathbb{Z}\}$  splňuje předpoklad (A2) a pro  $B_t = b_t - \beta$  platí  $E B_t^k < \infty$  pro  $k \leq 8$ , přičemž liché momenty jsou nulové. Označme  $\alpha_4 = E B_t^4$ .

Při splnění podmínek (B1), (B2) a (A2') se předpoklady lemmatu 6 zredukují na podmínku  $E |b_0|^\nu < 1$ , neboli  $E |\beta + B_0|^\nu < 1$ . Protože liché momenty  $B_0$  jsou nulové, dostaneme pro  $\nu = 4, 8$

$$\begin{aligned} E (\beta + B_0)^4 &= \beta^4 + 4\beta^3 E B_0 + 6\beta^2 E B_0^2 + 4\beta E B_0^3 + E B_0^4 \\ &= \beta^4 + 6\beta^2 \omega^2 + \alpha_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E (\beta + B_0)^8 &= \beta^8 + 8\beta^7 E B_0 + 28\beta^6 E B_0^2 + 56\beta^5 E B_0^3 + 70\beta^4 E B_0^4 + 56\beta^3 E B_0^5 \\ &\quad + 28\beta^2 E B_0^6 + 8\beta E B_0^7 + E B_0^8 \\ &= \beta^8 + 28\beta^6 \omega^2 + 70\beta^4 \alpha_4 + 28\beta^2 E B_0^6 + E B_0^8. \end{aligned}$$

Z lemmatu tedy vyplývá, že

$$E \mathcal{X}_t^2 < \infty \Leftrightarrow \beta^2 + \omega^2 < 1,$$

$$E \mathcal{X}_t^4 < \infty \Leftrightarrow \beta^4 + 6\beta^2 \omega^2 + \alpha_4 < 1,$$

$$E \mathcal{X}_t^8 < \infty \Leftrightarrow \beta^8 + 28\beta^6 \omega^2 + 70\beta^4 \alpha_4 + 28\beta^2 E B_0^6 + E B_0^8 < 1.$$

Konečnost  $E \mathcal{X}_t^8$  sice nyní k ničemu nepotřebujeme, v následující sekci ji ale využijeme.

Díky stacionaritě procesu  $\{\mathcal{X}_t\}$  a nulovosti lichých momentů  $\varepsilon_t$  a  $B_t$  dostaneme

$$\begin{aligned} E \mathcal{X}_t^4 &= E [b_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t]^4 \\ &= E (\beta + B_0)^4 E \mathcal{X}_{t-1}^4 + 6 E (\beta + B_0)^2 E \mathcal{X}_{t-1}^2 E \varepsilon_t^2 + E \varepsilon_t^4 \\ &= (\beta^4 + 6\beta^2 \omega^2 + \alpha_4) E \mathcal{X}_t^4 + 6(\beta^2 + \omega^2) \sigma^2 E \mathcal{X}_t^2 + \delta_4, \end{aligned}$$

a po dosazení výrazu (2.11) do rovnice

$$E \mathcal{X}_t^4 (1 - \beta^4 - 6\beta^2 \omega^2 - \alpha_4) = 6(\beta^2 + \omega^2) \sigma^2 E \mathcal{X}_t^2 + \delta_4$$

dostaneme

$$E \mathcal{X}_t^4 = \frac{\delta_4 + 6\sigma^4 \frac{\beta^2 + \omega^2}{1 - \beta^2 - \omega^2}}{1 - \beta^4 - 6\beta^2 \omega^2 - \alpha_4}. \quad (2.12)$$

Pro odhad  $E \mathcal{X}_t^2$  a  $E \mathcal{X}_t^4$  tedy můžeme použít vzorce (2.11) a (2.12), ve kterých nahradíme parametry  $\omega^2$ ,  $\sigma^2$ ,  $\beta$ ,  $\delta_4$  a  $\alpha_4$  jejich odhady. Jsou-li tyto odhady konzistentní, budou konzistentní i odhady  $E \mathcal{X}_t^2$  a  $E \mathcal{X}_t^4$ . Odhad  $\beta$  již známe a v následujících sekcích si ukážeme, jak získat i odhady zbylých parametrů.

$E \mathcal{X}_t^2$  a  $E \mathcal{X}_t^4$  samozřejmě můžeme také odhadnout rovnou z pozorování  $X_0, \dots, X_n$ . Pro odhad  $E \mathcal{X}_t^2$  spočteme  $X_0^2, \dots, X_n^2$  a střední hodnotu odhadneme výběrovým průměrem  $(n+1)^{-1} \sum_{i=0}^n X_i^2$ , který je také konzistentním odhadem  $E \mathcal{X}_t^2$ . Obdobně odhadneme  $E \mathcal{X}_t^4$ . Během simulací se podíváme, který přístup dává výsledky bližší skutečnosti.

## Odhad parametrů $\omega^2$ a $\sigma^2$

Parametry  $\sigma^2$  a  $\omega^2$  lze odhadnout opět metodou nejmenších čtverců způsobem popsáním v Nicholls a Quinn (1982), který si teď ukážeme.

Rovnici (2.5) definující strukturu procesu  $RCA(1)$  můžeme přepsat následujícím způsobem:

$$\mathcal{X}_t = b_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t = (\beta + B_t) \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t = \beta \mathcal{X}_{t-1} + u_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.13)$$

kde  $u_t = B_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t$ . Zřejmě  $\mathbb{E} u_t = 0$  a  $\text{var } u_t = \mathbb{E} u_t^2 = \omega^2 \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 + \sigma^2$ . Rozptyl  $u_t$  sice závisí na hodnotě  $\mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2$ , kterou neznáme, ale díky stacionaritě procesu  $\{\mathcal{X}_t\}$  je konstantní. Model  $RCA(1)$  jsme tedy zapsali jako model  $AR(1)$  s inovacemi  $u_t$ . Podívejme se nyní na momenty  $u_t$  podmíněné informacemi známými v čase  $t-1$ , tedy  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{F}_{t-1}$ . Protože  $\{B_s\}$  a  $\{\varepsilon_s\}$  jsou navzájem nezávislé posloupnosti *iid* veličin, jsou náhodné veličiny  $\varepsilon_t$  i  $B_t$  nezávislé na  $\mathcal{F}_{t-1}$ . Oproti tomu ze zápisu (2.8) vidíme, že  $\mathcal{X}_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -měřitelná náhodná veličina. Tudíž:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [u_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E} [B_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathcal{X}_{t-1} \mathbb{E} [B_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \mathbb{E} [\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathcal{X}_{t-1} \mathbb{E} B_t + \mathbb{E} \varepsilon_t \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [u_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E} [B_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + 2B_t \mathcal{X}_{t-1} \varepsilon_t + \varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathbb{E} [B_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] + 2\mathcal{X}_{t-1} \mathbb{E} [B_t | \mathcal{F}_{t-1}] \mathbb{E} [\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \mathbb{E} [\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathbb{E} B_t^2 + \mathbb{E} \varepsilon_t^2 \\ &= \mathcal{X}_{t-1}^2 \omega^2 + \sigma^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Vidíme, že pokud podmíníme momenty  $u_t$  znalostí  $\mathcal{F}_{t-1}$ , tyto inovace v modelu přepsaném jako proces  $AR(1)$  sice mají nulovou (podmíněnou) střední hodnotu, ale nemají konstantní (podmíněný) rozptyl. Označme  $\hat{u}_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}$  rezidua odhadnutého modelu (2.13). S přihlédnutím ke tvaru podmíněné střední hodnoty reziduí  $u_t^2$  spočteme odhady  $\omega^2$  a  $\sigma^2$  minimalizací výrazu

$$\sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^2 - \mathbb{E} [u_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}])^2 = \sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^2 - \mathcal{X}_{t-1}^2 \omega^2 - \sigma^2)^2$$

vzhledem k  $\omega^2$  a  $\sigma^2$ .

Algoritmus pro postupný odhad všech tří parametrů modelu  $RCA(1)$  tedy vpadá následovně:

1. Odhadneme parametr  $\beta$  metodou nejmenších čtverců pomocí vzorce (2.9).
2. Pomocí odhadu  $\hat{\beta}_n$  z předchozího kroku spočteme pro  $t = 1, \dots, n$  rezidua  $\hat{u}_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}$ .
3. Spočteme druhé mocniny pozorování  $X_t^2$  a reziduí  $\hat{u}_t^2$ .
4. Parametry  $\sigma^2$  a  $\omega^2$  odhadneme metodou nejmenších čtverců jako parametry lineárního regresního modelu  $\hat{u}_t^2 = \sigma^2 + \mathcal{X}_{t-1}^2 \omega^2 + \delta_t$ , kde  $\delta_t$  je nepozorovaná chybová složka, o které předpokládáme, že má nulovou střední hodnotu a konstantní konečný rozptyl. Odhady parametrů jsou tedy dány předpisem

$$\hat{\omega}_n^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 (X_{t-1}^2 - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n X_{s-1}^2)}{\sum_{t=1}^n (X_{t-1}^2 - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n X_{s-1}^2)^2} \quad \text{a} \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 - \hat{\omega}_n^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2.$$

V Nicholls a Quinn (1982), lemma 3.2 a věta 3.2, je dokázáno, že je-li  $\{\mathcal{X}_t\}$  striktně stacionární a  $E \mathcal{X}_t^4 < \infty$ , pak  $\hat{\omega}_n^2$  a  $\hat{\sigma}_n^2$  jsou (silně) konzistentní odhady parametrů  $\omega^2$  a  $\sigma^2$ . Je-li navíc splněn předpoklad

$$(A5) \ E \mathcal{X}_t^8 < \infty,$$

pak pro  $n \rightarrow \infty$  platí

$$\begin{aligned} \sqrt{n} (\hat{\omega}_n^2 - \omega^2) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \tau^2), \\ \sqrt{n} (\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \nu^2). \end{aligned}$$

Asymptotické rozptyly  $\tau^2$  a  $\nu^2$  závisí na momentech náhodných veličin  $\mathcal{X}_t$  a  $B_t$  a  $\varepsilon_t$  do řádu 8. Jejich odvození a tvar jsou uvedeny v Nicholls a Quinn (1982), Appendix 3.2.

### Odhady $\alpha_4$ a $\delta_4$

Ukážeme si ještě odhady čtvrtých momentů náhodných veličin  $B_t$  a  $\varepsilon_t$ , které značíme po řadě  $\alpha_4$  a  $\delta_4$ . Můžeme je využít pro odhad  $E \mathcal{X}_t^4$  dosazením do vzorce (2.12), ale především je budeme potřebovat v následující sekci při aplikaci bootstrapu. Vyjdeme ze vztahu  $u_t = B_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t$ . Opět využijeme nezávislosti  $B_t$ ,  $\varepsilon_t$  a  $\mathcal{X}_{t-1}$  a nulovosti lichých momentů  $B_t$  a  $\varepsilon_t$  a dostaneme

$$\begin{aligned} E u_t^4 &= E [B_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t]^4 \\ &= E [B_t^4 \mathcal{X}_{t-1}^4 + 4B_t^3 \mathcal{X}_{t-1}^3 \varepsilon_t + 6B_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 \varepsilon_t^2 + 4B_t \mathcal{X}_{t-1} \varepsilon_t^3 + \varepsilon_t^4] \\ &= \alpha_4 E \mathcal{X}_{t-1}^4 + 6\omega^2 \sigma^2 E \mathcal{X}_{t-1}^2 + \delta_4. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Platí tedy  $E u_t^4 - 6\omega^2 \sigma^2 E \mathcal{X}_{t-1}^2 = \alpha_4 E \mathcal{X}_{t-1}^4 + \delta_4$ . Jsou-li  $\varepsilon_t$  *iid* náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou, můžeme tuto rovnici přepsat na

$$u_t^4 - 6\omega^2 \sigma^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 = \alpha_4 \mathcal{X}_{t-1}^4 + \delta_4 + \varepsilon_t.$$

Podíváme-li se na pravou stranu této rovnice, nabízí se opět odhadnout  $\alpha_4$  a  $\delta_4$  pomocí lineární regrese. V rovnici se ale vyskytují členy, které neznáme. Neznámé hodnoty  $\omega^2$  a  $\sigma^2$  můžeme nahradit konzistentními odhady  $\hat{\omega}_n^2$  a  $\hat{\sigma}_n^2$ , které jsme získali v předchozích krocích, a pro odhad reziduí opět využijeme vztah  $u_t = \mathcal{X}_t - \beta \mathcal{X}_{t-1}$ . Algoritmus pro odhad  $\alpha_4$  a  $\delta_4$  tudíž vypadá následovně:

1. Spočteme odhady  $\hat{\beta}_n$ ,  $\hat{\omega}_n^2$  a  $\hat{\sigma}_n^2$ .
2. Spočteme rezidua  $\hat{u}_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}$  pro  $t = 1, \dots, n$ .
3. Spočteme modifikovaná rezidua  $\tilde{u}_t = \hat{u}_t^4 - 6\hat{\omega}_n^2 \hat{\sigma}_n^2 X_{t-1}^2$ .
4. Odhady  $\alpha_4$  a  $\delta_4$  získáme metodou nejmenších čtverců z modelu lineární regrese  $\tilde{u}_t = \delta_4 + \alpha_4 X_{t-1}^4 + \varepsilon_t$ , tedy

$$\hat{\alpha}_{4n} = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^4 - 6\hat{\omega}_n^2 \hat{\sigma}_n^2 X_{t-1}^2) (X_{t-1}^4 - \bar{X}_n^4)}{\sum_{t=1}^n (X_{t-1}^4 - \bar{X}_n^4)^2} \quad (2.17)$$

a

$$\hat{\delta}_{4n} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^4 - 6\hat{\omega}_n^2 \hat{\sigma}_n^2 X_{t-1}^2) - \hat{\alpha}^4 \bar{X}_n^4, \quad (2.18)$$

$$\text{kde } \bar{X}_n^4 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4.$$

Definujme ještě tzv.  $\sqrt{n}$ -konzistentní odhady:

**Definice 2.** *Buď  $T_n$  odhad parametru  $\theta$ . Řekneme, že  $T_n$  je  $\sqrt{n}$ -konzistentní, jestliže náhodná posloupnost  $\sqrt{n}(T_n - \theta)$  je stochasticky omezená, neboli*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \exists N < \infty : P(|\sqrt{n}(T_n - \theta)| > K) < \varepsilon, \forall n > N.$$

*V takovém případě také píšeme  $(T_n - \theta) = \mathcal{O}_P(\frac{1}{\sqrt{n}})$ .*

Obdobně bychom mohli obecněji definovat  $a_n$ -konzistentní odhady, u kterých je stochasticky omezená statistika  $a_n(T_n - \theta)$ . Zřejmě je-li  $T_n$   $\sqrt{n}$ -konzistentní odhad  $\theta$ , pak  $(T_n - \theta) \xrightarrow{P} 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ , tudíž  $T_n$  je konzistentní odhad  $\theta$ .

Kreiss a Fink (2013) ve větě 2.2 dokázali, že jsou-li  $\hat{\beta}_n$ ,  $\hat{\omega}_n^2$  a  $\hat{\sigma}_n^2$   $\sqrt{n}$ -konzistentní odhady parametrů  $\beta$ ,  $\omega^2$  a  $\sigma^2$  a  $E \mathcal{X}_t^8 < \infty$ , pak odhady  $\hat{\alpha}_{4n}$  a  $\hat{\delta}_{4n}$  spočtené podle právě popsaného algoritmu jsou konzistentní odhady parametrů  $\alpha_4$  a  $\delta_4$ . To znamená, že pro získání konzistentních odhadů  $\alpha_4$  a  $\delta_4$  nemusíme nutně ve vzorcích (2.17) a (2.18) použít odhady  $\hat{\beta}_n$ ,  $\hat{\omega}_n^2$  a  $\hat{\sigma}_n^2$  spočtené metodou nejmenších čtverců popsané v této kapitole, ale můžeme dosadit i jiné jejich  $\sqrt{n}$ -konzistentní odhady.

*Závěr:* Postupně jsme ukázali, že za platnosti předpokladů (B1), (B2), (A2'), (A4) a (A5) můžeme metodou nejmenších čtverců spočítat konzistentní odhady parametrů  $\beta$ ,  $\sigma^2$  a  $\omega^2$ , a že statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ ,  $\sqrt{n}(\hat{\omega}_n^2 - \omega^2)$  a  $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)$  konvergují v distribuci k normálnímu rozdělení. Ukázali jsme také podmínky, za kterých jsou splněny předpoklady (A4) a (A5), a jak se získají odhady čtvrtých momentů náhodných veličin  $\varepsilon_t$  a  $B_t$ , které využijeme v následující části.

Pro získání všech odhadů jsme použili metodu nejmenších čtverců. Není to však jediný možný přístup. Odhadům parametrů procesu  $RCA(p)$  metodou maximální kvazi-věrohodnosti se věnovali Nicholls a Quinn (1982). Aue a kol. (2006) pak zmírnili předpoklady pro konzistenci odhadů metodou maximální věrohodnosti pro parametry modelu  $RCA(1)$ .

## 2.3 Použití metody bootstrap u procesu RCA(1)

### 2.3.1 Reziduální bootstrap

Metoda bootstrap byla již v literatuře mnohokrát použita pro aproximaci rozdělení autoregresního parametru  $\varphi$  klasického autoregresního procesu

$AR(1)$ . Jako vhodná metoda se nabízí reziduální bootstrap, který jsme popsali v sekci 1.2.2. Tato metoda spočívá v odhadnutí parametru  $\varphi$ , spočtení reziduí  $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\varphi}_n X_{t-1}$ , jejich vycentrování a generování bootstrapových reziduí  $\varepsilon_t^*$  výběrem s vrácením z množiny centrovaných reziduí. Výsledná bootstrapová rezidua jsou nezávislá (podmíněně) a stejně rozdělená.

V případě procesu  $RCA(1)$  můžeme postupovat analogicky, tedy odhadnout  $\beta$  a spočíst rezidua  $\hat{u}_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}$ . Použití reziduálního bootstrapu, který je založený na *iid* generování bootstrapových reziduí, zde ale nedává smysl. Inovace  $u_t$  mají tvar  $u_t = B_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t$ , takže v sobě zahrnují obě složky variability modelu ( $B_t$  a  $\varepsilon_t$ ) a závisí také na předchozí hodnotě procesu  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ . Podmíníme-li jejich střední hodnotu a rozptyl informacemi o  $\varepsilon_t$  a  $B_t$  do času  $t-1$  jako v (2.14) a (2.15), vidíme, že jde o posloupnost martingalových diferencí s podmíněným rozptylem  $\omega^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + \sigma^2$ . Jde tedy o podmíněně heteroskedastický model. V Prášková (2002), věta 2 je dokázáno, že reziduální bootstrap tak, jak jsme ho popsali v sekci 1.2.2, není v takovém případě konzistentní. Pokud chybovou složku autoregresního procesu tvoří posloupnost martingalových diferencí, statistika  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$  konverguje k normálnímu rozdělení s jiným rozptylem, než je asymptotický rozptyl statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ . Důvodem je, že vygenerovaná bootstrapová rezidua jsou *iid* a neodráží závislostní strukturu v původních datech.

Kreiss a Fink (2013) navrhli modifikaci reziduálního bootstrapu tak, aby tuto metodu bylo možné použít i pro proces  $RCA(1)$ . Zásadní odlišnost od dříve popsaného reziduálního bootstrapu spočívá v tom, že metoda popsaná v Kreiss a Fink (2013) počítá ne jedny, ale dvoje rezidua, zvláště pro variabilitu obsaženou v autoregresním koeficientu  $b_t$ , respektive  $B_t$ , a zvláště pro inovace  $\varepsilon_t$  představující vnější vlivy, které působí na proces, kterým pozorování  $X_1, \dots, X_n$  vznikají.

Pro konstrukci bootstrapových replik se používá odhad parametru  $\hat{\beta}_n$  spočtený metodou nejmenších čtverců. V okamžiku, kdy máme vygenerovaná bootstrapová rezidua  $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*$  a  $B_1^*, \dots, B_n^*$ , vytvoříme bootstrapový výběr  $X_0^*, \dots, X_n^*$  tak, že zvolíme  $X_0^* = X_0$  a ostatní hodnoty spočteme rekurzivně podle vzorce

$$X_t^* = (\hat{\beta}_n + B_t^*) X_{t-1}^* + \varepsilon_t^*. \quad (2.19)$$

Postup, kterým získáme bootstrapová rezidua, si nyní popíšeme.

### Bootstrapová rezidua $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*$

Předpokládejme, že máme realizaci  $X_0, \dots, X_n$  procesu  $RCA(1)$ . Připomeňme si jeho strukturu:

$$\mathcal{X}_t = \beta \mathcal{X}_{t-1} + B_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.20)$$

Abychom mohli z našich pozorování spočítat rezidua  $\hat{\varepsilon}_t$ , aniž by v nich byla zahrnutá i variabilita obsažená v náhodném autoregresním koeficientu  $b_t$ , respektive jeho centrované verzi  $B_t$ , potřebovali bychom ze vztahu (2.20) nějak odstranit člen  $B_t \mathcal{X}_{t-1}$ . Podívejme se, jak vypadá střední hodnota členů na pravé straně rovnice (2.20) podmíněná znalostí  $\mathcal{X}_{t-1}$ . Zatímco  $E[\beta \mathcal{X}_{t-1} | \mathcal{X}_{t-1}] = \beta \mathcal{X}_{t-1}$ ,



tedy podmíněná střední hodnota prvního členu je přímo hodnota tohoto členu,  $\mathbf{E} [B_t \mathcal{X}_{t-1} | \mathcal{X}_{t-1}] = \mathcal{X}_{t-1} \mathbf{E} B_t = 0$ . Druhý člen tedy ze střední hodnoty po podmínění znalostí  $\mathcal{X}_{t-1}$  vypadne. Této vlastnosti modelu využijeme pro konstrukci bootstrapových reziduí  $\varepsilon_t^*$ . Protože  $B_t$  je náhodná veličina s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem  $\omega^2$ , nedopustíme se příliš velké chyby, když člen  $B_t \mathcal{X}_{t-1}$  v případě, že je  $\mathcal{X}_{t-1}$  dostatečně malé, ve vztahu (2.20) zanedbáme. Rovnici (2.20) přepíšeme na

$$\mathcal{X}_t = \beta \mathcal{X}_{t-1} + (\varepsilon_t + \delta_t) \approx \beta \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t,$$

kde  $\delta_t$  jsou náhodné veličiny, pro které platí  $\mathbf{E} [\delta_t | \mathcal{X}_{t-1}] = 0$ . Rezidua  $\varepsilon_t^*$  budeme generovat pomocí tohoto přibližného vztahu následujícím algoritmem:

1. Spočteme odhad  $\hat{\beta}_n$  metodou nejmenších čtverců.
2. Zvolíme  $m = m(n) > 0$  tak, aby  $m(n) \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ .
3. Najdeme podmnožinu  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , která bude obsahovat ta pozorování  $X_t$ , pro která platí  $|X_{t-1}| < m$ , tzn. jejich předchozí pozorování je „dostatečně malé“. Indexy pozorování  $X_t$ , která tuto podmínku splňují, označíme  $T_1, \dots, T_{N_\varepsilon}$ , kde  $N_\varepsilon = \sum_{t=1}^n \mathbb{I}_{\{|X_{t-1}| < m\}}$ .
4. Pro  $t = T_1, \dots, T_{N_\varepsilon}$  spočteme rezidua  $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}$ .
5. Rezidua  $\hat{\varepsilon}_t$  vycentrujeme, tedy spočteme  $\tilde{\varepsilon}_t = \hat{\varepsilon}_t - \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{s=1}^{N_\varepsilon} \hat{\varepsilon}_s$ , pro  $t = T_1, \dots, T_{N_\varepsilon}$ .
6. Bootstrapová rezidua  $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*$  vygenerujeme výběrem s vracením z množiny  $\{\tilde{\varepsilon}_{T_1}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{T_{N_\varepsilon}}\}$ .

Vzniklá bootstrapová rezidua jsou nezávislá a stejně rozdělená, přičemž jejich rozdělení je určené empirickou distribuční funkcí centrovaných reziduí  $\tilde{\varepsilon}_t$ . Díky centrování odhadnutých reziduí je dodržena nulová střední hodnota bootstrapových reziduí:

$$\mathbf{E}^* \varepsilon_t^* = \sum_{s=1}^{N_\varepsilon} \tilde{\varepsilon}_s \mathbf{P}^* (\varepsilon_t^* = \tilde{\varepsilon}_s) = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{s=1}^{N_\varepsilon} \left( \hat{\varepsilon}_s - \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{r=1}^{N_\varepsilon} \hat{\varepsilon}_r \right) = 0.$$

Je zřejmé, že hodnotu  $m$  musíme volit obezřetně. Pokud bude  $m$  příliš malé, získáme i malou množinu  $\{\tilde{\varepsilon}_{t_1}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{t_{N_\varepsilon}}\}$  a výsledná bootstrapová rezidua mohou být oproti skutečným hodnotám chyb  $\varepsilon_t$  značně zkreslená. Volbě  $m$  se budeme věnovat v simulační části.

### Bootstrapová rezidua $B_1^*, \dots, B_n^*$

Při generování reziduí  $B_1^*, \dots, B_n^*$  se naopak zaměříme na pozorování, kterým předchází pozorování dostatečně vzdálená od nuly. Cílem je tentokrát eliminovat z výrazu (2.20) chybovou složku  $\varepsilon_t$ . Předpokládejme, že  $\mathcal{X}_{t-1} \neq 0$  s.j. Pak platí

$$\mathbf{E} \left[ \frac{\varepsilon_t}{\mathcal{X}_{t-1}} | \mathcal{X}_{t-1} \right] = \frac{\mathbf{E} \varepsilon_t}{\mathcal{X}_{t-1}} = 0$$

a vztah (2.20) můžeme přepsat takto:

$$\frac{\mathcal{X}_t}{\mathcal{X}_{t-1}} = \beta \frac{\mathcal{X}_{t-1}}{\mathcal{X}_{t-1}} + B_t \frac{\mathcal{X}_{t-1}}{\mathcal{X}_{t-1}} + \frac{\varepsilon_t}{\mathcal{X}_{t-1}} = \beta + B_t + \gamma_t \approx \beta + B_t,$$

kde  $\gamma_t$  jsou náhodné veličiny, pro které platí  $\mathbf{E}[\gamma_t | \mathcal{X}_{t-1}] = 0$ . Složku  $\gamma_t$  tedy opět vynecháme a bootstrapová rezidua  $B_1^*, \dots, B_n^*$  budeme generovat pomocí algoritmu:

1. Spočteme odhad  $\hat{\beta}_n$  metodou nejmenších čtverců.
2. Zvolíme  $M = M(n) > 0$  tak, aby pro  $n \rightarrow \infty$  platilo  $M(n) \rightarrow \infty$ .
3. Najdeme podmnožinu  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , která bude obsahovat ta pozorování  $X_t$ , pro která platí  $|X_{t-1}| > M$ , tj. jejich předchozí pozorování jsou dostatečně daleko od nuly. Indexy pozorování  $X_t$ , která tuto podmínku splňují, označíme  $S_1, \dots, S_{N_B}$ , kde  $N_B = \sum_{t=1}^n \mathbb{I}_{\{|X_{t-1}| > M\}}$ .
4. Spočteme rezidua  $\hat{B}_t = \frac{X_t}{X_{t-1}} - \hat{\beta}_n$  pro  $t = S_1, \dots, S_{N_B}$ .
5. Rezidua  $\hat{B}_t$  vycentrujeme, tedy spočteme  $\tilde{B}_t = \hat{B}_t - \frac{1}{N_B} \sum_{s=1}^{N_B} \hat{B}_s$ , pro  $t = S_1, \dots, S_{N_B}$ .
6. Pro  $t = 1, \dots, n$  vygenerujeme bootstrapová rezidua  $B_1^*, \dots, B_n^*$  výběrem s vrácením z množiny  $\{\tilde{B}_{S_1}, \dots, \tilde{B}_{S_{N_B}}\}$ .

Bootstrapová rezidua  $B_1^*, \dots, B_n^*$  jsou opět nezávislá a stejně rozdělená, s nulovou střední hodnotou (podmíněnou původními pozorováními), nezávislá také na  $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*$ . Stejně jako v předchozím případě se může stát, že zvolíme-li příliš velké  $M$ , budeme bootstrapová rezidua generovat z příliš malé množiny reziduí  $\{\tilde{B}_{S_1}, \dots, \tilde{B}_{S_{N_B}}\}$ .

## Platnost reziduálního bootstrapu pro model RCA(1)

Uvedeme si nyní předpoklady nezbytné pro odvození platnosti popsané metody.

- (C0) Náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je striktně stacionární proces  $RCA(1)$  a  $\hat{\beta}_n, \hat{\sigma}_n^2, \hat{\omega}_n^2, \hat{\alpha}_n^4$  a  $\hat{\delta}_n^4$  jsou konzistentní odhady parametrů tohoto modelu.
- (C1) Náhodná veličina  $\mathcal{X}_t$  má hustotu  $f$ , pro kterou platí  $f(x) > 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  a  $f$  je spojitá v 0.
- (C2) Hustota  $f$  náhodné veličiny  $\mathcal{X}_t$  je dvakrát spojitě diferencovatelná v 0.
- (C3) Momenty  $\mathbf{E}|\mathcal{X}_t|^{4+\vartheta}$  jsou konečné pro nějaké  $\vartheta > 0$ .
- (C4) Pro  $n \rightarrow \infty$  platí  $m = m(n) \rightarrow 0$  a zároveň  $n^2 m(n)^3 \rightarrow \infty$ .
- (C5) Pro  $n \rightarrow \infty$  platí  $M = M(n) \rightarrow \infty$  a zároveň  $\sqrt{n}(1 - F(M(n))) \rightarrow \infty$  a  $\sqrt{n}F(-M(n)) \rightarrow \infty$ , kde  $F$  je distribuční funkce náhodné veličiny  $\mathcal{X}_t$ .

Za těchto předpokladů Kreiss a Fink (2013) dokázali platnost reziduálního bootstrapu. Podrobné odvození konzistence lze nalézt v sekcích 3 a 5 v Kreiss a Fink (2013). My zde uvedeme jen některá pomocná lemmata potřebná k důkazu konzistence navržené metody, která jsou zajímavá z hlediska toho, co se při aplikaci reziduálního bootstrapu děje s jednotlivými složkami procesu  $RCA(1)$ .

**Lemma 7.** *Je-li splněn předpoklad (C4), pak při  $n \rightarrow \infty$  platí:*

$$\begin{aligned} E^* \varepsilon_t^* &= 0 = E \varepsilon_t, \\ E^* \varepsilon_t^{*2} &\xrightarrow{P} \sigma^2 = E \varepsilon_t^2, \\ E^* \varepsilon_t^{*4} &\xrightarrow{P} \delta_4 = E \varepsilon_t^4. \end{aligned}$$

Jde o lemma 5.4 v Kreiss a Fink (2013). Přestože ve výrazech uvedených v lemmatu nikde  $n$  přímo nefiguruje, podmíněné střední hodnoty  $E^* \varepsilon_t^*$ ,  $E^* \varepsilon_t^{*2}$  a  $E^* \varepsilon_t^{*4}$  na  $n$  závisí. Bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^*$  vznikají výběrem s vracením z množiny centrovaných reziduí  $\{\tilde{\varepsilon}_{T_1}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{T_{N_\varepsilon}}\}$ , jejíž obsah se může měnit při různých hodnotách  $m(n)$ . Konkrétní tvar středních hodnot je

$$E^* \varepsilon_t^{*k} = E [\varepsilon_t^{*k} | X_0, \dots, X_n] = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \tilde{\varepsilon}_{T_i}^k,$$

kde  $k = 1, 2, 4$ . Podle předpokladu (C4) se při zvětšování vzorku zmenšuje mezní hodnota  $m(n)$  a v důsledku toho může dojít jak ke změně počtu reziduí  $N_\varepsilon$ , tak ke změně skladby množiny  $\{\tilde{\varepsilon}_{T_1}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{T_{N_\varepsilon}}\}$  a tudíž i změně podmíněných středních hodnot.

Obdobné vztahy platí i pro bootstrapová rezidua  $B_t^*$ , viz lemma 5.5, Kreiss a Fink (2013):

**Lemma 8.** *Je-li splněn předpoklad (C5), pak při  $n \rightarrow \infty$  platí:*

$$\begin{aligned} E^* B_t^* &= 0 = E B_t, \\ E^* B_t^{*2} &\xrightarrow{P} \omega^2 = E B_t^2, \\ E^* B_t^{*4} &\xrightarrow{P} \alpha_4 = E B_t^4. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že navržený proces generování reziduí  $\varepsilon_t^*$  a  $B_t^*$  vytváří repliky, které vykazují asymptoticky ty vlastnosti, které od nich požadujeme. Toho se využije v následující větě (věta 3.4, Kreiss a Fink (2013)):

**Věta 9.** *Jsou-li splněny předpoklady (C0) - (C5), pak pro bootstrapové repliky spočtené podle vzorce (2.19) platí:*

$$\begin{aligned} E^* X_t^{*2} &= \mathcal{O}_P(1) \Leftrightarrow E \mathcal{X}_t^2 < \infty, \\ E^* X_t^{*4} &= \mathcal{O}_P(1) \Leftrightarrow E \mathcal{X}_t^4 < \infty. \end{aligned}$$

Dále, pokud  $E \mathcal{X}_t^2 < \infty$ , resp.  $E \mathcal{X}_t^4 < \infty$ , platí

$$E^* X_t^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_{N_\varepsilon}^2}{1 - \hat{\beta}_n^2 - \hat{\omega}_{N_B}^2} \xrightarrow{P} \frac{\sigma^2}{1 - \beta^2 - \omega^2},$$

$$E^* X_t^{*4} = \frac{\hat{\delta}_{N_\varepsilon}^4 + 6\hat{\sigma}_{N_\varepsilon}^4 \frac{\hat{\beta}_n^2 + \hat{\omega}_{N_B}^2}{1 - \hat{\beta}_n^2 - \hat{\omega}_{N_B}^2}}{1 - \hat{\beta}_n^4 - 6\hat{\beta}_n^2 \hat{\omega}_{N_B}^2 - \hat{\alpha}_{N_B}^4} \xrightarrow{P} \frac{\delta_4 + 6\sigma^4 \frac{\beta^2 + \omega^2}{1 - \beta^2 - \omega^2}}{1 - \beta^4 - 6\beta^2 \omega^2 - \alpha_4},$$

kde  $\hat{\sigma}_{N_\varepsilon}^2 = E^* \varepsilon_t^{*2}$ ,  $\hat{\omega}_{N_B}^2 = E^* B_t^{*2}$ ,  $\hat{\delta}_{N_\varepsilon}^4 = E^* \varepsilon_t^{*4}$  a  $\hat{\alpha}_{N_B}^4 = E^* B_t^{*4}$ .

*Poznámka.* Z lemmat 8 a 9 víme, že veličiny  $\hat{\sigma}_{N_\varepsilon}^2$ ,  $\hat{\omega}_{N_B}^2$ ,  $\hat{\delta}_{N_\varepsilon}^4$  a  $\hat{\alpha}_{N_B}^4$  konvergují v pravděpodobnosti ke skutečným hodnotám parametrů  $\sigma^2$ ,  $\delta_4$ ,  $\omega^2$  a  $\alpha_4$ . Stejně tak dle předpokladu (C0) jsou odhady  $\hat{\beta}_n$ ,  $\hat{\sigma}_n^2$ ,  $\hat{\omega}_n^2$ ,  $\hat{\delta}_{4n}$  a  $\hat{\alpha}_{4n}$  konzistentní. Pro  $n \rightarrow \infty$  tedy můžeme předpokládat, že za platnosti podmínek

$$\beta^2 + \omega^2 < 1 \quad \text{a} \quad \beta^4 + 6\beta^2 \omega^2 + \alpha_4 < 1$$

budou splněny i nerovnosti

$$\hat{\beta}_n^2 + \hat{\omega}_n^2 < 1 \quad \text{a} \quad \hat{\beta}_n^4 + 6\hat{\beta}_n^2 \hat{\omega}_n^2 + \hat{\alpha}_{4n} < 1$$

a

$$\hat{\beta}_n^2 + \hat{\omega}_{N_B}^2 < 1 \quad \text{a} \quad \hat{\beta}_n^4 + 6\hat{\beta}_n^2 \hat{\omega}_{N_B}^2 + \hat{\alpha}_{N_B}^4 < 1$$

a bootstrapové repliky  $X_1^*$ , ...,  $X_n^*$  budou tvořit část stacionární posloupnosti. Pracujeme ale s konečným výběrem a nelze zaručit platnost těchto nerovností ani pro odhady momentů náhodného procesu  $\{\mathcal{X}_t\}$ , ani pro momenty bootstrapové posloupnosti  $\{X_t^*\}$ . Při odvození konzistence bootstrapu se jejich platnost předpokládá. V kapitole věnované simulacím se podíváme, zda jsou tyto nerovnosti splněny i v praxi.

Nyní již uvedeme hlavní výsledek této sekce (Kreiss a Fink (2013), věta 3.5 a důsledek 3.7):

**Věta 10.** *Nechť  $X_0, \dots, X_n$  je realizace procesu  $RCA(1)$  a  $X_0^*, \dots, X_n^*$  jsou bootstrapové repliky spočtené podle vzorce (2.19). Nechť platí předpoklady (C0) - (C6). Mějme odhad  $\hat{\beta}_n^*$  spočtený pomocí bootstrapových replik  $X_0^*, \dots, X_n^*$  podle vzorce*

$$\hat{\beta}_n^* = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^* X_t^*}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^{*2}}.$$

Pak pro  $n \rightarrow \infty$  platí

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{E \mathcal{X}_0^2} + \omega^2 \frac{E \mathcal{X}_0^4}{(E \mathcal{X}_0^2)^2}\right)$$

v pravděpodobnosti.

*Důsledek.* Za podmínek věty 10 je reziduální bootstrap konzistentní pro  $\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)\right)$ . Symbolem  $\mathcal{L}$  značíme pravděpodobnostní rozdělení.

*Poznámka.* Protože rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$  je podmíněné původním vzorkem dat, konvergence k normálnímu rozdělení v distribuci ve větě 10 znamená konvergenci podmíněných distribučních funkcí. Jde tedy o konvergenci náhodných veličin, proto je zde odvozená konvergence v distribuci, v pravděpodobnosti. V praxi to znamená, že pravděpodobnost, že původní vzorek dat bude natolik nepříznivý, že u něj bootstrap fungovat nebude, přestože půjde o realizaci procesu  $RCA(1)$ , konverguje s rostoucím  $n$  k nule.

### 2.3.2 Modifikace reziduálního bootstrapu

#### Bootstrap založený na reziduích a momentech

Výše popsany reziduální bootstrap generuje rezidua  $B_t^*$  náhodně z množiny  $\{\tilde{B}_{S_1}, \dots, \tilde{B}_{S_{N_B}}\}$ , kterou jsme vytvořili na základě těch pozorování  $X_t$ , pro která platí  $|X_{t-1}| > M$ . Může se ale stát, že i při dobře nastavené hodnotě  $M$  nezískáme z konkrétní realizace procesu dostatečně velkou množinu  $\{\tilde{B}_{S_1}, \dots, \tilde{B}_{S_{N_B}}\}$  na to, aby z ní vygenerovaná bootstrapová rezidua odrážela skutečné rozdělení náhodných veličin  $B_t$ . Kreiss a Fink (2013) proto navrhli modifikovanou verzi reziduálního bootstrapu, ve které se bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^*$  generují tak, jak bylo popsáno v předchozí sekci, ale  $B_t^*$  vznikají jiným způsobem.

O  $B_t$  předpokládáme, že jsou *iid* s momenty

$$(E B_1, E B_1^2, E B_1^3, E B_1^4) = (0, \omega^2, 0, \alpha_4).$$

Umíme spočítat odhady parametrů  $\omega^2$  a  $\alpha_4$ , které jsou konzistentní. Víme také, že asymptotický rozptyl statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  má tvar

$$\sigma_{as}^2 = \frac{\sigma^2}{E \mathcal{X}_1^2} + \omega^2 \frac{E \mathcal{X}_1^4}{(E \mathcal{X}_1^2)^2},$$

viz vzorec (2.10) přičemž výrazy  $E \mathcal{X}_1^2$  a  $E \mathcal{X}_1^4$  závisí pouze na parametrech  $\beta, \sigma^2, \omega^2, \delta_4$  a  $\alpha_4$  (viz věta 4 a výrazy (2.11) a (2.12)). Statistika  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$  má v distribuci konvergovat ke stejnému rozdělení (v pravděpodobnosti). Chceme-li bootstrapem vytvořit takový výběr  $X_1^*, \dots, X_n^*$ , který věrně zachycuje i momenty náhodné složky autoregresního koeficientu, můžeme generovat bootstrapová rezidua  $B_t^*$  přímo z rozdělení, jehož první až čtvrtý moment jsou rovny čtveřici  $(0, \hat{\omega}_n^2, 0, \hat{\alpha}_{4n})$ . Algoritmus této metody tedy bude vypadat následovně:

1. Z původních dat spočteme konzistentní odhady  $\hat{\beta}_n, \hat{\omega}_n^2$  a  $\hat{\alpha}_{4n}$ , například pomocí postupů popsanych v kapitole 2.2.2.
2. Bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^*$  vygenerujeme výběrem s vracením z množiny  $\{\tilde{\varepsilon}_{T_1}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{T_{N_\varepsilon}}\}$ , kterou jsme získali stejným způsobem jako u reziduálního bootstrapu.
3. Bootstrapová rezidua  $B_t^*$  vygenerujeme nezávisle z rozdělení, jehož první a třetí moment je nulový a druhý a čtvrtý moment nabývá po řadě hodnot  $\hat{\omega}_n^2, \hat{\alpha}_{4n}$ .

4. Zvolíme  $X_0^* = X_0$  a bootstrapové repliky vygenerujeme podle vzorce  $X_t^* = (\hat{\beta}_n + B_t^*)X_{t-1}^* + \varepsilon_t^*$ ,  $t = 1, \dots, n$ .

Konzistenci tohoto postupu odvozují Kreiss a Fink (2013) ve větě 3.9:

**Věta 11.** *Za platnosti předpokladů (C0), (C2), (C3) a (C4) je bootstrapová metoda popsaná v této sekci konzistentní pro  $\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)\right)$ .*

*Poznámka.* Přestože tuto metodu uvádíme jako částečně reziduální a částečně momentovou, stále označujeme jak  $\varepsilon_t^*$  tak  $B_t^*$  jako bootstrapová rezidua. Přívlastek „reziduální“ v názvu metody se vztahuje ke způsobu generování složky vnášející variabilitu do bootstrapové řady. Vrátime-li se pro jednoduchost k autoregresnímu procesu s deterministickými koeficienty, reziduální bootstrap generuje tuto variabilitu z hodnot  $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\varphi}_n X_{t-1}$ , kterým se ve statistice říká rezidua, které představují rozdíl mezi odhadnutým modelem a skutečnými daty a které jsou zároveň určitým odhadem chybové složky tohoto modelu. Tímto způsobem již hodnoty  $B_t^*$  negenerujeme, proto metodu označujeme jako částečně momentovou. Nicméně i při odlišném způsobu vzniku náhodný proces  $\{B_t^*, t \in \mathbb{Z}\}$  stále působí jako odhad náhodného procesu  $\{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , proto jeho složky stále nazýváme bootstrapovými rezidui.

### Bootstrap založený pouze na momentech

Princip generování bootstrapových reziduí z rozdělení s předem určenými momenty se dá uplatnit i u  $\varepsilon_t^*$ . V předchozí sekci jsme si připomenuli, že asymptotický rozptyl statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  závisí jen na parametrech  $\beta$ ,  $\sigma^2$ ,  $\delta_4$ ,  $\omega^2$  a  $\alpha_4$ . Při generování  $\varepsilon_t^*$  tedy potřebujeme, aby tato rezidua co nejlépe napodobovala momenty náhodných veličin  $\varepsilon_t$  do čtvrtého řádu. Protože známe konzistentní odhady  $\hat{\sigma}_n^2$  a  $\hat{\delta}_{4n}$  parametrů  $\sigma^2$  a  $\delta_4$ , budeme generovat  $\varepsilon_t^*$  nezávisle z rozdělení s prvními čtyřmi momenty rovnými čtveřici  $(0, \hat{\sigma}_n^2, 0, \hat{\delta}_{4n})$ . Veličiny  $B_t^*$  budeme také generovat nezávisle z rozdělení s požadovanými momenty, jako v předchozí sekci. Tím se vyhneme tomu, že v libovolné z množin  $\{\tilde{\varepsilon}_{T_1}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{T_{N_\varepsilon}}\}$  a  $\{\tilde{B}_{S_1}, \dots, \tilde{B}_{S_{N_B}}\}$  je příliš málo prvků a rozdělení bootstrapových reziduí pak bude zkreslené.

Bootstrapový algoritmus bude nyní probíhat v těchto krocích:

1. Na základě  $X_0, \dots, X_n$  spočteme konzistentní odhady  $\hat{\beta}_n$ ,  $\hat{\sigma}_n^2$ ,  $\hat{\omega}_n^2$ ,  $\hat{\delta}_{4n}$  a  $\hat{\alpha}_{4n}$ , například pomocí postupů popsaných v kapitole 2.2.2.
2. Bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^*$  vygenerujeme nezávisle z rozdělení, jehož první a třetí moment je nulový a druhý a čtvrtý moment nabývá po řadě hodnot  $\hat{\sigma}_n^2$  a  $\hat{\delta}_{4n}$ .
3. Bootstrapová rezidua  $B_t^*$  vygenerujeme nezávisle z rozdělení, jehož první a třetí moment je nulový a druhý a čtvrtý moment nabývá po řadě hodnot  $\hat{\omega}_n^2$ ,  $\hat{\alpha}_{4n}$ .

4. Zvolíme  $X_0^* = X_0$  a bootstrapové repliky původních dat vygenerujeme podle vzorce  $X_t^* = (\hat{\beta}_n + B_t^*)X_{t-1}^* + \varepsilon_t^*$ ,  $t = 1, \dots, n$ .

Ve větě 3.11 v článku Kreiss a Fink (2013) je ukázána platnost této metody.

**Věta 12.** *Při splnění předpokladů (C0) a (C3) je bootstrap založený na momentech konzistentní pro  $\mathcal{L}\left(\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_n - \beta\right)\right)$ .*

*Poznámka.* Dle článku Kreiss a Fink (2013) lze zvolit rozdělení pro generování reziduí libovolně (za předpokladu, že bude splňovat podmínky kladené na momenty). My použijeme metodu generující náhodné veličiny z tříbodového rozdělení, kterou blíže popíšeme v kapitole věnované simulacím.

Vidíme, že oproti reziduálnímu bootstrapu vyžadují jeho modifikace pro konzistenci méně předpokladů. Nejsou u nich potřeba podmínky použité pro odvození konvergence momentů bootstrapových reziduí  $\varepsilon_t^*$  a  $B_t^*$  k momentům chybových složek  $\varepsilon_t$  a  $B_t$ . Konvergence je zajištěna tím, že bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^*$  a  $B_t^*$  jsou přímo konstruována tak, aby jejich druhé a čtvrté momenty byly rovny konzistentním odhadům momentů  $\varepsilon_t$  a  $B_t$ . Díky tomu lze i očekávat, že tyto metody povedou k lepším výsledkům než čistě reziduální bootstrap, kde se rezidua konstruují jen z některých pozorování a na základě heuristického přístupu, který předpokládá, že neuděláme příliš velkou chybu, když při konstrukci  $\varepsilon_t^*$  pomíneme chybovou složku  $B_t$  a naopak při konstrukci  $B_t^*$  pomíneme  $\varepsilon_t$ . Simulační příklad uvedený v článku Kreiss a Fink (2013) tuto domněnku potvrzuje.

*Poznámka.* Stejně jako u reziduálního bootstrapu, i zde se pracuje se stacionaritou a předpokládá se, že platí například podmínka  $\hat{\omega}_n^2 + \hat{\beta}_n^2 < 1$ . Pro  $n$  rostoucí nade všechny meze to sice platí (skoro jistě), ale u dat konečného rozsahu tato podmínka splněna být nemusí. V průběhu simulací ověříme, zda tomu tak je.

### 2.3.3 Wild bootstrap u procesu RCA(1)

#### Heteroskedastický model RCA(1)

Reziduální bootstrap popsany v předchozí sekci není jedinou možností, jak bootstrap uplatnit u autoregresních procesů s náhodným parametrem. V článku Prášková (2003) se autorka zabývá wild bootstrapem aplikovaným na proces RCA(1), u kterého je uvolněna podmínka na homoskedasticitu chybové složky  $\varepsilon_t$ . Jde tedy o obecnější model, než jak jsme ho zavedli dříve. Předpokládejme, že máme pozorování  $X_0, \dots, X_n$ . V této podkapitole budeme pracovat s modelem RCA(1) v takovémto tvaru:

$$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t) \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.21)$$

kde

- $\mathcal{X}_0$  je náhodná veličina, pro kterou platí  $E \mathcal{X}_0 = 0$  a  $\text{var} \mathcal{X}_0 = \sigma_X^2$ ,  $0 < \sigma_X^2 < \infty$ ,

- $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin,  $E \varepsilon_t = 0$  pro všechna  $t$  a  $\text{var } \varepsilon_t = \sigma_t^2$ ,  $0 < \sigma_t^2 < \infty$ , přičemž  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé s  $X_0$ ,
- $\{B_t, t \in \mathbb{N}\}$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin,  $E B_t = 0$  a  $\text{var } B_t = \omega^2$  pro všechna  $t$ ,  $0 < \omega^2 < \infty$ , přičemž  $B_t$  jsou nezávislé s  $X_0$  i s  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ .

Stejně jako v předchozí sekci nás bude zajímat odhad parametru  $\beta$  ve tvaru

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2},$$

viz vzorec (2.9), konzistence tohoto odhadu a asymptotická normalita statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ . U homoskedastického modelu se při odvozování vlastností odhadu  $\beta$  hojně využívá stacionarita. Právě popsany heteroskedastický model stacionární obecně není, nicméně i tak byly nalezeny podmínky, za kterých má odhad  $\beta$  požadované vlastnosti. Jde o předpoklady:

$$(D1) \quad E |\mathcal{X}_0|^{4+\delta} < \infty, \quad E |\varepsilon_t|^{4+\delta} \leq K < \infty \text{ pro nějaké } \delta > 0 \text{ a } K \in \mathbb{R}, K > 0,$$

$$(D2) \quad \sup_{t \in \mathbb{N}} E |b_t|^{4+\delta} < 1 \text{ pro nějaké } \delta > 0, \text{ kde } b_t = \beta + B_t,$$

$$(D3) \quad E B_t^4 \text{ je konstantní pro všechna } t,$$

$$(D4) \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sigma_t^2 \rightarrow \sigma^2 > 0 \text{ při } n \rightarrow \infty,$$

$$(D5) \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sigma_t^2 E \mathcal{X}_{t-1}^2 \rightarrow \bar{\sigma}^2 > 0 \text{ při } n \rightarrow \infty,$$

$$(D6) \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \varepsilon_t^4 \rightarrow \delta_4 > 0 \text{ při } n \rightarrow \infty.$$

V Janečková (2002), věty 3.1 a 3.4 jsou za těchto předpokladů dokázány následující výsledky:

**Věta 13.** *Bud'  $\gamma^4 = E b_t^4$ . Platí-li předpoklady (D1) - (D6), pak při  $n \rightarrow \infty$*

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{s.j.} \beta$$

a

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, \frac{(1 - \beta^2 - \omega^2)^2}{\sigma^4} \Delta^2 \right),$$

kde

$$\Delta^2 = \omega^2 \frac{6(\beta^2 + \omega^2)\bar{\sigma}^2 + \delta_4}{1 - \gamma^4} + \bar{\sigma}^2.$$

*Poznámka.* Jestliže  $E \varepsilon_t^2 = \sigma^2$  pro všechna  $t$ , pak předpoklady (D4) a (D6) platí automaticky. Z předpokladu (D2) vyplývá  $\beta^2 + \omega^2 < 1$ , takže náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{N}\}$  je stacionární (slabě, protože nepředpokládáme, že  $B_t$  a  $\varepsilon_t$  jsou *iid*), a proto v předpokladu (D5) je  $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 E \mathcal{X}_1^2$ . Připomeňme, že v tom případě

$$E \mathcal{X}_1^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \beta^2 - \omega^2} \quad \text{a} \quad E \mathcal{X}_1^4 = \frac{\delta_4 + 6\sigma^4 \frac{\beta^2 + \omega^2}{1 - \beta^2 - \omega^2}}{1 - \beta^4 - 6\beta^2\omega^2 - \alpha_4}.$$



Dále víme, že  $\gamma^4 = \mathbf{E} (\beta + B_0)^4 = \beta^4 + 6\beta^2\omega^2 + \alpha_4$ .

Asymptotický rozptyl z věty 13 se tedy v tomto případě zjednoduší na

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \beta^2 - \omega^2)^2}{\sigma^4} \Delta^2 &= \frac{1}{(\mathbf{E} \mathcal{X}_1^2)^2} \Delta^2 \\ &= \frac{1}{(\mathbf{E} \mathcal{X}_1^2)^2} \left[ \omega^2 \frac{6(\beta^2 + \omega^2)\sigma^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_1^2 + \delta_4}{1 - \beta^4 - 6\beta^2\omega^2 - \alpha_4} + \sigma^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_1^2 \right] \\ &= \frac{1}{(\mathbf{E} \mathcal{X}_1^2)^2} \omega^2 \frac{6(\beta^2 + \omega^2) \frac{\sigma^4}{1 - \beta^2 - \omega^2} + \delta_4}{1 - \beta^4 - 6\beta^2\omega^2 - \alpha_4} + \frac{\sigma^2}{\mathbf{E} \mathcal{X}_1^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\mathbf{E} \mathcal{X}_1^2} + \frac{\mathbf{E} \mathcal{X}_1^4}{(\mathbf{E} \mathcal{X}_1^2)^2} \end{aligned}$$

Dostáváme tedy stejný asymptotický rozptyl, jako je  $\sigma_{as}^2$  ve větě 10.

*Poznámka.* Pokud by nás zajímala jen konzistence bodového odhadu  $\hat{\beta}_n$ , stačí k jejímu odvození i mírnější předpoklady, konkrétně (D1) a (D2), s omezením momentů do řádu  $2 + \delta$ , a (D4). Důkaz lze nalézt v Janečková (2002), věta 3.1. My se ale budeme zabývat aproximací asymptotického rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ .

## Wild bootstrap

Přepíšme opět náš model do tvaru

$$\mathcal{X}_t = \beta \mathcal{X}_{t-1} + u_t, \quad t \in \mathbb{N}.$$

$u_t = B_t \mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t$  je posloupnost martingalových diferencí s podmíněným rozptylem  $\mathbf{E} [u_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \omega^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + \sigma_t^2$ , kde  $\mathcal{F}_t = \sigma \{ \mathcal{X}_0, B_1, \varepsilon_1, \dots, B_t, \varepsilon_t \}$ . Již bylo řečeno, že klasický reziduální bootstrap s *iid* bootstrapovými rezidui vygenerovanými z odhadnutých reziduí  $\hat{u}_t$  v takovém případě není konzistentní. V případě heteroskedastických modelů proto mnozí autoři kombinují reziduální bootstrap nebo jiné bootstrapové metody s wild bootstrapem. Wild bootstrap vnáší do modelu „externí“ variabilitu, nahrazuje tím *iid* výběr bootstrapových reziduí a umožňuje napodobení heteroskedasticity v procesu generujícím data. V článku Prášková (2002) je dokázána konzistence wild bootstrapu v kombinaci s regresním (neboli tzv. *fixed-design*) nebo reziduálním bootstrapem pro proces  $AR(1)$ , kde chybové složky jsou heteroskedastické a splňují podmínky podobné předpokladům (D1), (D4) a (D5). Článek Goncalves a Kilian (2004) se věnuje regresnímu a reziduálnímu bootstrapu ve spojení s wild bootstrapem pro proces  $AR(1)$  s podmíněně heteroskedastickými chybami tvořícími posloupnost martingalových diferencí, jako jsou třeba procesy ARCH, GARCH a další. V článku Goncalves a Kilian (2007) je wild bootstrap kombinován se síťovým regresním bootstrapem pro proces  $AR(\infty)$  s podmíněně heteroskedastickými chybami tvořenými posloupnostmi martingalových diferencí. Pro proces  $RCA(1)$  je odvozena platnost wild bootstrapu v kombinaci s regresním bootstrapem v článku Prášková (2003). Tuto metodu si nyní popíšeme.

Mějme opět pozorování  $X_0, \dots, X_n$ . Algoritmus pro generování bootstrapových replik bude vypadat následovně:

1. Metodou nejmenších čtverců spočteme odhad  $\hat{\beta}_n$ .
2. Pro  $t = 1, \dots, n$  spočteme rezidua  $\hat{u}_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}$ .
3. Nezávisle na  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n$  vygenerujeme  $v_1, \dots, v_n$ , a to nezávisle z rozdělení s nulovou střední hodnotou, jednotkovým rozptylem a konečnými momenty do řádu  $2 + \delta$  pro nějaké  $\delta > 0$ .
4. Spočteme bootstrapová rezidua  $u_1^*, \dots, u_n^*$  tak, že  $u_t^* = \hat{u}_t v_t$ .
5. Bootstrapové repliky  $X_1^*, \dots, X_n^*$  vygenerujeme jako  $X_t^* = \hat{\beta}_n X_{t-1} + u_t^*$ .

Všimněme si, že kromě vnášení externí variability do modelu v podobě náhodných veličin  $v_t$  je tu oproti dříve používanému reziduálnímu bootstrapu rozdíl i v generování bootstrapových pseudo- pozorování.  $X_t^*$  se negeneruje rekurzivně z  $X_{t-1}^*$ , ale z původního pozorování  $X_{t-1}$ . Stejně tak se následně spočte bootstrapový odhad parametru  $\beta$ :

$$\hat{\beta}_n^* = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t^*}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}.$$

$\hat{\beta}_n^*$  tedy počítáme jako odhad regresního parametru v modelu  $X_t^* = \beta X_{t-1} + \epsilon_t$ , kde  $\epsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, n$  jsou nekorelované náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem. Konzistence této metody je dokázána ve větě 2 v článku Prášková (2003):

**Věta 14.** *Platí-li předpoklady (D1) - (D6), pak při  $n \rightarrow \infty$*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) < x \right) - P^* \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n) < x \right) \right| \rightarrow 0 \text{ s.j.}$$

*Poznámka.* Platí-li předpoklady (D1) - (D6) pro heteroskedastické chyby, platí zřejmě i v případě, že  $\epsilon_t$  jsou *iid*. Wild bootstrap tedy můžeme použít i pro model s homoskedastickými chybami, což nám dává příležitost během simulací porovnat účinnost obou popsanych bootstrapových metod.

## 2.4 Použití metody wild bootstrap na proces RCA(2)

V předchozích sekcích jsme představili reziduální bootstrap, navržený v článku Kreiss a Fink (2013) pro model  $RCA(1)$  s *iid* chybami, a wild bootstrap, jehož platnost pro model  $RCA(1)$  s heteroskedastickými chybami byla dokázána v článku Prášková (2003). Nyní se pokusíme odvodit platnost wild bootstrapu pro proces  $RCA(2)$ , jehož chybové složky  $\epsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené. Kromě tohoto předpokladu omezíme i tvar varianční matice  $\mathbf{\Omega}$  náhodného vektoru  $\mathbf{B}(t)$ . Pokud je nám známo, konzistence wild bootstrapu pro

model  $RCA$  vyššího řádu zatím odvozena nebyla.

Nyní uvedeme podmínky kladené na proces  $RCA(2)$ , které budeme pro odvození platnosti bootstrapu potřebovat. Předpokládejme, že máme pozorování  $X_{-1}, X_0, \dots, X_n$ .

(E1) Necht' pozorování  $X_{-1}, X_0, \dots, X_n$  jsou generována procesem, pro který platí

$$\mathcal{X}_t = (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde

- $\beta_1$  a  $\beta_2$  jsou reálné konstanty,
- $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, existují konečné momenty  $\varepsilon_t$  do řádu 4, přičemž  $\mathbb{E} |\varepsilon_t|^k = 0$  pro  $k = 1, 3$ ,  $\text{var } \varepsilon_t = \sigma^2 > 0$  a  $\mathbb{E} \varepsilon_t^4 = \delta_4 > 0$ ,
- $\{\mathbf{B}(t) = (B_1(t), B_2(t))'\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných vektorů, jejichž složky  $B_1(t)$  a  $B_2(t)$  jsou navzájem nezávislé, existují konečné momenty  $\mathbf{B}(t)$  do řádu 4, přičemž  $\mathbb{E} \mathbf{B}(t) = \mathbf{0}$  a  $\text{var } \mathbf{B} = \mathbf{\Omega}$ , kde

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{E} (B_1(t)^3, B_2(t)^3)' = \mathbf{0} \text{ a } \mathbb{E} (B_1(t)^4, B_2(t)^4)' = (\alpha_{41}, \alpha_{42})',$$

- $\{\mathbf{B}(t)\}$  a  $\{\varepsilon_t\}$  jsou nezávislé.

### 2.4.1 Stacionarita procesu $RCA(2)$

Chceme, aby proces  $RCA(2)$  byl striktně stacionární a ergodický. Nadále budeme proto předpokládat:

(E2) Pro  $i = 1, \dots, 4$  je  $|\lambda_i| < 1$ , kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  jsou vlastní čísla matice

$$\mathbf{M} = \mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z věty 3 víme, že pokud je námi definovaný proces  $RCA(p)$  s *iid* chybovými složkami  $\varepsilon_t$  a  $\mathbf{B}(t)$  slabě stacionární, je i striktně stacionární a ergodický. Předpoklad (E2) je podmínka pro slabou stacionaritu uvedená ve větě 2, přepsaná pro případ  $p = 2$ . Explicitní tvar matice  $\mathbf{M}$  je

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{E} \begin{pmatrix} B_1(t)^2 & B_1(t)B_2(t) & B_1(t)B_2(t) & B_2(t)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta_1^2 + \omega_1^2 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 & \beta_2^2 + \omega_2^2 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Charakteristický polynom matice  $\mathbf{M}$  je

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= (\lambda + \beta_2) \cdot \\
&\cdot [\lambda^3 - \lambda^2(\beta_1^2 + \beta_2 + \omega_1^2) + \lambda(\beta_2\omega_1^2 - \beta_1^2\beta_2 - \beta_2^2 - \omega_2^2) + \beta_2^3 + \beta_2\omega_2^2].
\end{aligned}$$

Z něj snadno dostaneme jedno vlastní číslo matice,  $\lambda_1 = -\beta_2$ . Musí tedy platit  $|\beta_2| < 1$ . Zbývá tři vlastní čísla mají v závislosti na parametrech  $\beta_1, \beta_2, \omega_1^2, \omega_2^2$  příliš složitý tvar na to, abychom z nich vyvodili další podmínky pro stacionaritu. V kapitole věnované simulacím ověříme, zda jsou zbylá vlastní čísla v absolutní hodnotě menší než 1, pro konkrétní parametry procesu.

## 2.4.2 Vlastnosti $\hat{\beta}_n$

Podívejme se nejprve na momenty procesu  $\{\mathcal{X}_t\}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \mathcal{X}_t &= \mathbf{E} [(\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t] \\
&= \beta_1 \mathbf{E} \mathcal{X}_{t-1} + \beta_2 \mathbf{E} \mathcal{X}_{t-2}
\end{aligned}$$

Má-li být proces stacionární, musí platit  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t = \mathbf{E} \mathcal{X}_s$  pro všechna  $t, s \in \mathbb{Z}$ . Z předchozí rovnice tedy vyplývá, že buď  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t = 0$  nebo  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ . Označme nyní  $\sigma_X^2 = \mathbf{E} \mathcal{X}_t^2$  a  $\rho_k = \mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-k}$ ,  $k \geq 1$ . Víme, že  $\mathcal{X}_{t-s}$ ,  $s \geq 1$  jsou nezávislé s  $\mathbf{B}(t)$  a  $\varepsilon_t$ . Také  $\mathbf{B}(t)$  a  $\varepsilon_t$  jsou navzájem nezávislé a  $\mathbf{E} B_1(t) = \mathbf{E} B_2(t) = \mathbf{E} \varepsilon_t = 0$ , tudíž platí

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \mathbf{E} [(\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t]^2 \\
&= \mathbf{E} [(\beta_1 + B_1(t))^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + (\beta_2 + B_2(t))^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 + \varepsilon_t^2 + 2(\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1}\varepsilon_t \\
&\quad + 2(\beta_1 + B_1(t))(\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-1}\mathcal{X}_{t-2} + 2(\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2}\varepsilon_t] \\
&= (\beta_1^2 + \omega_1^2)\sigma_X^2 + (\beta_2^2 + \omega_2^2)\sigma_X^2 + \sigma^2 + 2\beta_1\beta_2\rho_1. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Pro  $\rho_1$  platí

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1} \\
&= \mathbf{E} \left[ \left( (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t \right) \mathcal{X}_{t-1} \right] \\
&= \mathbf{E} \left[ (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1}^2 + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-1}\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t \mathcal{X}_{t-1} \right] \\
&= \beta_1 \sigma_X^2 + \beta_2 \rho_1,
\end{aligned}$$

takže

$$\rho_1 = \sigma_X^2 \frac{\beta_1}{1 - \beta_2}. \quad (2.24)$$

Dosadíme-li výraz (2.24) do (2.23), dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= (\beta_1^2 + \omega_1^2)\sigma_X^2 + (\beta_2^2 + \omega_2^2)\sigma_X^2 + \sigma^2 + 2\beta_1\beta_2 \frac{\beta_1\sigma_X^2}{1 - \beta_2} \\ &= \sigma_X^2 \left( \beta_1^2 + \omega_1^2 + \beta_2^2 + \omega_2^2 + 2\beta_1^2 \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \right) + \sigma^2 \end{aligned}$$

a úpravou získáme tvar rozptylu náhodné veličiny  $\mathcal{X}_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \frac{\sigma^2}{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - 2\beta_1^2 \left( \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \right)} \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \beta_2^2 - \beta_1^2 \left( 1 + \frac{2\beta_2}{1 - \beta_2} \right)} \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \beta_2^2 - \beta_1^2 \left( \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} \right)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Chceme-li, aby rozptyl  $\sigma_X^2$  byl konečný, musí platit

$$1 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \beta_2^2 - \beta_1^2 \left( \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} \right) > 0, \text{ neboli } \omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_2^2 + \beta_1^2 \left( \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} \right) < 1,$$

a proto také  $\beta_2^2 + \beta_1^2 \left( \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} \right) < 1$ . Pokud by zároveň platila rovnost  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ , neboli  $\beta_1 = 1 - \beta_2$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \beta_2^2 + (1 - \beta_2)^2 \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} &< 1 \\ \beta_2^2 + (1 - \beta_2)(1 + \beta_2) &< 1 \\ \beta_2^2 + 1 - \beta_2^2 &< 1. \end{aligned}$$

Došli jsme tedy ke sporu, nemůže platit  $\beta_1 + \beta_2 = 1$  a musí tudíž být  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t = 0$ . Je zřejmé, že ke stejnému sporu bychom došli i v případě, že  $\beta_1 = \beta_2 - 1$ , neboli musí platit

$$|\beta_1| \neq |1 - \beta_2|. \quad (2.26)$$

Další předpoklad, který budeme potřebovat, je

$$(E3) \ \mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 < \infty.$$

Z věty 4 víme, že je-li náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  striktně stacionární, pak

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{s.j.} \beta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Platí-li navíc  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 < \infty$ , pak

$$\sqrt{n} \left( \hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{as}), \quad n \rightarrow \infty,$$

kde

$$\boldsymbol{\Sigma}_{as} = \sigma^2 \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{E} [(\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t') (\mathbf{X}_t' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X}_t)] \mathbf{V}^{-1} \quad (2.27)$$

a  $\mathbf{V} = \mathbf{E} [\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t']$ .

Podívejme se nyní na matice  $\mathbf{V}$  a  $\mathbf{V}^{-1}$ . Potřebujeme, aby  $\mathbf{V}$  byla konečná a regulární. Ze vztahu (2.24) pro  $\rho_1 = \mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}$  je

$$\mathbf{V} = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_t^2 & \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1} \\ \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1} & \mathcal{X}_{t-1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X^2 \frac{\beta_1}{1-\beta_2} \\ \sigma_X^2 \frac{\beta_1}{1-\beta_2} & \sigma_X^2 \end{pmatrix} = \sigma_X^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta_1}{1-\beta_2} \\ \frac{\beta_1}{1-\beta_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice  $\mathbf{V}$  je konečná, jestliže  $\sigma_X^2 < \infty$  a  $|\rho_1| < \infty$ . První podmínka je zaručena předpokladem (E3). Nerovnost  $|\rho_1| < \infty$  je splněna, je-li navíc  $|\beta_1| < \infty$ , což platí z definice procesu  $\{\mathcal{X}_t\}$ , a  $\beta_2 \neq 1$ , což je zaručeno podmínkou  $|\beta_2| < 1$  vyplývající z předpokladu (E2). Protože  $\sigma^2 > 0$ , je i  $\sigma_X^2 > 0$ . Aby byla matice  $\mathbf{V}$  regulární, musí kromě toho platit ještě  $|\beta_1| \neq |\beta_2 - 1|$ . Splnění této podmínky vyplývá ze stacionarity procesu  $\{\mathcal{X}_t\}$ , jak jsme ověřili v (2.26). Jednoduchým výpočtem pak dostaneme tvar inverzní matice:

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\sigma_X^2 (1 - \beta_2)^2 - \beta_1^2} \begin{pmatrix} 1 - \beta_2 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1 - \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Díky podmínkám kladeným na  $\sigma$ ,  $\beta_1$  a  $\beta_2$  je matice  $\mathbf{V}^{-1}$  také konečná.

Pro znalost asymptotického rozptylu  $\boldsymbol{\Sigma}_{as}$  statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})$  je potřeba doplnit již jen tvar matice  $\mathbf{E} [(\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t') (\mathbf{X}_t' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X}_t)]$ . Označme tuto matici  $\boldsymbol{\Lambda}$ . Její tvar je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda} &= \mathbf{E} \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{X}_t^2 & \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1} \\ \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1} & \mathcal{X}_{t-1}^2 \end{pmatrix} (\mathcal{X}_t, \mathcal{X}_{t-1}) \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_t \\ \mathcal{X}_{t-1} \end{pmatrix} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{X}_t^2 & \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1} \\ \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1} & \mathcal{X}_{t-1}^2 \end{pmatrix} (\omega_1^2 \mathcal{X}_t^2 + \omega_2^2 \mathcal{X}_{t-1}^2) \right] \\ &= \begin{pmatrix} \omega_1^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 + \omega_2^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 & \omega_1^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + \omega_2^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3 \\ \omega_1^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + \omega_2^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3 & \omega_1^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + \omega_2^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde v posledním kroku jsme díky striktní stacionaritě nahradili  $\mathbf{E} \mathcal{X}_{t-1}^4$  výrazem  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t^4$ . Střední hodnoty vyskytující se v matici  $\boldsymbol{\Lambda}$  mají tvar:

$$\mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 = \frac{FAC + D}{1 - FAB - E}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} = A (B \mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 + C), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 = \frac{1}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} \left[ (\beta_1^2 + \omega_1^2) \mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 + 2\beta_1 \beta_2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} \sigma_X^2 \right], \quad (2.31)$$

$$\mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3 = \beta_1 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 + \beta_2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1}, \quad (2.32)$$

přičemž

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2}{(1 - \beta_2^2 - \omega_2^2) [1 - \beta_2^2(\beta_2^2 + 3\omega_2^2)] - 3\beta_2 [(\beta_2^2 + \omega_2^2)(\beta_1^2 - \omega_1^2) + (\beta_1^2 + \omega_1^2)]}, \\
B &= \frac{\beta_1}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} \left[ \beta_1^2 + 3\omega_1^2 + 2\beta_1^2(\beta_2^2 + \omega_2^2) + (\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2)(1 - \beta_2^2 - \omega_2^2) \right], \\
C &= \frac{3\beta_1\sigma_X^2\sigma^2}{(1 - \beta_2)(1 - \beta_2^2 - \omega_2^2)} \left[ 1 - \beta_2(\beta_2^2 + \omega_2^2) \right], \\
D &= \delta_4 + \frac{6\sigma_X^2\sigma^2}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} \left[ \beta_1^2 + \omega_1^2 + (1 - \beta_2^2 - \omega_2^2) \left( \beta_2^2 + \omega_2^2 + 2\frac{\beta_1^2\beta_2}{1 - \beta_2} \right) \right], \\
E &= \beta_1^4 + 6\beta_1^2\omega_1^2 + \alpha_{41} + \beta_2^4 + 6\beta_2^2\omega_2^2 + \alpha_{42} + \frac{6(\beta_1^2 + \omega_1^2)^2(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + 4\beta_1^2\beta_2(\beta_2^2 + 3\omega_2^2), \\
F &= 4\beta_2(\beta_1^3 + 3\beta_1\omega_1^2) + \frac{12\beta_1\beta_2(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + 4\beta_1\beta_2^2(\beta_2^2 + 3\omega_2^2).
\end{aligned}$$

Vidíme, že asymptotická varianční matice je již při řádu  $p = 2$  poměrně komplikovaná, a to i přesto, že jsme v definici našeho procesu proměnné  $\varepsilon_t$  a  $\mathbf{B}(t)$  značně omezili. Věty 2, 3 a 4 jsou sice platné obecně pro řád  $p \geq 1$ , z praktického hlediska ale práce s procesy vyššího řádu může být problematická.

### 2.4.3 Použití metody wild bootstrap pro proces RCA(2)

V této části se budeme zabývat konzistencí metody wild bootstrap pro námi definovaný proces  $RCA(2)$ . Cílem je aproximovat rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  rozdělením statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$ , kde

$$\hat{\beta}_n = \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} X_t.$$

Algoritmus pro generování bootstrapových replik a bootstrapové statistiky  $\hat{\beta}_n^*$  je stejný jako v sekci 2.3.3.

1. Metodou nejmenších čtverců spočteme odhad  $\hat{\beta}_n$ .
2. Pro  $t = 1, \dots, n$  spočteme rezidua  $\hat{u}_t = X_t - \hat{\beta}_n' \mathbf{X}_{t-1}$ .
3. Nezávisle na  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n$  vygenerujeme  $v_1, \dots, v_n$ , a to jako *iid* náhodné veličiny s rozdělením s nulovou střední hodnotou, jednotkovým rozptylem a konečnými momenty do řádu  $2 + \nu$  pro nějaké  $\nu > 0$ .
4. Spočteme bootstrapová rezidua  $u_1^*, \dots, u_n^*$  tak, že  $u_t^* = \hat{u}_t v_t$ .
5. Bootstrapové repliky  $X_1^*, \dots, X_n^*$  vygenerujeme jako  $X_t^* = \hat{\beta}_n' \mathbf{X}_{t-1} + u_t^*$ .
6. Spočteme bootstrapovou statistiku

$$\hat{\beta}_n^* = \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} X_t^*. \quad (2.33)$$

Pro důkaz konzistence posílíme ještě předpoklad (E3):

(E3') Existuje  $\nu > 0$  takové, že  $E |\mathcal{X}_t|^{4+\nu} < \infty$ .

Budeme chtít dokázat následující větu:

**Věta 15.** *Nechť náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je proces RCA(2) splňující předpoklady (E1), (E2) a (E3'). Nechť  $\hat{\beta}_n$  je odhad parametru  $\beta$  a  $\hat{\beta}_n^*$  je jako (2.33). Pak při  $n \rightarrow \infty$*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \left| P^* \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n) < \mathbf{x} \right) - P \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) < \mathbf{x} \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

*Poznámka.* Symbolem „<“ u vektorů značíme nerovnost po složkách, neboli pro  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)'$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)'$  platí  $\mathbf{x} < \mathbf{y} \Leftrightarrow (x_1 < y_1 \wedge x_2 < y_2)$ .

Před vlastním důkazem věty 15 uveďme ještě několik pomocných lemat. Věty, na které se v důkaze odkazujeme a které nebyly uvedeny dříve v textu této práce, lze nalézt v dodatku 2.

**Lemma 16.** *Bud'  $G \subset \mathbb{R}_{2 \times 2}$  množina všech regulárních matic a  $T : G \rightarrow G$  zobrazení přiřazující matici  $\mathbf{A} \in G$  matici k ní inverzní, tedy  $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$ . Pak  $T$  je spojitě zobrazení na  $G$ .*

*Důkaz:*

Platí  $\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{-1} \mathbf{A}^{adj}$ , kde  $\mathbf{A}^{adj}$  je adjungovaná matice k matici  $\mathbf{A}$ . Determinant je polynomická funkce prvků matice, tedy spojitá funkce. Prvky adjungované matice  $\mathbf{A}^{adj}$  tvoří subdeterminanty matice  $\mathbf{A}$ , tudíž zobrazení  $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^{adj}$  je také spojitě, a proto i  $T$  je spojitě zobrazení na  $\mathbb{R}_{2 \times 2}$ .  $\square$

**Lemma 17.** *Nechť náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je proces RCA(2) splňující předpoklady (E1) a (E2). Bud'  $\kappa > 0$  reálná konstanta a  $\{\mathcal{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  náhodný proces, jehož složky  $\mathcal{Y}_t$  jsou náhodné veličiny či náhodné vektory určené jedním z následujících předpisů:*

$$(a) \mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t^2, \quad (b) \mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t^4, \quad (c) \mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1},$$

$$(d) \mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1}, \quad (e) \mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2, \quad (f) \mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3,$$

$$(g) \mathcal{Y}_t = \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+2\kappa}, \quad (h) \mathcal{Y}_t = \mathbf{X}_{t-1} \varepsilon_t, \quad (i) \mathcal{Y}_t = \mathbf{X}'_{t-1} \mathbf{B}(t),$$

$$(j) \mathcal{Y}_t = \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \mathbf{B}(t), \quad (k) \mathcal{Y}_t = \mathbf{X}'_{t-1} \mathbf{B}(t) \varepsilon_t,$$



$$(l) \mathcal{Y}_t = \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+2\kappa} \|\mathbf{B}(t)\|^{2+\kappa}, \quad (m) \mathcal{Y}_t = \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} |\varepsilon_t|^{2+\kappa}.$$

Pak náhodný proces  $\{\mathcal{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je striktně stacionární a ergodický.

*Důkaz:*

Připomeňme, že  $\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathbf{B}(s), \varepsilon_s, s \leq t\}$ . Z vět 2 a 3 víme, že jsou-li splněny předpoklady (E1) a (E2), náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný, striktně stacionární a ergodický. Díky stacionaritě procesů  $\{\mathcal{X}_t\}$ ,  $\{\mathbf{B}(t)\}$  a  $\{\varepsilon_t\}$  jsou všechny procesy tvořené pomocí předpisů (a) až (m) také striktně stacionární. Podle věty 20 v dodatku 2 je náhodný proces, který vznikne z ergodického náhodného procesu měřitelným zobrazením, rovněž ergodický. Z této věty tedy rovnou dostáváme ergodicitu procesů (a) až (g).

Podívejme se nyní na ergodicitu procesů  $\{\mathbf{X}_{t-1}\varepsilon_t\}$ ,  $\{\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\}$ ,  $\{\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\}$  a  $\{\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\varepsilon_t\}$ . Vztah

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{C} + \mathbf{D}_t)\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{J}_t,$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{J}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{pmatrix},$$

lze rozepsat následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= (\mathbf{C} + \mathbf{D}_t)\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{J}_t \\ &= \mathbf{J}_t + (\mathbf{C} + \mathbf{D}_t) \left[ (\mathbf{C} + \mathbf{D}_{t-1})\mathbf{X}_{t-2} + \mathbf{J}_{t-1} \right] \\ &= \mathbf{J}_t + (\mathbf{C} + \mathbf{D}_t)\mathbf{J}_{t-1} + (\mathbf{C} + \mathbf{D}_t)(\mathbf{C} + \mathbf{D}_{t-1}) \left[ (\mathbf{C} + \mathbf{D}_{t-2})\mathbf{X}_{t-3} + \mathbf{J}_{t-2} \right] \\ &\quad \vdots \\ &= \mathbf{J}_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=0}^{k-1} (\mathbf{C} + \mathbf{D}_{t-j})\mathbf{J}_{t-k} \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

V Nicholls a Quinn (1982), sekce 2.3, je dokázáno, že za platnosti uvedených předpokladů je výraz na pravé straně rovnosti (2.34)  $\mathcal{F}_t$ -měřitelné zobrazení náhodného procesu  $\{(\mathbf{B}(t)', \varepsilon_t)', t \in \mathbb{Z}\}$ , přičemž  $\{(\mathbf{B}(t)', \varepsilon_t)'\}$  je posloupnost *iid* náhodných vektorů, takže jde o proces striktně stacionární a ergodický. Měřitelnost vyplývá z konvergence sumy součinů matic v (2.34), kterou za předpokladu (E2) odvodili Nicholls a Quinn (1982) v důsledku 2.2.1. Dále platí

$$\mathbf{X}_{t-1}\varepsilon_t = \varepsilon_t \left( \mathbf{J}_{t-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=0}^{k-1} (\mathbf{C} + \mathbf{D}_{t-1-j})\mathbf{J}_{t-1-k} \right] \right), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t) = (B_1(t), B_2(t)) \left( \mathbf{J}_{t-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=0}^{k-1} (\mathbf{C} + \mathbf{D}_{t-1-j})\mathbf{J}_{t-1-k} \right] \right). \quad (2.36)$$

Konverguje-li výraz (2.34), jsou řady na pravé straně výrazů (2.35) a (2.36) také konvergentní. Zřejmě tedy i procesy  $\{\mathbf{X}_{t-1}\varepsilon_t\}$  a  $\{\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\}$  jsou  $\mathcal{F}_t$ -měřitelné procesy a jsou tedy také ergodické. Obdobným způsobem lze odvodit i ergodicitu procesů  $\{\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\}$  a  $\{\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\varepsilon_t\}$ .

Pro dokázání ergodicity náhodných procesů (l) a (m) stačí ještě jednou aplikovat větu 20 na náhodné procesy  $\{\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\}$  a  $\{\mathbf{X}_{t-1}\varepsilon_t\}$ .  $\square$

**Lemma 18.** *Nechť náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je proces RCA(2) splňující předpoklady (E1), (E2) a (E3'). Buď  $\{\mathcal{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  náhodný proces vytvořený z procesu  $\{\mathcal{X}_t\}$  libovolným z předpisů (a) až (m) v lemmatu 17. Pak platí*

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_t \xrightarrow{s.j.} E \mathcal{Y}_1, \quad n \rightarrow \infty.$$

V případě procesů vzniklých předpisem (g), (l) nebo (m) existuje  $\kappa > 0$ , pro které je toto tvrzení splněno.

*Důkaz:*

Z lemmatu 17 víme, že náhodný proces  $\{\mathcal{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je striktně stacionární a ergodický. Stačí tedy ověřit, že  $E |\mathcal{Y}_1| < \infty$ , a konvergenci výběrového průměru ke střední hodnotě pak dostaneme z ergodické věty (věta 19). Konečnost střední hodnoty u (a) a (b) vyplývá přímo z předpokladu (E3'). U výrazů (c) a (e) ji odvodíme pomocí Cauchy-Schwarzovy nerovnosti a u výrazů (d) a (f) pomocí Hölderovy nerovnosti při  $p = 4$  a  $q = \frac{4}{3}$ . Například

$$E |\mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3| \leq (E \mathcal{X}_t^4)^{\frac{1}{4}} (E \mathcal{X}_{t-1}^4)^{\frac{3}{4}} = E \mathcal{X}_t^4 < \infty.$$

Označme  $K$  reálnou kladnou konstantu, jejíž hodnota se průběžně může měnit, a zvolme  $\kappa = \frac{\nu}{2}$ . Pak platí, s využitím předpokladů (E1), (E2) a (E3'),

$$(g) \quad E \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+2\kappa} = E \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+\nu} = E (\mathcal{X}_{t-1}^2 + \mathcal{X}_{t-2}^2)^{2+\kappa} \leq K E |\mathcal{X}_1|^{4+\nu} < \infty,$$

$$(h) \quad E \mathbf{X}_{t-1}\varepsilon_t = E \mathbf{X}_{t-1} E \varepsilon_t = 0,$$

$$(i) \quad E \mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t) = E \mathbf{X}'_{t-1} E \mathbf{B}(t) = 0,$$

$$(j) \quad E \mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t) = E \mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1} E \mathbf{B}(t) = \mathbf{0},$$

$$(k) \quad E \mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\varepsilon_t = E \mathbf{X}'_{t-1} E \mathbf{B}(t) E \varepsilon_t = 0.$$

Dle předpokladu (E1) je  $E \varepsilon_t^4 < \infty$ ,  $E B_1(t)^4 < \infty$  a  $E B_2(t)^4 < \infty$ , takže i  $E |\varepsilon_t|^{2+\kappa} < \infty$  a

$$E \|\mathbf{B}(t)\|^{2+\kappa} = E (B_1(t)^2 + B_2(t)^2)^{1+\frac{\kappa}{2}} \leq K (E |B_1(t)|^{2+\kappa} + E |B_2(t)|^{2+\kappa}) < \infty.$$

Kombinací s již uvedenou nerovností (g) dostáváme

$$(l) \mathbb{E} \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+\nu} \|\mathbf{B}(t)\|^{2+\kappa} = \mathbb{E} \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+\nu} \mathbb{E} \|\mathbf{B}(t)\|^{2+\kappa} < \infty,$$

$$(m) \mathbb{E} \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} |\varepsilon_t|^{2+\kappa} \leq K \mathbb{E} \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+2\kappa} \mathbb{E} |\varepsilon_t|^{2+\kappa} < \infty.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Nyní se již dostáváme k vlastnímu důkazu věty 15.

*Důkaz věty 15:*

Označme  $\Phi_{\Sigma_{as}}$  distribuční funkci rozdělení  $\mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \Sigma_{as})$ . Potom

$$\begin{aligned} & \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \left| \mathbb{P}^* \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n) < \mathbf{x} \right) - \mathbb{P} \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) < \mathbf{x} \right) \right| \leq \\ & \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \left| \mathbb{P}^* \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n) < \mathbf{x} \right) - \Phi_{\Sigma_{as}}(\mathbf{x}) \right| + \\ & + \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \left| \mathbb{P} \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) < \mathbf{x} \right) - \Phi_{\Sigma_{as}}(\mathbf{x}) \right|. \end{aligned}$$

Z věty 4 víme, že

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \left| \mathbb{P} \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) < \mathbf{x} \right) - \Phi_{\Sigma_{as}}(\mathbf{x}) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Stačí tedy dokázat, že

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \left| \mathbb{P}^* \left( \sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n) < \mathbf{x} \right) - \Phi_{\Sigma_{as}}(\mathbf{x}) \right| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

neboli že při daném  $X_{-1}, X_0, \dots, X_n$  konverguje podmíněné rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$  k rozdělení  $\mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \Sigma_{as})$  v pravděpodobnosti. Výraz  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$  můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} (\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n) &= \sqrt{n} \left( \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} X_t^* - \hat{\beta}_n \right) \\
&= \sqrt{n} \left( \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} (\mathbf{X}'_{t-1} \hat{\beta}_n + u_t^*) - \hat{\beta}_n \right) \\
&= \sqrt{n} \left( \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right) \hat{\beta}_n - \hat{\beta}_n \right. \\
&\quad \left. + \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} u_t^* \right) \\
&= \sqrt{n} \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} u_t^* \\
&= \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} u_t^*. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Při vyšetřování konvergence výrazu (2.37) můžeme zkoumat jednotlivé činitele zvlášť a následně na ně použít Cramér-Slutského větu (věta 25). Nejprve se budeme věnovat výrazu

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1}.$$

Připomeňme, že

$$\mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{t-1}^2 & \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2} \\ \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2} & \mathcal{X}_{t-2}^2 \end{pmatrix}.$$

Podle lemmatu 18 platí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathcal{X}_t^2 &\xrightarrow{s.j.} \mathbb{E} \mathcal{X}_1^2, \quad n \rightarrow \infty, \\
\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1} &\xrightarrow{s.j.} \mathbb{E} \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Protože náhodná matice konverguje skoro jistě, jestliže její jednotlivé prvky konvergují skoro jistě, platí

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \xrightarrow{s.j.} \mathbb{E} \mathbf{X}_1 \mathbf{X}'_1 = \mathbf{V}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Buď nyní  $G \subset \mathbb{R}_{2 \times 2}$  množina všech regulárních matic v prostoru  $\mathbb{R}_{2 \times 2}$ . Z lemmatu 16 víme, že inverzní zobrazení matice je spojitá transformace na  $G$ . Protože  $\mathbf{V}$  je deterministická a regulární, platí  $\mathbb{P}(\mathbf{V} \in G) = 1$  a z věty o spojitě

transformaci (věta 23) dostaneme

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \xrightarrow{s.j.} \mathbf{V}^{-1}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.38)$$

Nyní bychom chtěli dokázat, že při daném  $X_{-1}, X_0, \dots, X_n$  konverguje podmíněné rozdělení statistiky

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} u_t^* \quad (2.39)$$

v pravděpodobnosti k normálnímu rozdělení. Známe-li  $X_{-1}, X_0, \dots, X_n$ , pak

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} u_t^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t$$

je lineární kombinace *iid* náhodných veličin  $v_t$ , neboť  $\hat{u}_t = X_t - \hat{\beta}'_n \mathbf{X}_{t-1}$  a

$$\hat{\beta}_n = \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} X_t,$$

tedy všechny členy ve výrazu (2.39) kromě  $v_t$  jsou funkcí  $X_{-1}, X_0, \dots, X_n$ . V centrální limitní větě (věta 24) položme  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_n) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ,  $k_n = n$  a  $\mathbf{Y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t$ . Podívejme se nyní na momenty  $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t$  podmíněné znalostí  $X_{-1}, X_0, \dots, X_n$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t \right] &= \mathbf{E} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t \mid X_{-1}, X_0, \dots, X_n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t \mathbf{E} v_t \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}^* \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t \right] &= \text{var} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t \mid X_{-1}, X_0, \dots, X_n \right] \\ &= \frac{1}{n} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \hat{u}_t^2 \text{var} v_t \\ &= \frac{1}{n} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \hat{u}_t^2 < \infty \text{ s.j.} \end{aligned}$$

Při známém  $X_{-1}, X_0, \dots, X_n$  je tudíž  $\text{var}^* \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t \right] < \infty$  pro všechna  $t$  a pro konvergenci k normálnímu rozdělení stačí ukázat, že při  $n \rightarrow \infty$  platí

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \hat{u}_t^2 \xrightarrow{s.j.} \mathbf{H},$$

kde  $\mathbf{H}$  je konečná matice, a

$$\sum_{t=1}^n \mathbf{E}^* \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t \right\|^{2+\kappa} \xrightarrow{s.j.} \mathbf{0}$$

pro nějaké  $\kappa > 0$ . Zvolíme  $\kappa = \frac{\nu}{2}$ . Připomeňme, že  $v_t$  jsou *iid* s konečnými momenty alespoň do řádu  $2 + \nu$  a že  $u_t = \mathbf{B}(t)' \mathbf{X}_{t-1} + \varepsilon_t$ . Nadále budeme pro konečnou konstantu používat značení  $K$ , přičemž hodnota  $K$  se může průběžně měnit. Platí

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^n \mathbb{E}^* \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t \right\|^{2+\kappa} = \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} |\hat{u}_t|^{2+\kappa} \mathbb{E} |v_t|^{2+\kappa} \\
& = K \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} \left| \mathcal{X}_t - \hat{\beta}'_n \mathbf{X}_{t-1} \right|^{2+\kappa} \\
& = K \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} \left| u_t + (\boldsymbol{\beta} - \hat{\beta}_n)' \mathbf{X}_{t-1} \right|^{2+\kappa} \\
& \leq K \underbrace{\frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} |u_t|^{2+\kappa}}_{(V1)} + K \underbrace{\|\boldsymbol{\beta} - \hat{\beta}_n\|^{2+\kappa} \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+2\kappa}}_{(V2)}.
\end{aligned}$$

Platí  $2\kappa = \nu$  a z lemmatu 18 vyplývá, že při  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+\nu} \xrightarrow{s.j.} \mathbb{E} \|\mathbf{X}_1\|^{4+\nu} < \infty, \quad \text{a proto} \quad \frac{1}{n^{\frac{\kappa}{2}}} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+\nu} \xrightarrow{s.j.} 0.$$

Protože  $\hat{\beta}_n$  je podle věty 4 silně konzistentní odhad parametru  $\boldsymbol{\beta}$ , platí  $\|\boldsymbol{\beta} - \hat{\beta}_n\|^{2+\kappa} \xrightarrow{s.j.} 0$ , a tedy

$$(V2) = K \|\boldsymbol{\beta} - \hat{\beta}_n\|^{2+\kappa} \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+2\kappa} \xrightarrow{s.j.} 0.$$

Konvergence výrazu (V1) se odvodí analogicky. Platí

$$\begin{aligned}
(V1) & = K \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} |u_t|^{2+\kappa} \\
& = K \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} |\mathbf{B}(t)' \mathbf{X}_{t-1} + \varepsilon_t|^{2+\kappa} \\
& \leq K \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} |\mathbf{B}(t)' \mathbf{X}_{t-1}|^{2+\kappa} + K \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} |\varepsilon_t|^{2+\kappa} \\
& \leq K \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{4+2\kappa} \|\mathbf{B}(t)\|^{2+\kappa} + K \frac{1}{n^{1+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{t=1}^n \|\mathbf{X}_{t-1}\|^{2+\kappa} |\varepsilon_t|^{2+\kappa}.
\end{aligned}$$

Z lemmatu 18 opět plyne (V1)  $\xrightarrow{s.j.} 0$ , a konečně

$$\sum_{t=1}^n \mathbb{E}^* \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_{t-1} \hat{u}_t v_t \right\|^{2+\kappa} \xrightarrow{s.j.} 0.$$

Zbývá dokázat konvergenci

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \hat{u}_t^2 \xrightarrow{P} \mathbf{H}.$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_t^2 &= \left[ \mathbf{X}_t - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n' \mathbf{X}_{t-1} \right]^2 = \left[ (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n)' \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{B}(t)' \mathbf{X}_{t-1} + \varepsilon_t \right]^2 \\ &= \mathbf{X}'_{t-1} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n) (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n)' \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{X}'_{t-1} \mathbf{B}(t) \mathbf{B}(t)' \mathbf{X}_{t-1} + \varepsilon_t^2 + \\ &\quad + 2 \mathbf{X}'_{t-1} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n) \mathbf{B}(t)' \mathbf{X}_{t-1} + 2 \mathbf{X}'_{t-1} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n) \varepsilon_t + 2 \mathbf{X}'_{t-1} \mathbf{B}(t) \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ve výrazu  $\mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \hat{u}_t^2$  nahradíme  $\hat{u}_t^2$  výrazem (2.40) a podívejme se na tvar jednotlivých sčítanců:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_{t-1} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n) (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n)' \mathbf{X}_{t-1} &= \left[ X_{t-1} (\beta_1 - \hat{\beta}_{n1}) + X_{t-2} (\beta_2 - \hat{\beta}_{n2}) \right]^2 \\ &= X_{t-1}^2 (\beta_1 - \hat{\beta}_{n1})^2 + 2 X_{t-1} X_{t-2} (\beta_1 - \hat{\beta}_{n1}) (\beta_2 - \hat{\beta}_{n2}) + X_{t-2}^2 (\beta_2 - \hat{\beta}_{n2})^2 \end{aligned}$$

Levý horní prvek matice  $(\mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1}) (\mathbf{X}'_{t-1} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n) (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n)' \mathbf{X}_{t-1})$  má tedy tvar

$$X_{t-1}^4 (\beta_1 - \hat{\beta}_{n1})^2 + 2 X_{t-1}^3 X_{t-2} (\beta_1 - \hat{\beta}_{n1}) (\beta_2 - \hat{\beta}_{n2}) + X_{t-1}^2 X_{t-2}^2 (\beta_2 - \hat{\beta}_{n2})^2.$$

Dle lemmatu 18 konvergují výběrové průměry tvořené prvky procesů  $\{\mathcal{X}_{t-1}^4\}$ ,  $\{X_{t-1}^3 X_{t-2}\}$  a  $\{X_{t-1}^2 X_{t-2}^2\}$  k jejich konečným středním hodnotám (skoro jistě). Výraz  $(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n)$  konverguje skoro jistě k nule díky konzistenci odhadu  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$  (viz věta 4), a proto pro  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[ X_{t-1}^4 (\beta_1 - \hat{\beta}_{n1})^2 + 2 X_{t-1}^3 X_{t-2} (\beta_1 - \hat{\beta}_{n1}) (\beta_2 - \hat{\beta}_{n2}) + X_{t-1}^2 X_{t-2}^2 (\beta_2 - \hat{\beta}_{n2})^2 \right] = \\ &= (\beta_1 - \hat{\beta}_{n1})^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 + 2 (\beta_1 - \hat{\beta}_{n1}) (\beta_2 - \hat{\beta}_{n2}) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^3 X_{t-2} + \\ &\quad + (\beta_2 - \hat{\beta}_{n2})^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 X_{t-2}^2 \xrightarrow{s.j.} 0. \end{aligned}$$

Obdobným způsobem dostaneme konvergenci k nule i u ostatních prvků matice  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1}) (\mathbf{X}'_{t-1} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n) (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n)' \mathbf{X}_{t-1})$ , tudíž celá tato matice konverguje skoro jistě k nulové matici. Analogicky můžeme pomocí lemmatu 18 odvodit i následující vztahy:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1}) (\mathbf{X}'_{t-1} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n) \mathbf{B}(t)' \mathbf{X}_{t-1}) \xrightarrow{s.j.} \mathbf{0}, \\ &\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1}) (\mathbf{X}'_{t-1} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n) \varepsilon_t) \xrightarrow{s.j.} \mathbf{0}, \\ &\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1}) (\mathbf{X}'_{t-1} \mathbf{B}(t) \varepsilon_t) \xrightarrow{s.j.} \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Z matice  $(\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1})\hat{u}_t^2$  nám zbyvají již jen členy  $\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}\varepsilon_t^2$  a  $(\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1})(\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\mathbf{B}(t)'\mathbf{X}_{t-1})$ . Protože

$$\mathbb{E} \mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}\varepsilon_t^2 = \mathbb{E} \mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1} \mathbb{E} \varepsilon_t^2 = \mathbf{V}\sigma^2 < \infty,$$

z ergodické věty vyplývá

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}\varepsilon_t^2 \xrightarrow{s.j.} \mathbf{V}\sigma^2.$$

Konvergenci druhé matice ukážeme opět po složkách. Platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\mathbf{B}(t)'\mathbf{X}_{t-1}) &= (\mathcal{X}_{t-1}B_1(t) + \mathcal{X}_{t-2}B_2(t))^2 \\ &= \mathcal{X}_{t-1}^2B_1(t)^2 + 2\mathcal{X}_{t-1}\mathcal{X}_{t-2}B_1(t)B_2(t) + \mathcal{X}_{t-2}^2B_2(t)^2. \end{aligned}$$

Označme  $\mathbf{L} = (l)_{i,j}$  matici  $(\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1})(\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\mathbf{B}(t)'\mathbf{X}_{t-1})$ . Pak

$$\begin{aligned} \mathbb{E} l_{1,1} &= \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^4 \mathbb{E} B_1(t)^2 + 2 \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \mathcal{X}_{t-2} \mathbb{E} B_1(t)B_2(t) + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 \mathbb{E} B_2(t)^2 \\ &= \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^4 \omega_1^2 + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 \omega_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} l_{2,2} &= \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 \mathbb{E} B_1(t)^2 + 2 \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2}^3 \mathbb{E} B_1(t)B_2(t) + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-2}^4 \mathbb{E} B_2(t)^2 \\ &= \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 \omega_1^2 + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-2}^4 \omega_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} l_{1,2} &= \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \mathcal{X}_{t-2} \mathbb{E} B_1(t)^2 + 2 \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 \mathbb{E} B_1(t)B_2(t) + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2}^3 \mathbb{E} B_2(t)^2 \\ &= \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \mathcal{X}_{t-2} \omega_1^2 + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2}^3 \omega_2^2, \end{aligned}$$

$$\mathbb{E} l_{2,1} = \mathbb{E} l_{1,2}.$$

Je tedy

$$\mathbb{E} \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^4 \omega_1^2 + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 \omega_2^2 & \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \mathcal{X}_{t-2} \omega_1^2 + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2}^3 \omega_2^2 \\ \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \mathcal{X}_{t-2} \omega_1^2 + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2}^3 \omega_2^2 & \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 \omega_1^2 + \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-2}^4 \omega_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}$$

a z lemmatu 18 dostaneme konvergenci

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1})(\mathbf{X}'_{t-1}\mathbf{B}(t)\mathbf{B}(t)'\mathbf{X}_{t-1}) \xrightarrow{s.j.} \mathbf{\Lambda}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Celkově tedy platí

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}\hat{u}_t^2 \xrightarrow{s.j.} \sigma^2\mathbf{V} + \mathbf{\Lambda}, \quad n \rightarrow \infty,$$

přičemž díky předpokladům (E1) a (E3') je  $\sigma^2\mathbf{V} + \mathbf{\Lambda} < \infty$ .

Splnili jsme všechny předpoklady centrální limitní věty (věta 24), ovšem s tím rozdílem, že v jednotlivých podmínkách v našem případě nejde o konvergenci reálných čísel, ale konvergenci náhodných veličin. Dostáváme tedy konvergenci podmíněného rozdělení při znalosti  $X_{-1}, X_0, \dots, X_n$ :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1}u_t^* \xrightarrow{d} \mathbf{Z} \quad \text{skoro jistě, a tedy i v pravděpodobnosti,} \quad (2.41)$$



kde  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{V} + \mathbf{\Lambda})$ .

Zbývá již jen aplikovat Cramérovu-Slutského větu (věta 25) na výraz (2.37). Ze vztahu (2.38) vyplývá konvergence

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}'_{t-1} \right)^{-1} \xrightarrow{P} \mathbf{V}^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Kombinací se vztahem (2.41) tedy dostáváme

$$\sqrt{n} \left( \hat{\boldsymbol{\beta}}_n^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n \right) \xrightarrow{d} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z} \text{ v pravděpodobnosti.}$$

Protože matice  $\mathbf{V}^{-1}$  je deterministická a  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{E} [(\mathbf{X}_t \mathbf{X}'_t) (\mathbf{X}'_t \mathbf{\Omega} \mathbf{X}_t)]$ , platí

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{E} [(\mathbf{X}_t \mathbf{X}'_t) (\mathbf{X}'_t \mathbf{\Omega} \mathbf{X}_t)] \mathbf{V}^{-1}).$$

Tím je důkaz věty 15 dokončen.

□



### 3. Simulace

V této kapitole na několika simulačních experimentech prověříme vhodnost popsaných bootstrapových metod k analýze vlastností odhadu parametru  $\beta$ , resp.  $\boldsymbol{\beta}$  či statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ , resp.  $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})$  procesů  $RCA(1)$  a  $RCA(2)$ . Protože se v této práci nezabýváme testováním, zda naše data odpovídají modelu  $RCA(p)$ , všechny experimenty budou provedené na simulovaných procesech. V případě reálných dat by kromě ověření, zda volíme správně autoregresní model (včetně správného řádu modelu), bylo potřeba otestovat také nulovost či nenulovost rozptylu, resp. varianční matice autoregresního koeficientu. Metodu pro test hypotézy, že  $\omega^2 = 0$ , resp.  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ , lze nalézt v kapitole 6 monografie Nicholls a Quinn (1982).

Abychom odlišili reziduální bootstrap pro procesy  $AR(1)$  a reziduální bootstrap pro procesy  $RCA(1)$ , budeme v textu značit reziduální metodu popsanou v článku Kreiss a Fink (2013) jako *reziduální KF bootstrap* (v tabulkách ho budeme značit  $RB_{KF}$ ). Varianty reziduálního KF bootstrapu budeme označovat *reziduálně momentový KF bootstrap* ( $RM_{KF}$ ) a *momentový KF bootstrap* ( $MB_{KF}$ ).

#### Intervaly spolehlivosti

Popsané metody budeme mimo jiné porovnávat pomocí pokrytí intervalů spolehlivosti pro parametr  $\beta$ . Existují různé způsoby, jak s využitím metody bootstrap konstruovat intervalové odhady. Tři základní postupy jsou popsány v článku Prášková (2004a), kapitola 2.3. Nám se zde hodí tzv. *hybridní* intervaly spolehlivosti. Uvažujeme statistiku  $T_n = \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  a označme její distribuční funkci  $H_n(x)$ . Chceme zkonstruovat interval spolehlivosti pro parametr  $\beta$  s koeficientem  $1 - \alpha$ . Interval spolehlivosti má tvar

$$\left( \hat{\beta}_n - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \hat{\beta}_n - \frac{q_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right),$$

kde  $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$  a  $q_{\frac{\alpha}{2}}$  jsou kvantily distribuční funkce  $H_n(x)$ . Víme, že při použití vhodné bootstrapové metody je asymptotické rozdělení statistiky  $T_n$  stejné jako asymptotické rozdělení bootstrapové statistiky  $T_n^* = \sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$ . Kvantily  $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$  a  $q_{\frac{\alpha}{2}}$  tedy aproximujeme pomocí kvantilů  $q_{1-\frac{\alpha}{2}}^*$  a  $q_{\frac{\alpha}{2}}^*$  distribuční funkce  $H_n^*(x)$  statistiky  $T_n^*$ . Protože ale teoretickou distribuční funkci  $H_n^*(x)$  neznáme, využijeme metodu Monte Carlo. Vygenerujeme  $B$  bootstrapových řad  $X_{0,b}^*, \dots, X_{n,b}^*$ , pro každou spočteme odhad  $\hat{\beta}_{n,b}^*$  a statistiku  $T_{n,b}^*$  a pomocí hodnot  $T_{n,1}^*, \dots, T_{n,B}^*$  zkonstruujeme empirické kvantily  $\hat{q}_{1-\frac{\alpha}{2}}^*$  a  $\hat{q}_{\frac{\alpha}{2}}^*$ . Výsledný interval spolehlivosti tedy bude mít tvar

$$\left( \hat{\beta}_n - \frac{\hat{q}_{1-\frac{\alpha}{2}}^*}{\sqrt{n}}, \hat{\beta}_n - \frac{\hat{q}_{\frac{\alpha}{2}}^*}{\sqrt{n}} \right).$$

## 3.1 Proces RCA(1)

Pro porovnání bootstrapových metod generujeme časové řady podle modelu

$$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

kde

- $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$  nebo  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$  (tedy  $B_t$  mají normální nebo rovnoměrné rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\omega^2$ ),
- $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  nebo  $\varepsilon_t \sim DEx(0, \sqrt{\frac{\sigma^2}{2}})$  (tedy  $\varepsilon_t$  mají normální či dvojitě exponenciální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma^2$ ),
- $n \in \{200, 500\}$ .

Zvolené kombinace parametrů  $\beta$ ,  $\omega^2$ ,  $\sigma^2$  jsou uvedené v tabulce 3.1. Připomeňme, že  $E B_t^4 = \alpha_4$  a  $E \varepsilon_t^4 = \delta_4$ . Kromě vlastních hodnot parametrů nás zajímá splnění podmínek pro existenci druhého, čtvrtého a osmého momentu generovaného náhodného procesu, které závisí i na rozdělení  $B_t$ :

$$E \mathcal{X}_t^2 < \infty \Leftrightarrow M2 = \beta^2 + \omega^2 < 1, \quad (3.1)$$

$$E \mathcal{X}_t^4 < \infty \Leftrightarrow M4 = \beta^4 + 6\beta^2\omega^2 + \alpha_4 < 1, \quad (3.2)$$

$$E \mathcal{X}_t^8 < \infty \Leftrightarrow M8 = \beta^8 + 28\beta^6\omega^2 + 70\beta^4\alpha_4 + 28\beta^2 E B_0^6 + E B_0^8 < 1. \quad (3.3)$$

Hodnoty výrazů  $M2$ ,  $M4$  a  $M8$  jsou také uvedené v tabulce 3.1. Dále nás zajímá hodnota asymptotického rozptylu statistiky  $T_n = \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ , který značíme  $\sigma_{as}^2$  a jehož tvar je uveden ve vzorci (2.10).

Sada parametrů  $p4$  odpovídá procesu  $AR(1)$  a přidali jsme ji, abychom viděli, zda naše metody fungují i v případě, že špatně odhadneme model, kterým byla naše data vygenerována, a autoregresní koeficient je ve skutečnosti nenáhodný.

*Poznámka.* Pro získání stacionární časové řady je obvyklým postupem generovat časovou řadu delší, než je deklarovaný počet pozorování, a prvních  $k$  hodnot vynechat. I my volíme tento přístup. Generování zahájíme hodnotou  $X_0 = 0$ , vygenerujeme  $n + 51$  hodnot a prvních 50 hodnot následně vynecháme. Obdobně budeme postupovat i u procesu  $RCA(2)$ .

### 3.1.1 Reziduální a momentové metody

**Výběr  $m(n)$  a  $M(n)$**

Abychom mohli porovnat tři metody navržené v článku Kreiss a Fink (2013), které jsme popsali v sekcích 2.3.1 a 2.3.2, potřebujeme nejprve určit meze  $m(n)$  a  $M(n)$  pro generování bootstrapových reziduí  $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*$  a  $B_1^*, \dots, B_n^*$ . Vybrané hodnoty mají splňovat předpoklady (C4) a (C5), které zaručují konzistenci metody. Horní mez pro generování  $\varepsilon_t^*$  jsme volili následovně:

$$m(n) \in \left\{ 2n^{-1/3}, 2,5n^{-1/3}, 2n^{-1/6}, 2,5n^{-1/6}, \frac{2}{\ln(n)}, \frac{2,5}{\ln(n)} \right\}.$$

	rozdělení $B_t, \varepsilon_t$	$\beta$	$\omega^2$	$\sigma^2$	$\alpha_4$	$\delta_4$	M2	M4	M8	$\sigma_{as}^2$	
p1	$\mathcal{N}, \mathcal{N}$	-0,1	0,3	0,8	0,27	1,92	0,31	0,288	0,966	1,833	
	$\mathcal{N}, DE_x$										3,84
	$\mathcal{R}, \mathcal{N}$										1,92
	$\mathcal{R}, DE_x$										3,84
p2	$\mathcal{N}, \mathcal{N}$	0,1	0,3	0,8	0,27	1,92	0,31	0,288	0,966	1,833	
	$\mathcal{N}, DE_x$										3,84
	$\mathcal{R}, \mathcal{N}$										1,92
	$\mathcal{R}, DE_x$										3,84
p3	$\mathcal{N}, \mathcal{N}$	0,1	0,4	0,8	0,48	1,92	0,41	0,504	2,96	2,603	
	$\mathcal{N}, DE_x$										3,84
	$\mathcal{R}, \mathcal{N}$										1,92
	$\mathcal{R}, DE_x$										3,84
p4	$\mathcal{N}, \mathcal{N}$	0,5	0	0,8	0	1,92	0,25	0,062	0,004	0,750	
	$\mathcal{N}, DE_x$										3,84
	$\mathcal{R}, \mathcal{N}$										1,92
	$\mathcal{R}, DE_x$										3,84
p5	$\mathcal{N}, \mathcal{N}$	0,5	0,15	0,8	0,068	1,92	0,40	0,355	0,772	1,186	
	$\mathcal{N}, DE_x$										3,84
	$\mathcal{R}, \mathcal{N}$										1,92
	$\mathcal{R}, DE_x$										3,84
p6	$\mathcal{N}, \mathcal{N}$	0,1	0,3	1	0,27	3	0,31	0,288	0,966	1,833	
	$\mathcal{N}, DE_x$										6
	$\mathcal{R}, \mathcal{N}$										3
	$\mathcal{R}, DE_x$										6

Tabulka 3.1: Parametry procesu  $RCA(1)$ .

Dolní mez pro generování  $B_t^*$  jsme nastavili dle doporučení v článku Kreiss a Fink (2013) a pouze jsme měnili konstantu:

$$M(n) = k \cdot \ln(\ln(n)), \quad k \in \{0,8, 0,9, \dots, 1,3\}.$$

S každou dvojicí  $m(n)$  a  $M(n)$  jsme pro 1000 nasimulovaných řad metodou reziduální KF bootstrap generovali 90% intervaly spolehlivosti a porovnávali jejich pokrytí skutečné hodnoty parametru  $\beta$ . Ukázalo se, že z navržených hodnot  $m(n)$  lze použít libovolnou a na výsledek to nemá příliš velký vliv (viz obrázek 3.6), přestože mezi nejvyšší a nejnižší hodnotou (0,34 a 1,03) je relativně velký rozdíl a velikost množiny reziduí pro generování  $\varepsilon_t^*$  se značně liší. Naopak u  $M(n)$  jsou rozdíly patrné. Čím vyšší je hodnota konstanty  $k$ , tím méně intervalů spolehlivosti překrývá  $\beta$ . Nicméně i pro  $k = 1,3$ , kdy při  $n = 200$  počet prvků množiny  $\{\tilde{B}_{S_1}, \dots, \tilde{B}_{S_{N_B}}\}$ , ze které generujeme  $B_t^*$ , nepřesahuje 20 a není výjimkou případ  $N_B = 3$ , neklesá pokrytí pod 86 %. Při nižších hodnotách  $k$  bývá pokrytí vyšší, než je požadováno. Kromě meze  $M(n)$  má ale vliv i rozdělení  $\varepsilon_t$  a  $B_t$ . Při stejné kombinaci  $m(n)$  a  $M(n)$  a při  $n = 200$  bývá nižší pokrytí parametru  $\beta$  u řad, kde  $\varepsilon_t$  má dvojitě exponenciální rozdělení.

Podíváme - li se na hodnoty  $\sigma_{as}^2$  v tabulce 3.1, asymptotický rozptyl statistiky  $T_n$  a tedy i odhadu  $\hat{\beta}_n$  je vyšší v případě  $\varepsilon \sim DEx(0, \sigma^2/\sqrt{2})$ . Tím může být způsobeno nižší pokrytí parametru  $\beta$  bootstrapovými intervaly spolehlivosti. Dále, má-li  $\varepsilon_t$  normální rozdělení, pak mírně vyšší pokrytí intervalů spolehlivosti dává metoda u časových řad, kde  $B_t$  je rovnoměrně rozdělené. I tady lze rozdíl vysvětlit souvislostí s menším asymptotickým rozptylem statistiky  $T_n$  pro řady s rovnoměrně rozdělenými chybami  $B_t$ .

Při  $n = 500$  jsou rozdíly mezi jednotlivými rozděleními již méně znatelné a obecně je pokrytí vyšší než 90 %. I konstanta  $k = 1,3$  je tedy pro delší řady pro zvolené parametry a rozdělení chybových složek procesu možná příliš nízká. Nicméně i při této délce řady občas klesne počet prvků množiny  $\{\tilde{B}_{S_1}, \dots, \tilde{B}_{S_{N_B}}\}$  pod 10.

U procesu  $AR(1)$  je pokrytí intervalů spolehlivosti zřetelně vyšší, než u ostatních časových řad. Příčinou je pravděpodobně vychýlený odhad rozptylu statistiky  $T_n$ . Dále v textu se budeme odhadem rozptylu této statistiky také zabývat, takže si případné vychýlení můžeme ověřit. Další obrázky znázorňující pokrytí pro všechna uvažovaná rozdělení  $\varepsilon_t$  a  $B_t$  jsou uvedené v kapitole A. Přílohy, sekce A.2 Grafy (obrázky 3.11 – 3.18).

V dalších simulacích již pro  $\varepsilon_t$  budeme uvažovat jen normální rozdělení. Protože nechceme volit různé meze pro různé kombinace délky časové řady, rozdělení chybových složek a hodnoty parametrů, pro KF reziduální bootstrap zvolíme meze  $M(n) = 2,5n^{-1/6}$  a  $M(n) = 1,3 \ln(\ln(n))$ .

## Odhad momentů $E \mathcal{X}_t^2$ a $E \mathcal{X}_t^4$

Neznáme-li přesné hodnoty parametrů modelu  $RCA(1)$  a chceme-li ke konstrukci intervalového odhadu použít asymptotické normální rozdělení, potřebujeme kromě odhadů parametrů  $\beta$ ,  $\omega^2$  a  $\sigma^2$  také odhadnout  $E \mathcal{X}_t^2$  a  $E \mathcal{X}_t^4$ . K tomu můžeme použít buď výběrové momenty spočtené z pozorování  $X_t^2$  a  $X_t^4$ , nebo můžeme do vzorců (2.11) a (2.12) dosadit odhady  $\beta$ ,  $\omega^2$ ,  $\sigma^2$ ,  $\delta_4$  a  $\alpha_4$ . Metody používající asymptoticky normální rozdělení s rozptylem odhadnutým pomocí výběrových momentů budeme značit  $AS_V$ . Metody, kde se pro odhad asymptotického rozptylu používají jen odhady parametrů, budeme značit  $AS_P$ . Nevýhodou druhého přístupu je, že musíme odhadovat dva parametry navíc. Vzorec pro vyjádření  $E \mathcal{X}_t^4$  je také již poměrně složitý, parametry se zde vyskytují opakovaně a chyby odhadů se tudíž mohou nasčítat. Zejména odhady parametru  $\alpha_4$  vychází pro naše data velmi variabilní. Na obrázcích 3.6 a 3.11 – 3.18 v sekci A.2 Grafy vidíme, že pokrytí 90% intervalů spolehlivosti zkonstruovaných pomocí asymptotického normálního rozdělení metodou  $AS_P$  vychází mírně hůř než s metodou  $AS_V$ , pokud je vyšší hodnota parametrů  $\beta$  nebo  $\omega^2$  a tedy hodnota výrazů  $M2$  a  $M4$  je také vyšší. Tyto rozdíly jsou však patrné jen pro řady o 200 pozorováních. Při  $n = 500$  již vychází pokrytí u obou metod prakticky totožně. Asymptoticky normálnímu rozdělení statistiky  $T_n$  se ještě dále v textu budeme věnovat při porovnávání bootstrapových metod.

## Momentové metody

Modifikace reziduálního bootstrapu popsané v sekci 2.3.2 generují bootstrapová rezidua  $\varepsilon_t^*$  a  $B_t^*$  z rozdělení, jejichž první čtyři momenty odpovídají čtveřicím  $(0, \hat{\omega}_n^2, 0, \hat{\alpha}_{4n})$ , respektive  $(0, \hat{\sigma}_n^2, 0, \hat{\delta}_{4n})$ . V článku Hall a Ma (2007) byl popsán následující způsob generování náhodných veličin tak, aby jejich první a třetí momenty byly rovny nule a druhé a čtvrté momenty odpovídaly předepsaným hodnotám.

Mějme náhodou veličinu  $Y$  s diskrétním rozdělením:

$$Y = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\alpha_4}}{\omega}, & p = \frac{\omega^4}{2\alpha_4}, \\ 0, & p = 1 - \frac{\omega^4}{\alpha_4}, \\ \frac{\sqrt{\alpha_4}}{\omega}, & p = \frac{\omega^4}{2\alpha_4}. \end{cases}$$

Rozdělení je symetrické kolem nuly, tudíž  $E Y = E Y^3 = 0$ . Dále

$$E Y^2 = 2 \frac{\alpha_4}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^4}{2\alpha_4} = \omega^2,$$

$$E Y^4 = 2 \frac{\alpha_4^2}{\omega^4} \cdot \frac{\omega^4}{2\alpha_4} = \alpha_4.$$

Bootstrapová rezidua  $B_t^*$  tedy můžeme generovat jako nezávislé náhodné veličiny s rozdělením, jako má náhodná veličina  $Y$ , pouze neznámé hodnoty  $\omega^2$  a  $\alpha_4$  nahradíme jejich odhady. Analogicky  $\varepsilon_t^*$  budeme vybírat nezávisle z tříbodového rozdělení s hodnotami  $(-\sqrt{\hat{\delta}_{4n}/\hat{\sigma}_n}, 0, \sqrt{\hat{\delta}_{4n}/\hat{\sigma}_n})$  a s pravděpodobnostmi  $(\frac{\hat{\sigma}_n^4}{2\hat{\delta}_{4n}}, 1 - \frac{\hat{\sigma}_n^4}{\hat{\delta}_{4n}}, \frac{\hat{\sigma}_n^4}{2\hat{\delta}_{4n}})$ . Předpokladem této metody je platnost následujících nerovností:

$$0 < \frac{\omega^4}{\alpha_4} \leq 1 \quad \text{a} \quad 0 < \frac{\sigma^4}{\delta_4} \leq 1,$$

respektive

$$0 < \frac{\hat{\omega}^4}{\hat{\alpha}_4} \leq 1 \quad \text{a} \quad 0 < \frac{\hat{\sigma}^4}{\hat{\delta}_4} \leq 1.$$

Je-li  $\frac{\omega^4}{\alpha_4} = 1$ , tedy  $\omega^4 = \alpha_4$ , pak náhodná veličina  $Y$  nabývá jen dvou hodnot,  $-\omega$  a  $\omega$ , přičemž  $E Y^2 = \omega^2$  a  $E Y^4 = \omega^4$ . Jelikož u procesu  $RCA(1)$  předpokládáme nenulovost  $\sigma^2$  a  $\omega^2$ , plynou první dvě nerovnosti přímo ze vztahu

$$(E |X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (E |X|^q)^{\frac{1}{q}}$$

pro  $0 < p < q$ . Jde tedy o předpoklady, které platit z teoretického hlediska musí a metodu nijak neomezují. Platnost druhé sady podmínek ale závisí na přesnosti odhadů parametrů. A v našem případě se ukazuje, že ve značném procentu případů není možné odhadnuté parametry tímto způsobem použít. Nejen, že podíl  $\hat{\omega}_n^4/\hat{\alpha}_{4n}$  je často větší než jedna, ale také u mnoha řad vychází odhad  $\hat{\alpha}_{4n}$  záporný, tudíž nemůže figurovat jako čtvrtý moment pravděpodobnostního rozdělení. Možným vysvětlením pro takový výsledek je kumulace chyb během odhadování jednotlivých parametrů. Parametry  $\alpha_4$  a  $\delta_4$  odhadujeme jako koeficienty regresního modelu

$$\tilde{u}_t = \delta_4 + \alpha_4 X_{t-1}^4 + \epsilon_t, \quad (3.4)$$

kde  $\tilde{u}_t = \hat{u}_t^4 - 6\hat{\omega}_n^2 \hat{\sigma}_n^2 X_{t-1}^2$  a  $\hat{u}_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}$ . Nejprve tedy odhadneme  $\beta$ , pomocí  $\hat{\beta}_n$  získáme odhady  $\omega^2$  a  $\sigma^2$  a nakonec pomocí všech tří odhadů odhadneme  $\alpha_4$  a  $\delta_4$ . I když použijeme konzistentní odhady  $\hat{\beta}_n$ ,  $\hat{\sigma}_n^2$  a  $\hat{\omega}_n^2$  a odhady  $\hat{\alpha}_4$  a  $\hat{\delta}_4$  jsou také konzistentní, v konečném vzorku dat odhady nemusí odpovídat skutečným hodnotám parametrů. Podíváme-li se na problém ještě z jiného úhlu, příčinou může být i pominutí některých členů v rovnosti

$$u_t^4 = B_t^4 \mathcal{X}_{t-1}^4 + 4B_t^3 \mathcal{X}_{t-1}^3 \varepsilon_t + 6B_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 \varepsilon_t^2 + 4B_t \mathcal{X}_{t-1} \varepsilon_t^3 + \varepsilon_t^4$$

přechodem ke střední hodnotě

$$\mathbb{E} u_t^4 = \alpha_4 \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^4 + 6\omega^2 \sigma^2 \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 + \delta_4,$$

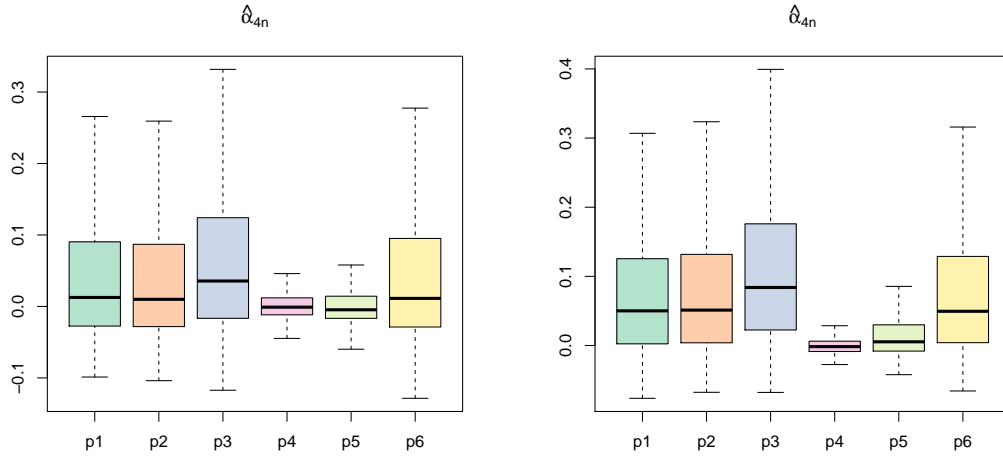
viz rovnice (2.16). Střední hodnota členů  $4B_t^3 \mathcal{X}_{t-1}^3$  a  $4B_t \mathcal{X}_{t-1} \varepsilon_t^3$  je rovna nule a dokud je  $X_{t-1}$  relativně malé, může být jejich vliv zanedbatelný. Nicméně vzhledem k tomu, že se v modelu (3.4) vyskytuje  $X_{t-1}$  ve vyšších mocninách, již může při vyšších hodnotách  $X_{t-1}$  člen  $4B_t^3 \mathcal{X}_{t-1}^3$  v modelu chybět a jeho nepřítomnost vychylovat směrnici regresní přímky. Na obrázku 3.7 je znázorněna závislost  $\tilde{u}_t$  na  $X_{t-1}^4$  u tří časových řad vygenerovaných podle modelu  $RCA(1)$  se sadami parametrů p1–p3 a s normálně rozdělenými chybami  $\varepsilon_t$  a  $B_t$ . Směrnice prokládané přímky může být do značné míry ovlivněna několika málo odlehlými hodnotami, které se u jednotlivých modelů vyskytují.

Pro model  $RCA(1)$  přikládáme graf 3.1 znázorňující odhady parametru  $\alpha_4$  pro procesy, kde  $\varepsilon_t$  a  $B_t$  mají normální rozdělení. Vidíme, že pro řady s  $n = 200$  jsou dolní kvartily u všech sad parametrů záporné, značná část odhadů tedy leží pod nulou. U delších řad již vychází odhady lépe. Výjimku tvoří proces  $AR(1)$ , kde je  $\alpha_4 = 0$ , a proces s  $\omega^2 = 0,15$ , kde  $\alpha_4 = 0,068$ . U takto nízké hodnoty parametru zůstává odhad v mnoha případech záporný. Na obrázku 3.2 dále vidíme, že i podíl  $\hat{\omega}_n^4 / \hat{\alpha}_{4n}$  často leží mimo interval  $(0, 1)$ . V takových případech nelze u dané řady momentové metody použít. Odhady ostatních parametrů jsou nepříznivé jen v zanedbatelném zlomku případů, takže jejich hodnoty zde graficky prezentovat nebudeme.

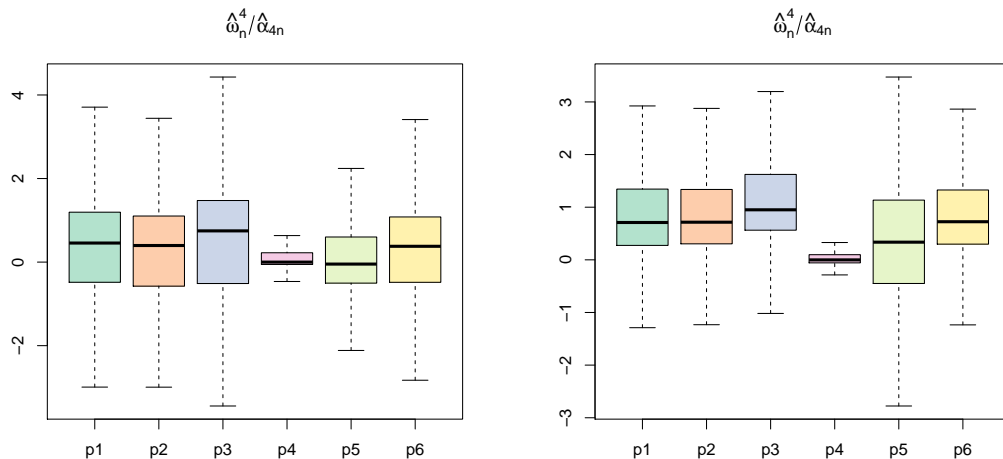
Přestože nám nevychází odhady parametrů příznivě, chtěli bychom porovnat reziduální KF bootstrap s jeho momentovými variantami. Generovali jsme tedy takové množství řad, abychom v nich našli 1000 případů, na kterých lze momentové metody použít. U těchto řad jsme opět konstruovali intervaly spolehlivosti pro parametr  $\beta$  metodami reziduální KF bootstrap, reziduálně momentový KF bootstrap a momentový KF bootstrap a pomocí asymptoticky normálního rozdělení, s oběma způsoby odhadnutí asymptotického rozptylu. Procenta použitelných řad se pohybují pro model  $RCA(1)$  u řad s 200 pozorováními zhruba mezi 20 a 30 % a u řad s 500 pozorováními přibližně mezi 30 a 40 %. Tyto počty se pro různá rozdělení chybových složek  $B_t$  výrazně neliší. U modelu  $AR(1)$  je vhodných jen přibližně 10 % řad, což je způsobené vysokou mírou záporných odhadů parametru  $\alpha_4$ .

Konstruovali jsme 90%, 95% a 99% intervaly spolehlivosti a sledovali jejich pokrytí skutečné hodnoty parametru  $\beta$ . Intervaly spočtené metodou reziduální





Obrázek 3.1: Odhady parametru  $\alpha_4$  v modelu  $RCA(1)$  s normálně rozdělenými chybami  $\varepsilon_t$  i  $B_t$ . Extrémní hodnoty nejsou zobrazeny. Odhady byly spočteny pro 1000 nasimulovaných řad, vlevo o 200 a vpravo o 500 pozorováních.



Obrázek 3.2: Podíl  $\hat{\omega}_n^4 / \hat{\alpha}_{4n}$  v modelu  $RCA(1)$  s normálně rozdělenými chybami  $\varepsilon_t$  i  $B_t$ . Extrémní hodnoty nejsou zobrazeny. Odhady byly spočteny pro 1000 nasimulovaných řad, vlevo o 200 a vpravo o 500 pozorováních.

KF bootstrap pokrývají hodnotu  $\beta$  ve větší míře, než je požadováno. Zejména je to patrné u 90% intervalů. Momentový a reziduálně momentový bootstrap dávají hodnoty bližší nominální hladině. Tento výsledek není překvapivý, generování reziduí přímo z rozdělení, jehož momenty odpovídají původnímu rozdělení chybových složek, může dávat lepší výsledky, než výběr z množiny odhadnutých reziduí, která se u každé řady může značně lišit. Nicméně důvodem může být i nevhodně zvolená hodnota  $M(n)$  u reziduálního KF bootstrapu. Asymptoticky normální intervaly vedou u kratších řad také k vyššímu pokrytí. U řad s 500 pozorováními se pokrytí přiblíží hladině  $1 - \alpha$ . Oba přístupy výpočtu asymptotického rozptylu dávají takřka stejné výsledky. Pro proces  $AR(1)$  všechny metody vedou k vyššímu pokrytí. Výsledky jsou uvedené v tabulkách 3.3, 3.17, 3.19

a 3.21. Tabulka 3.3 je vložena v této kapitole, zbylé tabulky jsou přiloženy v sekci A.1 Tabulky.

Protože předvýběr vhodných časových řad může eliminováním „extrémních hodnot“ zvýšit pokrytí intervalových odhadů a tak značně zkreslit výsledky, pro porovnání jsme zkonstruovali intervalové odhady na tisíci časových řad již pouze metodou reziduálního KF bootstrapu a asymptoticky normálního rozdělení, bez ohledu na to, jak u jednotlivých řad vychází odhady parametrů. U všech tří metod skutečně došlo ke zmenšení pokrytí parametru  $\beta$ . Zejména reziduální KF bootstrap se tím dostal blíže k hodnotám  $1 - \alpha$ . Asymptotické metody se u některých sad parametrů naopak od hodnoty  $1 - \alpha$  vzdálily. Celkově všechny tři metody dávají v tomto ohledu relativně dobré výsledky. Výsledky momentového a reziduálně momentového KF bootstrapu jsou sice srovnatelné, ale použitelnost této metody je omezená. Výsledky simulací jsou uvedeny v tabulkách 3.4, 3.18, 3.20 a 3.22. Poslední tři tabulky jsou připojeny na konci práce v sekci A.1 Tabulky.

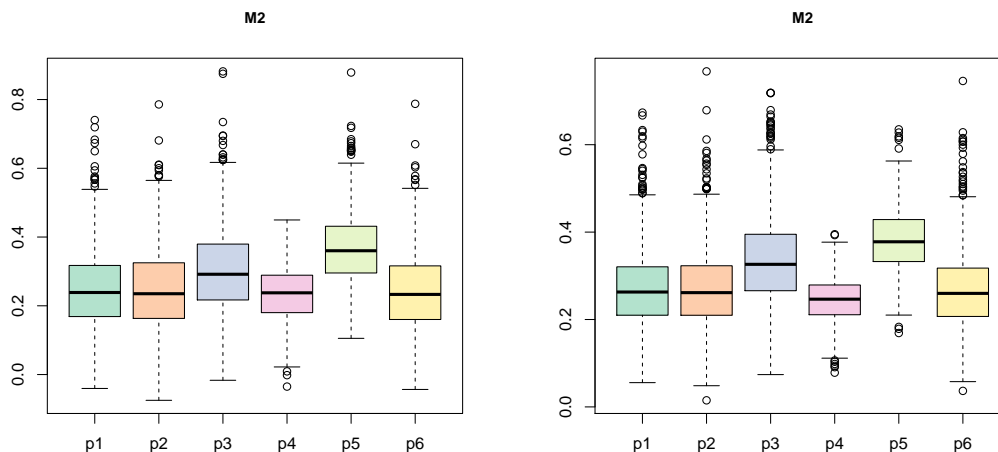
*Poznámka.* V průběhu simulačních experimentů jsme pracovali s odhady metodou nejmenších čtverců popsanými v této práci. Je možné, že za použití nějaké jiné metody pro odhad parametrů  $\alpha_4$  a  $\delta_4$  bychom dostali lepší výsledky. Pokusili jsme se pro parametry  $\sigma^2$  a  $\omega^2$  použít i odhady získané metodou maximální kvazivěrohodnosti popsané v Nicholls a Quinn (1982), které iteračně zpřesňují odhady metodou nejmenších čtverců, a následně odhadovat  $\alpha_4$  a  $\delta_4$  metodou nejmenších čtverců pomocí těchto přesnějších odhadů, ale na celkový výsledek to nemá příliš velký vliv.

*Poznámka.* Aby při aplikaci reziduálního KF bootstrapu a jeho variant bootstrapové repliky původní časové řady tvořily také stacionární řadu, požadujeme splnění podmínek 3.1 a 3.2 i pro odhady parametrů. Konkrétně tedy chceme, aby platilo  $\hat{\beta}_n^2 + \hat{\omega}_n^2 < 1$  a  $\hat{\beta}_n^4 + 6\hat{\beta}_n^2\hat{\omega}_n^2 + \hat{\alpha}_{4n} < 1$ . Tyto podmínky v naprosté většině případů splněny jsou, jak je vidět na obrázcích 3.3 a 3.4. V několika málo případech vychází hodnota výrazu  $\hat{\beta}_n^2 + \hat{\omega}_n^2$  při  $n = 200$  záporná, což je způsobeno tím, že odhady  $\omega^2$  vycházejí často podhodnocené a občas menší než nula. U řad, kde počet pozorování je 500, se již záporné hodnoty nevyskytují, i když  $\hat{\omega}_n^2$  stále vychází menší, než je skutečná hodnota parametru, s níž byly řady generovány.

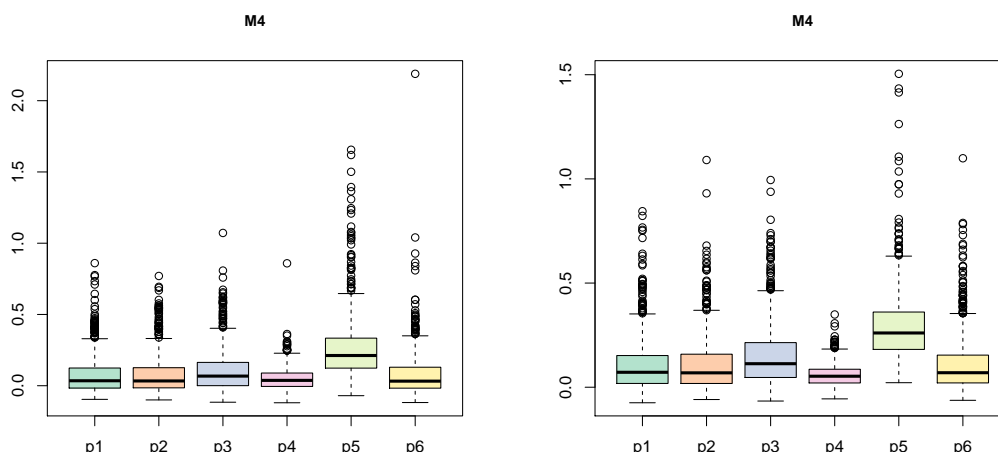
### 3.1.2 Porovnání wild bootstrapu a reziduálního KF bootstrapu

U obou metod je dokázána konvergence statistiky  $T_n = \sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$  k normálnímu rozdělení. Můžeme tedy porovnat odhad asymptotického rozptylu  $T_n$  s bootstrapovým odhadem rozptylu  $T_n$ , neboli s odhadem  $n\widehat{\text{var}}_B(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$ . V sekci 2.3.3 jsme popisovali wild bootstrap, u kterého nejprve vygenerujeme bootstrapová rezidua  $u_t^*$  a bootstrapový výběr následně vytvoříme postupem  $X_t^* = \hat{\beta}_n X_{t-1} + u_t^*$ . Bootstrapový odhad parametru  $\beta$  má pak tvar

$$\hat{\beta}_n^* = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t^*}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}.$$



Obrázek 3.3: Hodnota výrazu  $\hat{\beta}_n^2 + \hat{\omega}_n^2$  v modelu  $RCA(1)$  s normálně rozdělenými chybami  $\varepsilon_t$  i  $B_t$ . Odhady byly spočteny pro 1000 nasimulovaných řad, vlevo o 200 a vpravo o 500 pozorováních.



Obrázek 3.4: Hodnota výrazu  $\hat{\beta}_n^4 + 6\hat{\beta}_n^2\hat{\omega}_n^2 + \hat{\alpha}_{4n}$  v modelu  $RCA(1)$  s normálně rozdělenými chybami  $\varepsilon_t$  i  $B_t$ . Odhady byly spočteny pro 1000 nasimulovaných řad, vlevo o 200 a vpravo o 500 pozorováních.

Tuto metodu budeme označovat *regresní wild bootstrap* ( $WB_{reg}$ ). Bootstrapový výběr ale můžeme také generovat rekurzivně postupem  $X_t^* = \hat{\beta}_n X_{t-1}^* + u_t^*$  a odhad pak spočítat podle vzorce

$$\hat{\beta}_n^* = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^* X_t^*}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^{*2}}.$$

Tuto metodu budeme nazývat pro odlišení *rekurzivní wild bootstrap* ( $WB_{rek}$ ). Pro tento postup nemáme sice k dispozici důkaz jeho konzistence, to nám ale nebrání v rámci simulací metodu také vyzkoušet a porovnat její výsledky s regresním wild bootstrapem. Přidáme ještě klasický reziduální bootstrap navržený pro proces  $AR(p)$ . O něm víme, že vede pro proces  $RCA(1)$  u boot-

strapové statistiky  $T_n^*$  k asymptotickému rozdělení s jiným rozptylem, než jaký má statistika  $T_n$ , a můžeme ověřit, jestli k tomuto výsledku v simulacích také dojdeme.

Konkrétně budeme porovnávat výběrovou směrodatnou odchylku, vychýlení a střední čtvercovou chybu odhadů  $\widehat{\text{var}}_N T_n$ , kde  $\widehat{\text{var}}_N T_n$  značí odhad rozptylu statistiky  $T_n$  některou použitou metodou. U bootstrapových metod postupujeme tak, že vygenerujeme  $N$  časových řad a pro  $i$ -tou řadu, kde  $i \in \{1, \dots, N\}$ , vytvoříme  $B$  bootstrapových výběrů. Pro každý bootstrapový výběr  $\{X_{ibt}^*\}_{t=1}^n$  spočteme  $\hat{\beta}_{ibn}^*$  a ze všech bootstrapových odhadů pro řadu  $i$  následně spočteme  $n\widehat{\text{var}}_B(\hat{\beta}_{ibn}^* - \hat{\beta}_{in})$ . Pro odvození vychýlení a střední čtvercové chyby porovnáваме bootstrapové odhady rozptylů s odhadem rozptylu  $n\widehat{\text{var}}_{MC}(\hat{\beta}_{in} - \beta)$  získaným metodou Monte Carlo na  $N_{MC}$  simulovaných časových řadách.

Simulace jsme provedli pro  $N = 1000$  časových řad, přičemž z každé jsme generovali  $B = 1000$  bootstrapových výběrů. Odhad metodou Monte Carlo jsme získali pomocí  $N_{MC} = 5000$  vygenerovaných řad. Všechna tři sledovaná kritéria mají na našich datech takřka stejné hodnoty pro regresní wild bootstrap a odhad rozptylu asymptoticky normálního rozdělení získaný metodou  $AS_V$ . Vychýlení u metody  $AS_P$  a  $AS_V$  jsou velmi podobná, ale odhady metodou  $AS_P$  mají vyšší směrodatnou odchylku a tudíž i vyšší střední čtvercovou chybu. To odpovídá předpokladu, že opakovaným použitím odhadů jednotlivých parametrů modelu pro odhad  $E \mathcal{X}_t^2$  a  $E \mathcal{X}_t^4$  se mohou nasčítat chyby jednotlivých odhadů a vést k větší variabilitě. Zatímco vychýlení odhadu rozptylu u regresního wild bootstrapu je velmi malé a ve všech případech záporné, vychýlení u reziduálního KF bootstrapu je pro všechny sady parametrů v absolutní hodnotě několikanásobně větší a kladné. Regresní wild bootstrap tedy vede k nepatrně menšímu odhadu rozptylu, zatímco reziduální KF bootstrap naopak dává odhad rozptylu větší, než je jeho skutečná hodnota. Směrodatná odchylka u reziduálního KF bootstrapu je také o trochu vyšší než u regresního wild bootstrapu. Rekurzivní wild bootstrap sice dosahuje nejmenší směrodatné odchylky a střední čtvercové chyby (kromě klasického reziduálního bootstrapu), ale vychýlení odhadu rozptylu je také násobně větší než u regresního wild bootstrapu. Zajímavé je, že u všech metod má největší směrodatnou odchylku odhad rozptylu u procesu s parametry  $(0,1, 0,4, 0,8)$ . Sady parametrů jsme záměrně volili poměrně podobné a tento proces se od procesu se sadou parametrů  $p_2$  liší jen o 0,1 vyšší hodnotou  $\omega^2$ . Tento rozdíl ale vede u procesů s  $n = 200$  k takřka dvojnásobné směrodatné odchylce odhadu rozptylu. Klasický reziduální bootstrap dle očekávání dává nejvíce vychýlené odhady, odhad rozptylu pomocí této metody je výrazně menší než skutečná hodnota. Na sadě parametrů  $p_4$ , která odpovídá procesu  $AR(1)$ , má reziduální bootstrap nejlepší výsledky, ale dobře zde fungují i oba wild bootstrapy a asymptoticky normální rozdělení. U wild bootstrapů to není překvapivé, protože jejich postup se pro procesy  $RCA(p)$  a  $AR(p)$  neliší a konzistence metod je dokázána. U asymptotického normálního rozdělení to znamená, že odhad  $\omega^2$  zřejmě vychází velmi blízko nule a odhad rozptylu statistiky  $T_n$  u procesu  $RCA(1)$  se pak blíží odhadu rozptylu  $T_n$  procesu  $AR(1)$ . Reziduální KF bootstrap oproti ostatním metodám vede k vyššímu odhadu  $\widehat{\text{var}}_N T_n$ . Co se týče rozdělení chybové složky  $B_t$ , u procesů s rovnoměrným rozdělením vychází

směrodatná odchylka a tudíž i střední čtvercová chyba odhadu  $\text{var } T_n$  menší, než u procesů s normálně rozdělenými veličinami  $B_t$ .

Pro odhad rozptylu statistiky  $T_n$  jsme tedy na našich datech nejlepších výsledků dosáhli metodou regresního wild bootstrapu a pomocí asymptoticky normálního rozdělení, postupem  $AS_V$ . Všechny výsledky jsou uvedené v tabulkách 3.5, 3.8, 3.9 a 3.10, přičemž poslední tři zmíněné tabulky jsou součástí sekce A.1 Tabulky.

Nakonec srovnáme ještě empirické hustoty bootstrapové statistiky  $T_n^* = \sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \hat{\beta}_n)$  získané metodami regresní wild bootstrap, rekurzivní wild bootstrap, reziduální KF bootstrap a klasický reziduální bootstrap. Porovnáme je s hustotou asymptoticky normálního rozdělení statistiky  $T_n = \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ , kde hodnota  $\sigma_{as}^2$  je odhadnuta metodou  $AS_V$ , a skutečnou hustotou  $T_n$  spočtenou metodou Monte Carlo, tentokrát na 10 000 řadách. Pro bootstrapové metody jsme zvýšili počet replikací na 5000.

Bootstrapové hustoty a hustotu normálního rozdělení jsme spočetli vždy pro tři náhodně vygenerované řady. Odhady parametru  $\beta$  v jednotlivých řadách se tedy občas značně liší. Nicméně i tam, kde u dvou řad se stejnou sadou parametrů má odhad  $\hat{\beta}_n$  jen nepatrně odlišnou hodnotu, vychází empirické hustoty občas velmi odlišně (viz například řady o 500 pozorováních na obrázcích 3.5 a 3.20, kde druhý obrázek je zahrnut v sekci A.2 Grafy). Zdá se, že aproximace rozdělení  $T_n$  pomocí metody bootstrap závisí více na původních datech než na samotném odhadu  $\beta$ , protože všechny metody bootstrap (s výjimkou klasického reziduálního bootstrapu) v některých případech velmi dobře aproximují skutečné rozdělení statistiky  $T_n$ , přestože odhad  $\beta$  je značně odlišný od skutečné hodnoty (například u řad v levé části obrázku 3.5). Obě metody wild bootstrap i asymptotický přístup vedou většinou k velmi podobnému rozdělení. Reziduální KF bootstrap má oproti nim občas větší rozptyl, což odpovídá kladnému vychýlení, které jsme zaznamenali výše. Klasický reziduální bootstrap skutečné rozdělení v  $T_n$  v případě procesu  $RCA(1)$  příliš dobře neaproximuje, rozptyl výsledného empirického rozdělení je příliš malý. U procesu  $AR(1)$  fungují poměrně dobře obě metody wild bootstrap, klasický reziduální bootstrap i asymptotické rozdělení. Reziduální KF bootstrap se od skutečného rozdělení občas poměrně odchýlí (viz obrázek 3.27). S výjimkou grafu 3.20 jsou všechny obrázky znázorňující bootstrapové hustoty obsaženy v sekci A.2 Grafy (obrázky 3.19 – 3.29).

Chceme-li aproximovat rozdělení statistiky  $T_n$ , na základě naší simulace se jako vhodné metody jeví obě metody wild bootstrap i asymptotické normální rozdělení.

## 3.2 Proces $RCA(2)$

Zbývá nám na simulacích prověřit chování metody wild bootstrap pro proces  $RCA(2)$ . I v této části budeme pracovat pouze se simulovanými časovými řadami.

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\omega_1^2$	$\omega_2^2$	$\sigma^2$	$\lambda_1$
p1	0,5	0,2	0,25	0,25		0,675
p2	0,5	0,2	0,1	0,1		0,596
p3	0,5	0,2	0	0		0,581
p4	0,5	-0,2	0,25	0,25		0,402
p5	0,5	-0,2	0,5	0,5	0,8	0,773
p6	0,5	-0,2	0	0		0,200
p7	0,7	0	0,25	0,25		0,649
p8	0,7	0	0,1	0,1		0,519
p9	-0,5	-0,2	0,25	0,25		0,402
p10	-0,5	-0,2	0,1	0,1		0,241

Tabulka 3.2: Parametry modelu  $RCA(2)$ .

Data budeme generovat podle předpisu

$$\mathcal{X}_t = (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

kde

- $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ , nebo  $B_i(t) \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega_i^2}, \sqrt{3\omega_i^2}\right]\right)$ ,  $i = 1, 2$  přičemž  $\text{cov}(B_1(t), B_2(t)) = 0$ ,
- $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ,
- $n \in \{200, 500\}$ .

V této části bude vždy  $\sigma^2 = 0,8$ . Zvolené parametry modelu jsou uvedeny v tabulce 3.2. Ke každé sadě parametrů zde uvádíme také v absolutní hodnotě největší vlastní číslo  $\lambda_1$  matice  $\mathbf{M}$  (viz rovnice (2.22)). Má-li být proces  $RCA(2)$  stacionární, musí být všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{M}$  v absolutní hodnotě menší než 1. Povšimněme si, že nezáleží jen na absolutní velikosti parametrů. Sady parametrů p1 a p9 se liší pouze znaménkem  $\beta_1$  a  $\beta_2$ , ale rozdíl v  $\lambda_1$  je 0,273. Proces  $RCA(2)$  je stacionární se všemi zvolenými sadami parametrů.

U procesů  $RCA(2)$  porovnáváme regresní wild bootstrap s rekurzivním wild bootstrapem, klasickým reziduálním bootstrapem a s asymptoticky normálním rozdělením. Nezkoumáme ale odhad celé varianční matice statistiky  $\mathbf{T}_n = \sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})$ , nýbrž jen rozptyly statistik  $T_{1n} = \sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  a  $T_{2n} = \sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$ . Opět jsme spočetli výběrovou směrodatnou odchylku, vychýlení a střední čtvercovou chybu pro odhady rozptylů získaných pomocí 1000 bootstrapových replik pro 1000 vygenerovaných časových řad. Skutečnou hodnotu rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  i tentokrát nahrazujeme odhadem metodou Monte Carlo spočteným pro 5000 vygenerovaných řad.

Odhad varianční matice  $\boldsymbol{\Sigma}_{as}$  asymptoticky normálního rozdělení (viz vzorec (2.27)) získáme tak, že parametry  $\sigma^2$ ,  $\omega_1^2$  a  $\omega_2^2$  nahradíme jejich odhady  $\hat{\sigma}_n^2$ ,  $\hat{\omega}_{1n}^2$  a  $\hat{\omega}_{2n}^2$  a hodnoty  $E \mathcal{X}_t^4$ ,  $E \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1}$ ,  $E \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2$  a  $E \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3$  v matici  $\boldsymbol{\Lambda}$  nahradíme výběrovými průměry spočtenými z dat dané řady. Odhady  $\hat{\sigma}_n^2$ ,  $\hat{\omega}_{1n}^2$

a  $\hat{\omega}_{2n}^2$  spočteme metodou nejmenších čtverců postupem navrženým v Nicholls a Quinn (1982). Jde o postup, který jsme použili pro odhad v modelu  $RCA(1)$ , rozšířený na model řádu 2, tedy parametry odhadujeme jako regresní koeficienty lineárního modelu  $u_t^2 = \sigma^2 + \omega_1^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + \omega_2^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 + \epsilon_t$ . Zbývá nám odhadnout matici  $\mathbf{V}^{-1}$ . Její jednotlivé členy, tedy  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t^2$  a  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}$  spočteme opět jako výběrové průměry, a jejich dosazením do  $\mathbf{V}$  získáme odhad  $\widehat{\mathbf{V}}_n$ . Pak již stačí položit  $\widehat{\mathbf{V}}_n^{-1} = (\widehat{\mathbf{V}}_n)^{-1}$ . Místo výběrových průměrů bychom mohli využít i vzorce (2.25), (2.28) a (2.29)–(2.32) a odhady matic  $\mathbf{V}^{-1}$  a  $\mathbf{\Lambda}$  spočítat pomocí nich tak, že místo skutečných hodnot parametrů použijeme jejich odhady. Nicméně parametry se v odhadech momentů procesu  $\{\mathcal{X}_t\}$  vyskytují tolikrát, že sebemenší chyba se může neúnosně znásobit.

Z výsledků simulací je patrné, že čím vyšší je  $\lambda_1$ , tím větší je jednak odhad rozptylu statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  metodou Monte Carlo, ale i výběrová směrodatná odchylka odhadů rozptylu  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  pomocí všech použitých metod s výjimkou klasického reziduálního bootstrapu. S rostoucím  $\lambda_1$  se zvětšuje i vychýlení. Při stejných hodnotách  $\omega_1$  a  $\omega_2$  mají odhady u procesu s parametry p1 více než dvojnásobnou směrodatnou odchylku oproti procesu s parametry p4 a vychýlení se liší ještě výrazněji. Navíc čím vyšší jsou hodnoty  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , tím více roste skutečná hodnota rozptylu i variabilita bootstrapových odhadů i asymptoticky normálních odhadů, zvyšujeme-li délku řady. U procesů s  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0,1$  se směrodatná odchylka zvyšuje jen nepatrně.

Odhady rozptylů  $T_{n1}$  a  $T_{n2}$  spočtené pomocí regresního wild bootstrapu mají velmi podobné vlastnosti, jako odhadnuté asymptotické rozptyly. U řad délky  $n = 500$  se metody zdají být rovnocenné. U řad s  $n = 200$  nám vychází u procesů s většími hodnotami parametrů  $\omega_1^2$  a  $\omega_2^2$  u odhadů metodou regresní wild bootstrap mírně nižší směrodatné odchylky. Naopak u řad, které vznikly realizací procesu  $AR(2)$ , vychází trochu lépe asymptotické odhady. Zřejmě i v případě procesů řádu 2 jsou odhady parametrů  $\omega_1^2$  a  $\omega_2^2$  dostatečně blízko nuly na to, aby přebytečný člen ve varianční matici asymptotického rozdělení byl zanedbatelný.

Stejně jako u procesů řádu 1 mají odhady konstruované pomocí klasického reziduálního bootstrapu i zde velmi nízké směrodatné odchylky, ale zato vysoké vychýlení. Čím vyšší je hodnota  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , tím vychýlenější odhady vychází. U procesů  $AR(2)$  (sady parametrů p3 a p6) naopak dává reziduální bootstrap velmi dobré výsledky. Chceme-li mezi sebou porovnat dvě použité metody wild bootstrap, podle střední čtvercové chyby vychází lépe rekurzivní wild bootstrap. Regresní wild bootstrap má většinou vyšší směrodatnou odchylku, ale rekurzivní bootstrap zase dává často vychýlenější odhady. Mezi procesy s normálně rozdělenými  $B_1(t)$  a  $B_2(t)$  a rovnoměrně rozdělenými  $B_1(t)$  a  $B_2(t)$  jsme žádný obecně platný rozdíl neodhalili. Všechny výsledky jsou uvedené v tabulkách 3.6 a 3.7 v této kapitole a v tabulkách 3.11 – 3.16, které jsou součástí sekce A.1 Tabulky.

Nakonec jsme simulačně porovnali empirická rozdělení bootstrapových statistik  $T_{in}^* = \sqrt{n}(\hat{\beta}_{in}^* - \hat{\beta}_{in})$ ,  $i = 1, 2$ , pro jednotlivé bootstrapové metody mezi sebou i s hustotou odhadnutého asymptotického normálního rozdělení. I zde se ukazuje,

že obě metody wild bootstrap i asymptoticky normální rozdělení poměrně dobře kopírují skutečné rozdělení v případě, že  $\lambda_1$  má nižší hodnotu. S rostoucím  $\lambda_1$  se aproximace rozdělení statistik  $T_{in}$  zhoršuje, jak u bootstrapových metod, tak u asymptotického normálního rozdělení (viz například graf 3.9). Rozptyl bootstrapových hustot i asymptotického normálního rozdělení je často příliš malý nebo naopak příliš velký, a i empirická střední hodnota statistiky  $T_{1n}$  je často vychýlená. U procesů s nízkou hodnotou  $\omega_1$  a  $\omega_2$  naopak výjimečně dává dobré výsledky i klasický reziduální bootstrap (při  $n = 500$ , viz obrázek 3.8). Pro procesy  $AR(2)$  fungují všechny metody velmi dobře. U procesu se sadou parametrů  $p_8$  (graf 3.10) je vidět, že metody wild bootstrap i asymptoticky normální rozdělení poměrně dobře kopírují skutečné rozdělení kromě případu, kdy je odhad  $\beta_2$  již příliš vzdálen od skutečné hodnoty parametru. Další obrázky jsou zahrnuty v sekci A.2 Grafy (obrázky 3.30 – 3.46).

Na našich datech v případě aproximace rozdělení statistik  $T_{in}$  dávají asymptoticky normální rozdělení i obě metody wild bootstrap srovnatelné výsledky. Ty jsou tím lepší, čím je nižší hodnota  $\lambda_1$ , která se zvyšuje s rostoucími hodnotami parametrů  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\beta_1$  a  $\beta_2$ , ale závisí i na znaménku  $\beta_1$  a  $\beta_2$ . Čím více se blíží  $\lambda_1$  jedné, tím méně jsou aproximace přesné. Při nízké hodnotě  $\omega_1$  a  $\omega_2$  se zmenšují rozdíly mezi procesy  $RCA(2)$  a  $AR(2)$  a v tom případě zřejmě může být možné úspěšně použít i klasický reziduální bootstrap.

### 3.2.1 Implementace

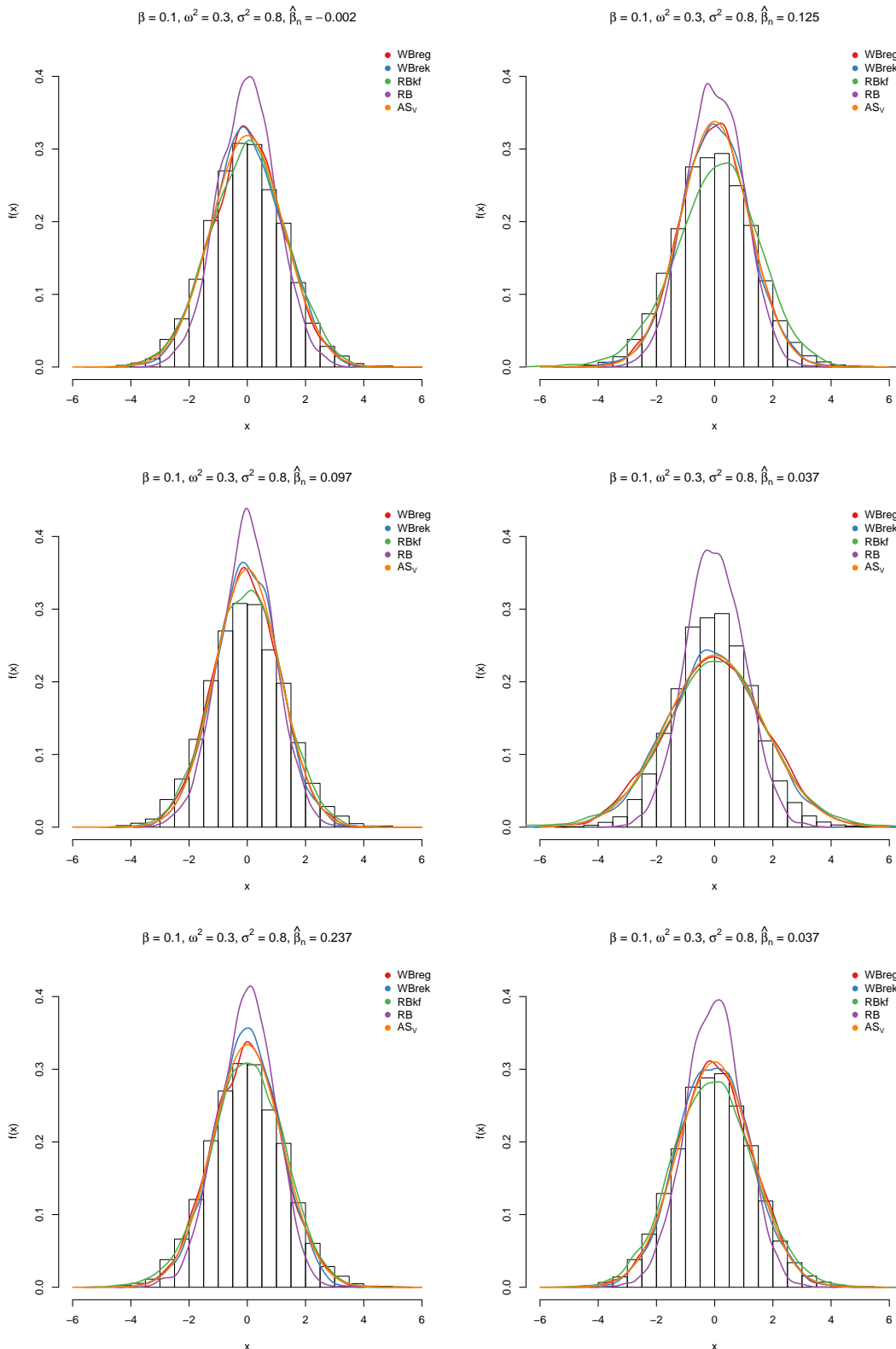
Všechny výpočty byly provedeny ve statistickém softwaru R, verze 3.4.3, který je volně k dispozici na adrese <https://www.r-project.org/> a jehož autory je vývojový tým R Core Team (2013). Pro generování pseudonáhodných čísel s dvojitě exponenciálním rozdělením byla použita knihovna Runuran, pro barvy v grafech knihovna RColorBrewer.

K elektronické verzi práce jsou připojeny skripty s kódem použitým pro výpočty hodnot v tabulkách a pro tvorbu grafů uvedených v kapitole 3 a v přílohách:

1. RCA1\_parametry.R - spočtení  $\hat{\alpha}_{4n}$ ,  $\frac{\hat{\omega}_n^4}{\hat{\alpha}_{4n}}$ ,  $\hat{\beta}_n^2 + \hat{\omega}_n^2$  a  $\hat{\beta}_n^4 + 6\hat{\beta}_n^2\hat{\omega}_n^2 + \hat{\alpha}_{4n}$ ,
2. RCA1\_rozdeleni.R - grafy s aproximací rozdělení statistiky  $T_n$  procesu  $RCA(1)$ ,
3. RCA2\_rozdeleni.R - grafy s aproximací rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  procesu  $RCA(2)$ ,
4. RCA1\_pokryti\_M.R - spočtení pokrytí parametru  $\beta$  intervalovými odhady pro různé kombinace  $m(n)$  a  $M(n)$ ,
5. RCA1\_pokryti\_grafy.R - vytvoření grafů s pokrytím parametru  $\beta$ ,
6. RCA1\_var.R - charakteristiky odhadu rozptylu statistiky  $T_n$  procesu  $RCA(1)$ ,



7. `RCA2_var.R` - charakteristiky odhadu rozptylu statistiky  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  procesu  $RCA(2)$ ,
8. `RCA1_pokryti_metody.R` - pokrytí parametru  $\beta$  intervalovými odhady pro různé metody,
9. `RCA1_pokryti_bez_mom_boot.R` - pokrytí parametru  $\beta$  intervalovými odhady pro různé metody, bez momentových bootstrapových metod.



Obrázek 3.5: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p_2$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.

$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 200, \quad B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$							
metoda	$1 - \alpha$	$(-0,1, 0,3, 0,8)^a$	$(0,1, 0,3, 0,8)$	$(0,1, 0,4, 0,8)$	$(0,5, 0,0,8)$	$(0,5, 0,15, 0,8)$	$(0,1, 0,3, 1)$
$RB_{KF}$	0,9	0,917	0,926	0,917	0,948	0,927	0,924
	0,95	0,961	0,962	0,964	0,971	0,962	0,966
	0,99	0,994	0,988	0,995	0,995	0,994	0,994
$RMB_{KF}$	0,9	0,894	0,889	0,895	0,913	0,905	0,892
	0,95	0,933	0,945	0,939	0,955	0,952	0,945
	0,99	0,986	0,982	0,985	0,982	0,987	0,987
$MB_{KF}$	0,9	0,893	0,898	0,906	0,910	0,904	0,899
	0,95	0,946	0,954	0,950	0,956	0,954	0,954
	0,99	0,987	0,982	0,992	0,983	0,986	0,983
$AS_V$	0,9	0,910	0,923	0,921	0,933	0,913	0,914
	0,95	0,955	0,962	0,967	0,965	0,953	0,969
	0,99	0,992	0,991	0,998	0,995	0,991	0,993
$AS_P$	0,9	0,913	0,926	0,927	0,935	0,910	0,919
	0,95	0,952	0,964	0,967	0,966	0,952	0,969
	0,99	0,992	0,988	0,996	0,995	0,979	0,993
%		27	27	25	9	21	27

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta, \omega^2, \sigma^2)$ .

Tabulka 3.3: Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr  $\beta$  modelu  $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. V posledním řádku je uveden poměr nasimulovaných řad, které bylo možné použít pro momentové metody (v procentech).

$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 200, \quad B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$							
metoda	$1 - \alpha$	$(-0,1, 0,3, 0,8)^a$	$(0,1,0,3,0,8)$	$(0,1,0,4,0,8)$	$(0,5,0,0,8)$	$(0,5,0,15,0,8)$	$(0,1,0,3,1)$
$RB_{KF}$	0,9	0,906	0,896	0,896	0,926	0,888	0,905
	0,95	0,952	0,943	0,945	0,966	0,942	0,944
	0,99	0,985	0,982	0,986	0,990	0,983	0,985
$AS_V$	0,9	0,903	0,889	0,890	0,904	0,874	0,881
	0,95	0,947	0,942	0,946	0,947	0,940	0,933
	0,99	0,986	0,990	0,986	0,987	0,983	0,974
$AS_P$	0,9	0,902	0,887	0,888	0,905	0,859	0,881
	0,95	0,947	0,936	0,938	0,948	0,925	0,934
	0,99	0,986	0,988	0,986	0,987	0,967	0,976

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta, \omega^2, \sigma^2)$ .

Tabulka 3.4: Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr  $\beta$  modelu  $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů.

$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 200, \quad B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$							
metoda		$(-0,1, 0,3, 0,8)^a$	$(0,1,0,3,0,8)$	$(0,1,0,4,0,8)$	$(0,5,0,0,8)$	$(0,5,0,15,0,8)$	$(0,1,0,3,1)$
	$\widehat{\text{var}}_{MC} T_n$	1,629	1,630	1,947	0,760	1,060	1,675
$WB_{reg}$	SD	0,551	0,530	1,044	0,125	0,302	0,604
	bias	-0,061	-0,049	-0,053	-0,022	-0,010	0,042
	MSE	0,307	0,284	1,091	0,016	0,091	0,367
$WB_{rek}$	SD	0,365	0,368	0,612	0,102	0,178	0,380
	bias	-0,220	-0,208	-0,311	-0,028	-0,182	-0,121
	MSE	0,182	0,178	0,471	0,011	0,065	0,159
$RB_{KF}$	SD	0,785	0,940	1,072	0,164	0,344	0,757
	bias	0,227	0,255	0,311	0,214	0,254	0,504
	MSE	0,668	0,947	1,244	0,073	0,182	0,827
$RB$	SD	0,048	0,048	0,050	0,069	0,075	0,048
	bias	-0,699	-0,699	-1,020	-0,003	-0,326	-0,609
	MSE	0,491	0,491	1,043	0,005	0,112	0,373
$AS_V$	SD	0,533	0,536	1,048	0,122	0,302	0,583
	bias	-0,060	-0,050	-0,047	-0,021	-0,010	0,038
	MSE	0,288	0,289	1,100	0,015	0,091	0,341
$AS_P$	SD	0,668	0,620	1,557	0,123	1,539	0,921
	bias	-0,078	-0,051	-0,030	-0,021	-0,003	0,070
	MSE	0,452	0,387	2,423	0,016	2,365	0,852

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta, \omega^2, \sigma^2)$ .

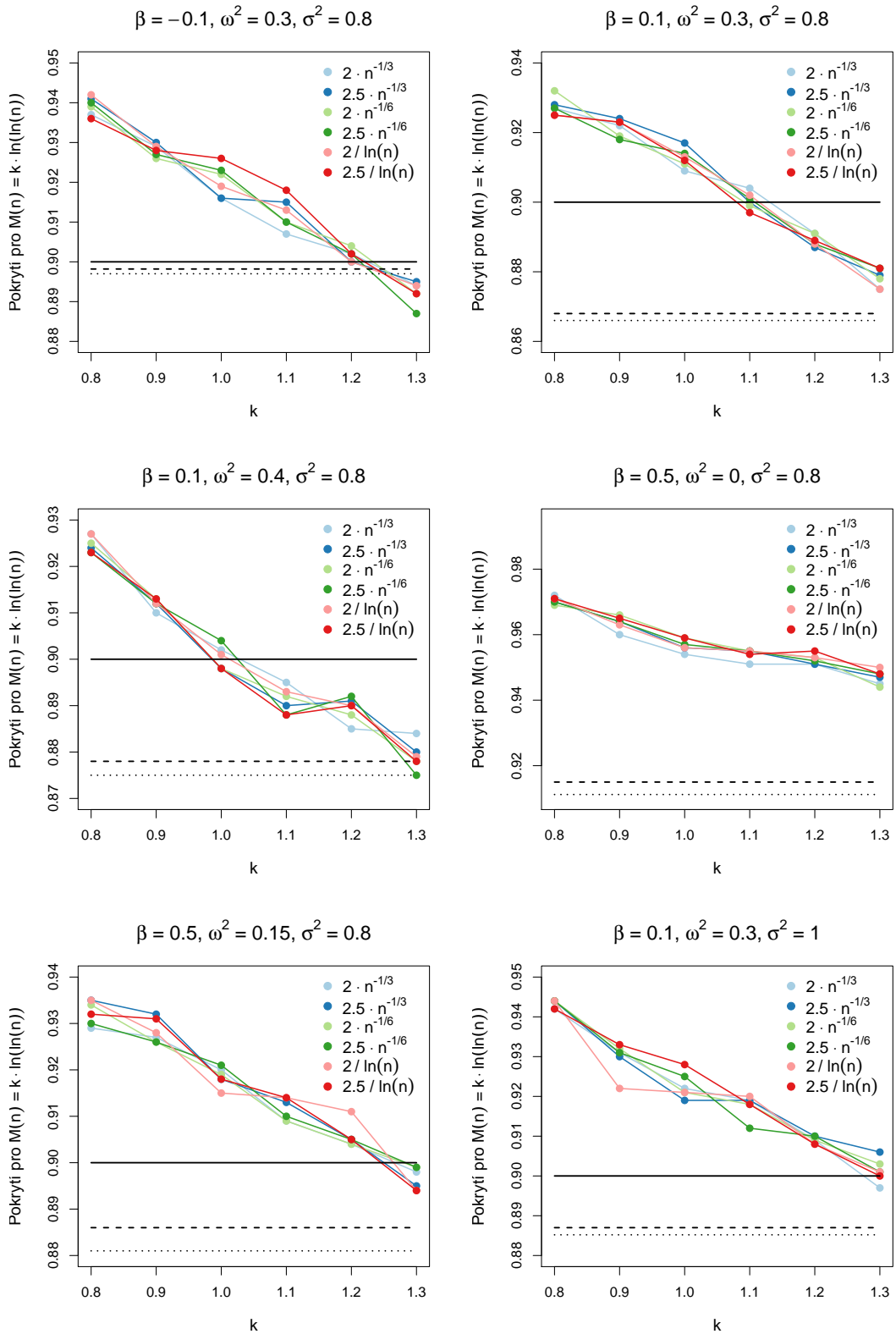
Tabulka 3.5: Porovnání vlastností odhadu  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta))$  u procesu  $RCA(1)$ .

$\mathcal{X}_t = (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad n = 200,$ $B_1(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_1^2), \quad B_2(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_2^2), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = 0,8$							
		$(\beta_1, \beta_2)$	(0,5, 0,2)	(0,5, 0,2)	(0,5, 0,2)	(0,5, -0,2)	(0,5, -0,2)
		$(\omega_1^2, \omega_2^2)$	(0,25, 0,25)	(0,1, 0,1)	(0, 0)	(0,25, 0,25)	(0,5, 0,5)
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{1n}$	2,842	1,297	0,970	2,060	6,451
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{2n}$	3,146	1,320	0,933	2,061	5,660
<i>WB<sub>reg</sub></i>	SD	$T_{1n}$	3,169	0,572	0,139	1,243	4,133
		$T_{2n}$	2,489	0,555	0,140	1,177	4,171
	bias	$T_{1n}$	0,345	-0,035	-0,024	-0,196	-0,932
		$T_{2n}$	-0,268	-0,058	0,009	-0,132	-0,758
	MSE	$T_{1n}$	10,152	0,328	0,020	1,581	17,930
		$T_{2n}$	6,262	0,311	0,020	1,401	17,952
<i>WB<sub>rek</sub></i>	SD	$T_{1n}$	2,083	0,377	0,125	0,925	3,103
		$T_{2n}$	1,379	0,265	0,087	0,695	2,937
	bias	$T_{1n}$	-0,253	-0,117	-0,026	-0,429	-1,968
		$T_{2n}$	-0,849	-0,159	-0,009	-0,469	-2,051
	MSE	$T_{1n}$	4,400	0,156	0,016	1,038	13,489
		$T_{2n}$	2,620	0,095	0,008	0,702	12,824
<i>RB</i>	SD	$T_{1n}$	0,073	0,052	0,050	0,062	0,110
		$T_{2n}$	0,069	0,052	0,048	0,063	0,104
	bias	$T_{1n}$	-1,867	-0,365	-0,001	-1,199	-5,487
		$T_{2n}$	-2,155	-0,382	0,016	-1,152	-5,103
	MSE	$T_{1n}$	3,490	0,136	0,003	1,441	30,121
		$T_{2n}$	4,649	0,148	0,003	1,330	26,054
<i>AS</i>	SD	$T_{1n}$	3,435	0,620	0,093	1,304	5,063
		$T_{2n}$	2,832	0,604	0,096	1,215	8,404
	bias	$T_{1n}$	0,526	-0,001	-0,024	-0,168	-0,888
		$T_{2n}$	-0,086	-0,023	0,009	-0,107	-0,514
	MSE	$T_{1n}$	12,065	0,384	0,009	1,728	26,396
		$T_{2n}$	8,019	0,365	0,009	1,485	70,818

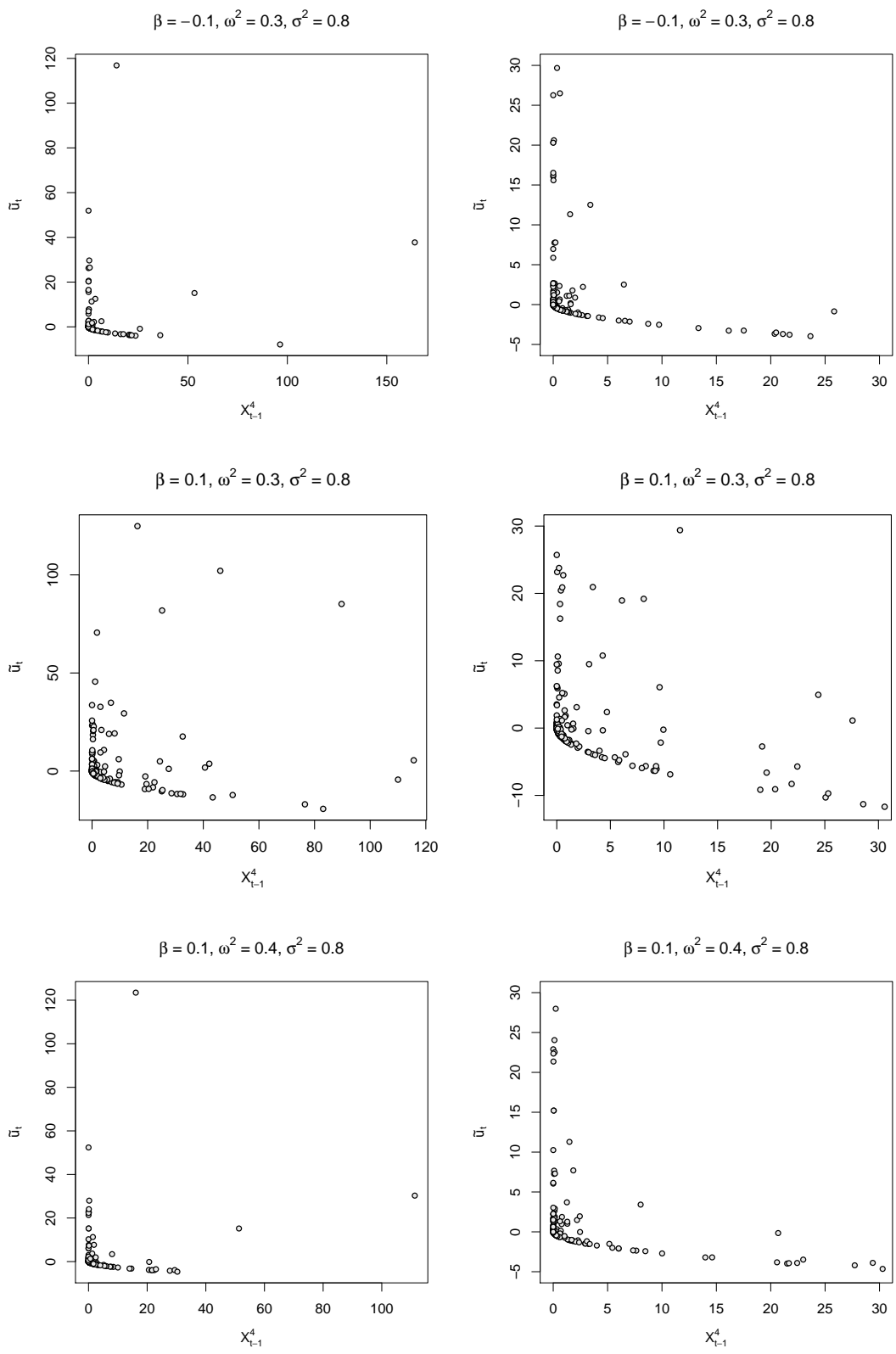
Tabulka 3.6: Porovnání vlastností odhadů  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$  a  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$  u procesu *RCA(2)*.

$\mathcal{X}_t = (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad n = 200,$ $B_1(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_1^2), \quad B_2(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_2^2), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = 0,8$							
		$(\beta_1, \beta_2)$	$(0,5, -0,2)$	$(0,7, 0)$	$(0,7, 0)$	$(-0,5, -0,2)$	$(-0,5, -0,2)$
		$(\omega_1^2, \omega_2^2)$	$(0, 0)$	$(0,25, 0,25)$	$(0,1, 0,1)$	$(0,25, 0,25)$	$(0,1, 0,1)$
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{1n}$	0,931	3,510	1,398	2,210	1,203
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{2n}$	0,932	3,937	1,469	2,141	1,226
<i>WB<sub>reg</sub></i>	SD	$T_{1n}$	0,141	3,433	0,617	1,120	0,276
		$T_{2n}$	0,142	2,813	0,671	1,245	0,247
	bias	$T_{1n}$	-0,035	0,459	0,003	-0,177	-0,065
		$T_{2n}$	-0,019	-0,522	-0,014	-0,136	-0,013
	MSE	$T_{1n}$	0,021	11,983	0,380	1,283	0,080
		$T_{2n}$	0,021	8,178	0,450	1,568	0,061
<i>WB<sub>rek</sub></i>	SD	$T_{1n}$	0,125	2,442	0,444	0,805	0,213
		$T_{2n}$	0,093	1,654	0,326	0,663	0,156
	bias	$T_{1n}$	-0,050	-0,196	-0,093	-0,418	-0,117
		$T_{2n}$	-0,045	-1,205	-0,158	-0,484	-0,079
	MSE	$T_{1n}$	0,018	5,994	0,206	0,823	0,059
		$T_{2n}$	0,011	4,185	0,131	0,674	0,031
<i>RB</i>	SD	$T_{1n}$	0,053	0,070	0,048	0,063	0,054
		$T_{2n}$	0,051	0,075	0,048	0,066	0,0524
	bias	$T_{1n}$	-0,014	-2,268	-0,420	-1,187	-0,267
		$T_{2n}$	-0,018	-2,863	-0,433	-1,182	-0,220
	MSE	$T_{1n}$	0,003	5,147	0,178	1,413	0,074
		$T_{2n}$	0,003	8,201	0,190	1,401	0,051
<i>AS</i>	SD	$T_{1n}$	0,115	3,770	0,760	1,226	0,265
		$T_{2n}$	0,115	3,293	0,900	1,353	0,228
	bias	$T_{1n}$	-0,036	0,759	0,065	-0,146	-0,060
		$T_{2n}$	-0,018	-0,165	0,048	-0,105	-0,007
	MSE	$T_{1n}$	0,015	14,777	0,581	1,522	0,074
		$T_{2n}$	0,013	10,858	0,812	1,839	0,052

Tabulka 3.7: Porovnání vlastností odhadů  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$  a  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$  u procesu *RCA*(2).

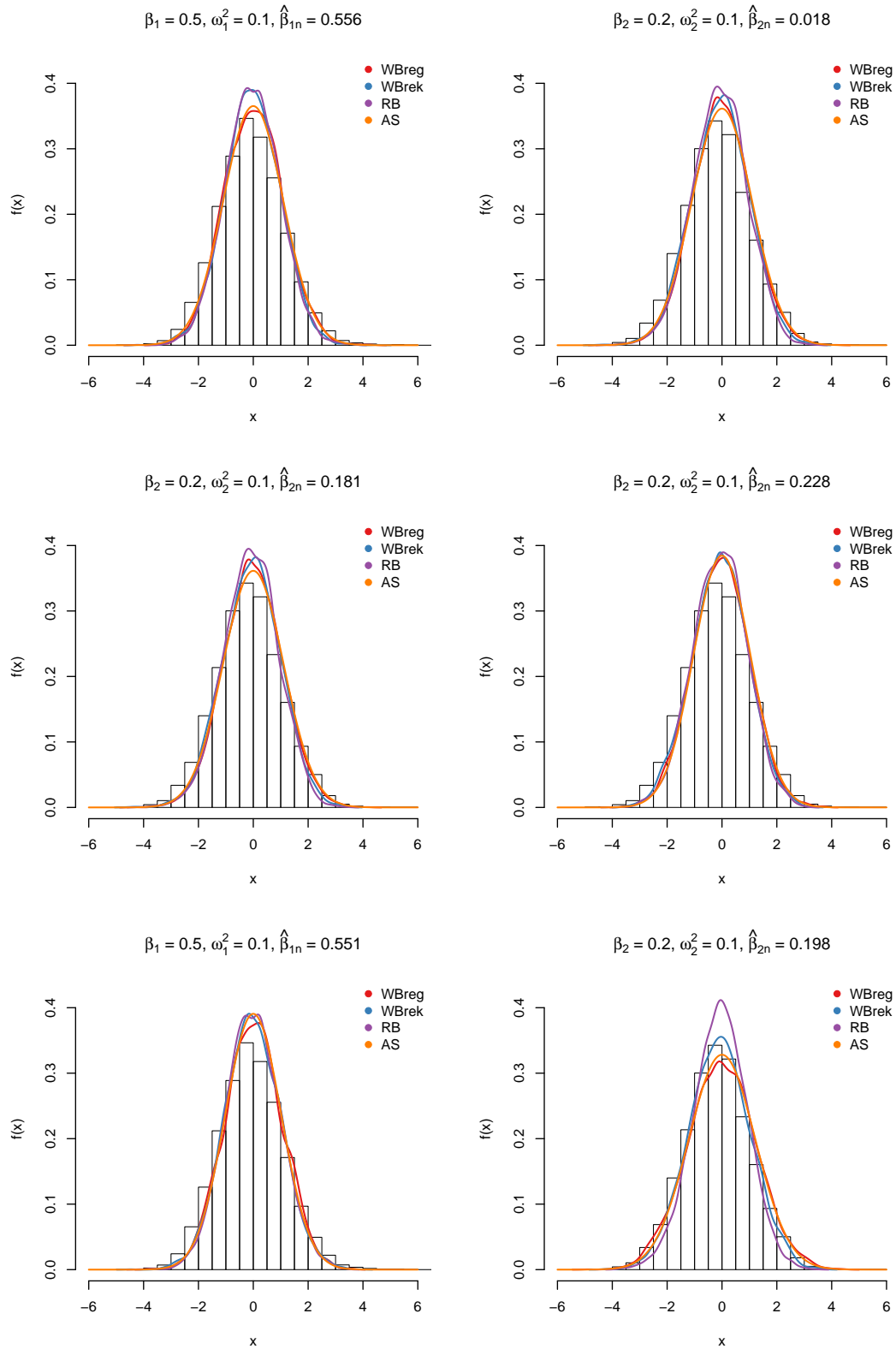


Obrázek 3.6: Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 200$ ,  $B = 1000$ ,  $T = 1000$ ,  $B_t \sim \mathcal{R} \left( \left[ -\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2} \right] \right)$ ,  $\varepsilon_t \sim DEx \left( 0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right)$ . Plnou čarou je naznačena hladina  $1 - \alpha = 0,9$ , čárkovaně pokrytí intervalového odhadu spočteného pomocí asymptotického normálního rozdělení metodou  $AS_V$ , tečkovaně metodou  $AS_P$ .

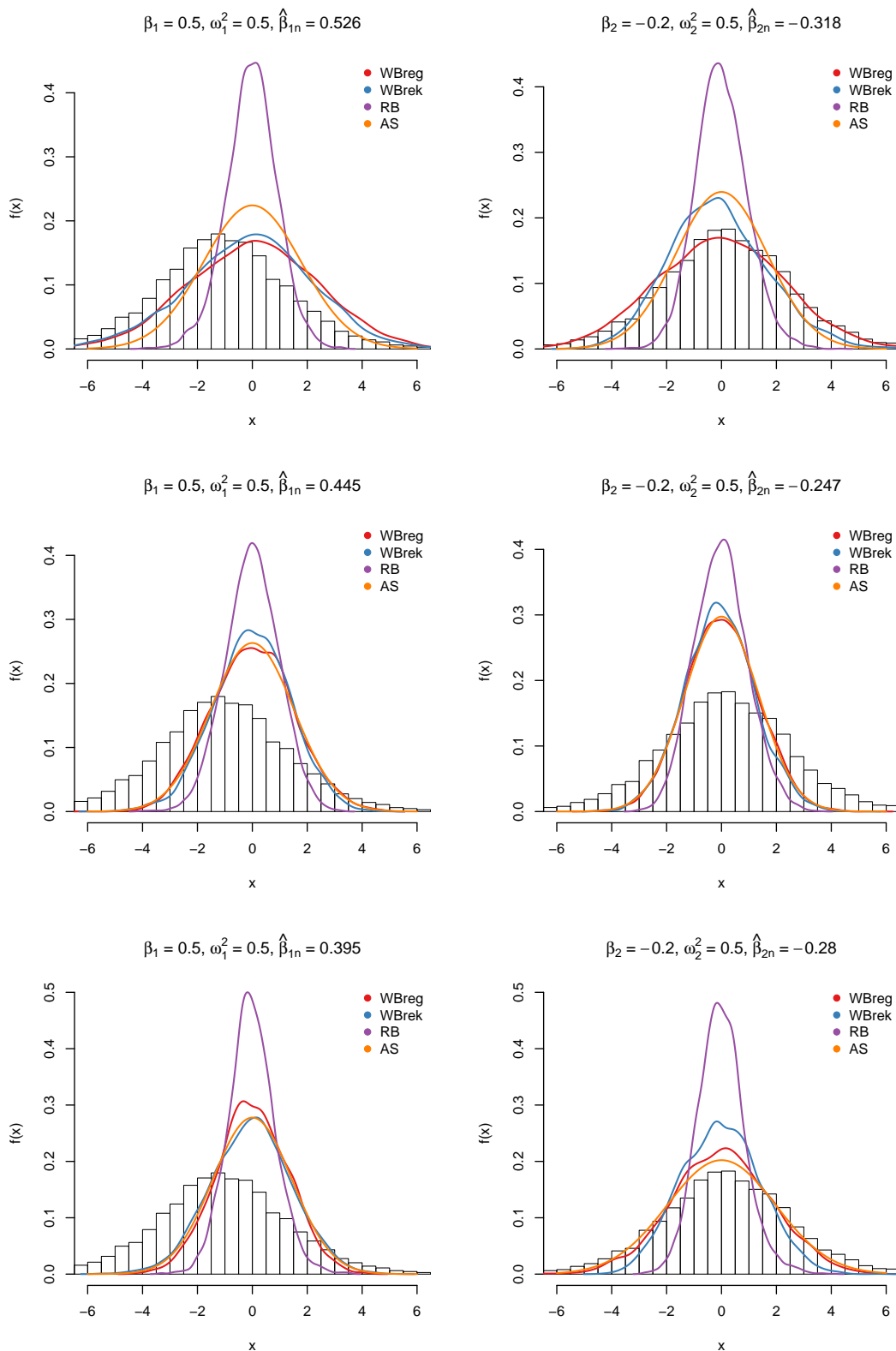


Obrázek 3.7: Závislost  $\tilde{u}_t$  na  $X_{t-1}^4$  v modelech  $RCA(1)$  se sadami parametrů  $p_1 - p_3$ . Na obrázcích vlevo jsou znázorněné všechny hodnoty, na obrázcích vpravo je výřez bez odlehlých hodnot.

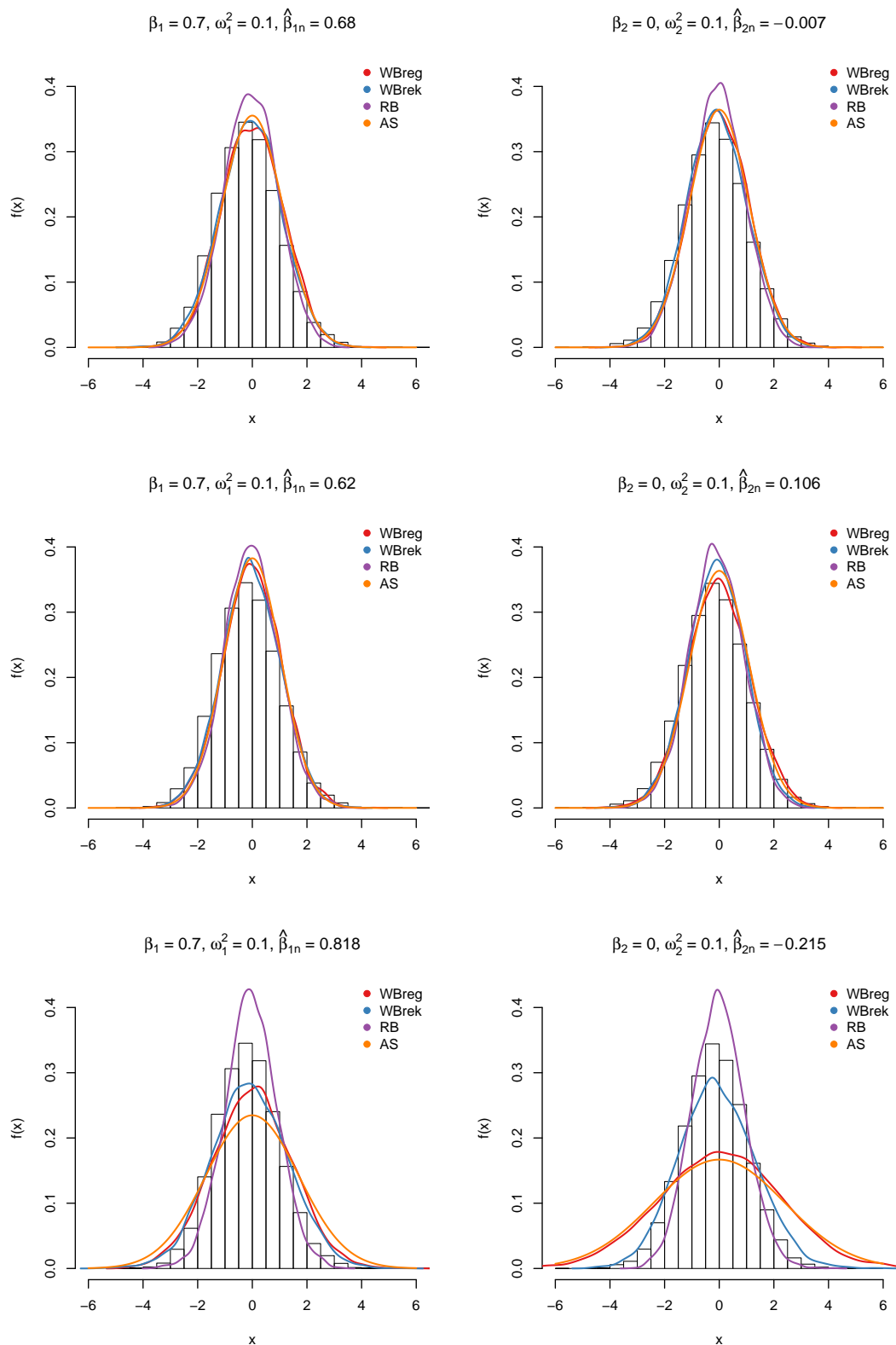




Obrázek 3.8: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p_2$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



Obrázek 3.9: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p_5$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



Obrázek 3.10: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p8$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



# Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře se základy metody bootstrap a s jejím použitím pro časové řady a následně popsat a porovnat některé metody vzniklé v nedávné době. V kapitole 1 jsme popsali metodu bootstrap tak, jak byla původně navržena pro aproximaci vlastností statistik pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Odtud jsme přešli k variantám této metody, které se postupně objevovaly, rozšiřovaly její použití a které dnes představují jakési základní principy metody bootstrap. Popsali jsme blokový bootstrap, který se snaží napodobovat závislost v původní řadě replikováním celých úseků této řady, parametrický a neparametrický reziduální bootstrap, který nejprve odhadne model, o kterém předpokládáme, že jím vznikla naše data (některou parametrickou či neparametrickou metodou), a následně replikuje odhadnutá rezidua tohoto modelu a pomocí nich a odhadu modelu generuje bootstrapová pseudo-pozorování. Dále jsme popsali regresní bootstrap, který též odhadne model a replikuje rezidua, ale bootstrapové repliky k aproximaci vlastností zvolené statistiky využívá jiným způsobem, a párový bootstrap, který replikuje v regresních modelech dvojice vysvětlované a vysvětlující proměnné (či proměnných). Nakonec jsme stručně popsali wild bootstrap, který vnáší do bootstrapového výběru nový zdroj variability, používá se pro modely s heteroskedastickými chybami a který se s oblibou používá v kombinaci s jinými metodami, kterým zajišťuje konzistenci i pro modely, kde by jinak samy o sobě konzistentní nebyly.

V další kapitole jsme se věnovali autoregresním procesům s náhodnými koeficienty  $RCA(p)$ . V sekcích 1 a 2 jsme popsali odhad střední hodnoty autoregresních koeficientů  $\beta$  a podmínky stacionarity a konvergence statistiky  $T_n = \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  k normálnímu rozdělení, speciálně pak pro procesy řádu 1. V sekci 3 jsme se zabývali použitím několika metod bootstrap pro tyto procesy. Pro autoregresní procesy s náhodnými koeficienty řádu 1 s nezávislými stejně rozdělenými složkami byla v nedávné době navržena metoda upravující klasický reziduální bootstrap, který se s oblibou používá pro procesy  $AR(p)$ , tak, aby se pomocí ní daly odhadovat obě složky reprezentující variabilitu v modelu  $RCA(1)$ . Zároveň s ní byly popsány i dvě varianty této metody, které bootstrapová rezidua pro jednu či obě složky variability generují z rozdělení, jehož první čtyři momenty odpovídají odhadům prvních čtyř momentů rozdělení daných chybových složek. Důvodem pro tento postup je skutečnost, že asymptotické rozdělení statistiky  $T_n$ , pro kterou byla autory článku dokázána konzistence všech tří metod, závisí právě na prvních čtyřech momentech těchto náhodných veličin. Další metoda, kterou lze využít u procesu  $RCA(1)$ , je wild bootstrap. Uvedli jsme předpoklady pro konzistenci této metody u procesu  $RCA(1)$  s heteroskedastickými (ale i homoskedastickými) chybami.

V sekci 4 kapitoly 2 jsme rozšířili použití metody wild bootstrap na autoregresní procesy s náhodnými koeficienty řádu 2 a odvodili konzistenci této metody u procesů s nezávislými stejně rozdělenými chybovými složkami, jsou-li navíc mezi sebou nezávislé i chybové složky  $B_1(t)$  a  $B_2(t)$  autoregresních koeficientů. Pokud je nám známo, pro modely vyšších řádů než 1 zatím konzistence metody

wild bootstrap dokázána nebyla.

V kapitole 4 jsme na několika simulačních experimentech ověřovali konzistenci bootstrapových metod popsanych v kapitole 2 a také jsme zjišťovali, zda dávají či nedávají výsledky srovnatelné s asymptoticky normálním rozdělením statistiky  $T_n$ . S těmito metodami jsme porovnávali i další dvě, a to rekurzivní wild bootstrap, pro který konzistence dle našich vědomostí dokázaná není, a klasický parametrický reziduální bootstrap, pro který je dokázáno, že u (podmíněně) heteroskedastických procesů konzistentní není. Metody jsme porovnávali jen na simulovaných datech. Ukázalo se, že pro námi vygenerovaná data dává metoda regresní wild bootstrap téměř stejné výsledky, jako asymptotické normální rozdělení, a to u procesů řádu 1 i 2. Reziduální bootstrap navržený pro procesy  $RCA(1)$  také dopadá relativně dobře, ale oproti regresnímu wild bootstrapu a asymptotickému rozdělení bývá odhad rozptylu statistiky  $T_n$  touto metodou trochu více vychýlený. K většímu vychýlení vede i rekurzivní wild bootstrap. Klasický reziduální bootstrap dle očekávání dobré výsledky nedává. Momentové varianty reziduálního bootstrapu na některých časových řadách dávají srovnatelné výsledky se svojí čistě reziduální variantou a s asymptotickým rozdělením. Nicméně ukázalo se, že jejich použitelnost je značně omezená svojí závislostí na odhadech parametrů procesu  $RCA(1)$ . Pokud tyto odhady nevyjdou dobře, momentové metody není možné použít.

Ukázalo se, že pro autoregresní procesy s náhodnými koeficienty dávají regresní wild bootstrap i reziduální bootstrap navržený pro tyto procesy výsledky srovnatelné s výsledky založenými na asymptoticky normálním rozdělení. Pokračováním této práce může být rozšíření metody wild bootstrap na procesy  $RCA(2)$  se slabšími omezeními kladenými na rozdělení chybových složek, eventuálně na procesy, kde chybové složky nejsou homoskedastické. Jinou možností by bylo odvodit konzistenci či naopak nekonzistenci metody rekurzivní wild bootstrap pro autoregresní procesy s náhodnými koeficienty.

# Dodatek 1

## Odvození členů matice $\mathbf{E} [(\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t') (\mathbf{X}_t' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X}_t)]$

V této sekci spočteme tvar jednotlivých členů tvořících matici  $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{E} [(\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t') (\mathbf{X}_t' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X}_t)]$ :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 + \omega_2^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 & \omega_1^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + \omega_2^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3 \\ \omega_1^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + \omega_2^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3 & \omega_1^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + \omega_2^2 \mathbf{E} \mathcal{X}_t^4 \end{pmatrix},$$

která se vyskytuje v asymptotickém rozptylu statistik  $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})$  a  $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_n)$ . Pripomeňme, že  $\varepsilon_t$  a  $\mathbf{B}(s)$  jsou nezávislé pro všechna  $t, s \in \mathbb{N}$  a  $\mathcal{X}_s$  je nezávislé na  $\varepsilon_t$  a  $\mathbf{B}(t)$  pro  $s < t$ , tedy i náhodné autoregresní parametry  $b_1(t) = \beta_1 + B_1(t)$  a  $b_2(t) = \beta_2 + B_2(t)$  jsou nezávislé s  $\mathcal{X}_s$  pro  $s < t$ . Další předpoklad, který při výpočtech využijeme, je nulovost lichých momentů  $\varepsilon_t$  a  $\mathbf{B}(t)$ .

Podívejme se nejprve na momenty autoregresních parametrů  $b_1(t)$  a  $b_2(t)$ . Víme, že  $\mathbf{E} b_1(t) = \beta_1$  a  $\mathbf{E} b_2(t) = \beta_2$ . Dále

$$\begin{aligned} \mathbf{E} b_1(t)^2 &= \beta_1^2 + \omega_1^2, \\ \mathbf{E} b_1(t)^3 &= \mathbf{E} [\beta_1^3 + 3\beta_1^2 B_1(t) + 3\beta_1 B_1(t)^2 + B_1(t)^3] = \beta_1^3 + 3\beta_1 \omega_1^2, \\ \mathbf{E} b_1(t)^4 &= \mathbf{E} [\beta_1^4 + 4\beta_1^3 B_1(t) + 6\beta_1^2 B_1(t)^2 + 4\beta_1 B_1(t)^3 + B_1(t)^4] \\ &= \beta_1^4 + 6\beta_1^2 \omega_1^2 + \alpha_{41}. \end{aligned}$$

Stejně tak

$$\begin{aligned} \mathbf{E} b_2(t)^2 &= \beta_2^2 + \omega_2^2, \\ \mathbf{E} b_2(t)^3 &= \beta_2^3 + 3\beta_2 \omega_2^2, \\ \mathbf{E} b_2(t)^4 &= \beta_2^4 + 6\beta_2^2 \omega_2^2 + \alpha_{42}. \end{aligned}$$

Protože proces  $\{\mathcal{X}_t, t = -1, 0, 1, \dots\}$  je striktně stacionární, je i  $\mathbf{E} \mathcal{X}_{t-1}^4 = \mathbf{E} \mathcal{X}_t^4$ ,  $\mathbf{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \mathcal{X}_{t-2} = \mathbf{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1}$ ,  $\mathbf{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 = \mathbf{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2$  a  $\mathbf{E} \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2}^3 = \mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3$ . Pripomeňme ještě tvary  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t^2$  a  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \mathbf{E} \mathcal{X}_t^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \beta_2^2 - \beta_1^2 \left( \frac{1+\beta_2}{1-\beta_2} \right)}, \\ \rho_1 &= \mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1} = \sigma_X^2 \frac{\beta_1}{1 - \beta_2}. \end{aligned}$$

Nyní spočteme tvary  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t^4$ ,  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3$ ,  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2$  a  $\mathbf{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1}$  v závislosti na parametrech  $\beta_1, \beta_2, \omega_1^2, \omega_2^2, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \sigma^2$  a  $\delta_4$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3 &= \mathbb{E} \left[ (b_1(t) \mathcal{X}_{t-1} + b_2(t) \mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t) \mathcal{X}_{t-1}^3 \right] = \\
&= \mathbb{E} b_1(t) \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^4 + \mathbb{E} b_2(t) \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \mathcal{X}_{t-2} + \mathbb{E} \varepsilon_t \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \\
&= \beta_1 \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 + \beta_2 \mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1}, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 &= \mathbb{E} \left[ \left( b_1(t) \mathcal{X}_{t-1} + b_2(t) \mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t \right)^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( b_1(t)^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + b_2(t)^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 + \varepsilon_t^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2b_1(t)b_2(t) \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2} + 2b_1(t) \mathcal{X}_{t-1} \varepsilon_t + 2b_2(t) \mathcal{X}_{t-2} \varepsilon_t \right) \mathcal{X}_{t-1}^2 \right] \\
&= \mathbb{E} b_1(t)^2 \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^4 + \mathbb{E} b_2(t)^2 \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 + \mathbb{E} \varepsilon_t^2 \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 + \\
&\quad + 2 \mathbb{E} b_1(t) \mathbb{E} b_2(t) \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \mathcal{X}_{t-2} + 2 \mathbb{E} b_1(t) \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^3 \mathbb{E} \varepsilon_t + \\
&\quad + 2 \mathbb{E} b_2(t) \mathbb{E} \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-2} \mathbb{E} \varepsilon_t \\
&= (\beta_1^2 + \omega_1^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 + (\beta_2^2 + \omega_2^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + 2\beta_1 \beta_2 \mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + \sigma_X^2 \sigma^2,
\end{aligned}$$

tudíž

$$\mathbb{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 = \frac{1}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} \left[ (\beta_1^2 + \omega_1^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 + 2\beta_1 \beta_2 \mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + \sigma_X^2 \sigma^2 \right]. \tag{3.6}$$

V dalších výpočtech již budeme výrazy o něco méně rozepisovat a budeme rovnou vynechávat členy, kde se vyskytují liché momenty  $\varepsilon_t$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} &= \mathbb{E} \left[ \left( b_1(t) \mathcal{X}_{t-1} + b_2(t) \mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t \right)^3 \mathcal{X}_{t-1} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( b_1(t)^3 \mathcal{X}_{t-1}^3 + 3b_1(t)^2 b_2(t) \mathcal{X}_{t-1}^2 \mathcal{X}_{t-2} + 3b_1(t) b_2(t)^2 \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2}^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_2(t)^3 \mathcal{X}_{t-2}^3 + 3b_1(t)^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 \varepsilon_t + 6b_1(t) b_2(t) \mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}_{t-2} \varepsilon_t + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3b_2(t)^2 \mathcal{X}_{t-2}^2 \varepsilon_t + 3b_1(t) \mathcal{X}_{t-1} \varepsilon_t^2 + 3b_2(t) \mathcal{X}_{t-2} \varepsilon_t^2 + \varepsilon_t^3 \right) \mathcal{X}_{t-1} \right] \\
&= (\beta_1^3 + 3\beta_1 \omega_1^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 + 3\beta_2 (\beta_1^2 + \omega_1^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + \\
&\quad + 3\beta_1 (\beta_2^2 + \omega_2^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2 + (\beta_2^3 + 3\beta_2 \omega_2^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3 + \\
&\quad + 3\beta_1 \sigma^2 \sigma_X^2 + 3\beta_2 \frac{\beta_1}{1 - \beta_2} \sigma_X^2 \sigma^2.
\end{aligned}$$

Dosadíme-li za  $\mathbb{E} \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2$  výraz (3.6) a za  $\mathbb{E} \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3$  výraz (3.5), dostaneme



$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} &= (\beta_1^3 + 3\beta_1\omega_1^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 + 3\beta_2(\beta_1^2 + \omega_1^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + \\
&+ \frac{3\beta_1(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} \left[ (\beta_1^2 + \omega_1^2) \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 + 2\beta_1\beta_2 \mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + \sigma_X^2 \sigma^2 \right] + \\
&+ (\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) \left[ \beta_1 \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 + \beta_2 \mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} \right] + \\
&+ 3\beta_1\sigma^2\sigma_X^2 + 3\frac{\beta_1\beta_2}{1 - \beta_2}\sigma_X^2\sigma^2 \\
&= \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 \left[ (\beta_1^3 + 3\beta_1\omega_1^2) + \frac{3\beta_1(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + \beta_1(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) \right] + \\
&+ \mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} \left[ 3\beta_2(\beta_1^2 + \omega_1^2) + \frac{6\beta_1^2\beta_2(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + \beta_2(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) \right] + \\
&+ \sigma_X^2\sigma^2 \left[ \frac{3\beta_1(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + 3\beta_1 + 3\frac{\beta_1\beta_2}{1 - \beta_2} \right].
\end{aligned}$$

Máme tedy rovnici

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} \left[ 1 - \left( 3\beta_2(\beta_1^2 + \omega_1^2) + \frac{6\beta_1^2\beta_2(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + \beta_2(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 \left[ (\beta_1^3 + 3\beta_1\omega_1^2) + \frac{3\beta_1(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + \beta_1(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) \right] + \\
&+ \sigma_X^2\sigma^2 \left[ \frac{3\beta_1(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + 3\beta_1 + 3\frac{\beta_1\beta_2}{1 - \beta_2} \right]. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Označme části této rovnice:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1 - \left[ 3\beta_2(\beta_1^2 + \omega_1^2) + \frac{6\beta_1^2\beta_2(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + \beta_2(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) \right]}, \\
B &= \left[ (\beta_1^3 + 3\beta_1\omega_1^2) + \frac{3\beta_1(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + \beta_1(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) \right] \\
C &= \sigma_X^2\sigma^2 \left[ \frac{3\beta_1(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + 3\beta_1 + 3\frac{\beta_1\beta_2}{1 - \beta_2} \right].
\end{aligned}$$

Rovnici (3.7) pak můžeme snadno přepsat do tvaru, se kterým se nám bude snáze pracovat:

$$\mathbb{E} \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} = A(B \cdot \mathbb{E} \mathcal{X}_t^4 + C). \tag{3.8}$$

Výrazy  $A$ ,  $B$  a  $C$  lze ještě upravit na tvar

$$A = \frac{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2}{(1 - \beta_2^2 - \omega_2^2) \left[ 1 - \beta_2^2(\beta_2^2 + 3\omega_2^2) \right] - 3\beta_2 \left[ (\beta_2^2 + \omega_2^2)(\beta_1^2 - \omega_1^2) + (\beta_1^2 + \omega_1^2) \right]}$$

$$B = \frac{\beta_1}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} \left[ \beta_1^2 + 3\omega_1^2 + 2\beta_1^2(\beta_2^2 + \omega_2^2) + (\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2)(1 - \beta_2^2 - \omega_2^2) \right],$$

$$C = \frac{3\beta_1\sigma_X^2\sigma^2}{(1 - \beta_2)(1 - \beta_2^2 - \omega_2^2)} \left[ 1 - \beta_2(\beta_2^2 + \omega_2^2) \right].$$

Zbývá rozepsat člen  $E \mathcal{X}_t^4$ .

$$\begin{aligned} E \mathcal{X}_t^4 &= E \left[ b_1(t)\mathcal{X}_{t-1} + b_2(t)\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t \right]^4 \\ &= E \left[ b_1(t)^4\mathcal{X}_{t-1}^4 + 4b_1(t)^3b_2(t)\mathcal{X}_{t-1}^3\mathcal{X}_{t-2} + 6b_1(t)^2b_2(t)^2\mathcal{X}_{t-1}^2\mathcal{X}_{t-2}^2 + \right. \\ &\quad + 4b_1(t)b_2(t)^3\mathcal{X}_{t-1}\mathcal{X}_{t-2}^3 + b_2(t)^4\mathcal{X}_{t-2}^4 + \\ &\quad + 4(b_1(t)^3\mathcal{X}_{t-1}^3 + 3b_1(t)^2b_2(t)\mathcal{X}_{t-1}^2\mathcal{X}_{t-2} + 3b_1(t)b_2(t)^2\mathcal{X}_{t-1}\mathcal{X}_{t-2}^2 + b_2(t)^3\mathcal{X}_{t-2}^3)\varepsilon_t + \\ &\quad + 6(b_1(t)^2\mathcal{X}_{t-1}^2 + 2b_1(t)b_2(t)\mathcal{X}_{t-1}\mathcal{X}_{t-2} + b_2(t)^2\mathcal{X}_{t-2}^2)\varepsilon_t^2 + \\ &\quad \left. + 4(b_1(t)\mathcal{X}_{t-1} + b_2(t)\mathcal{X}_{t-2})\varepsilon_t^3 + \varepsilon_t^4 \right] \\ &= (\beta_1^4 + 6\beta_1^2\omega_1^2 + \alpha_{41}) E \mathcal{X}_t^4 + 4\beta_2(\beta_1^3 + 3\beta_1\omega_1^2) E \mathcal{X}_t^3\mathcal{X}_{t-1} + \\ &\quad + 6(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2) E \mathcal{X}_t^2\mathcal{X}_{t-1}^2 + 4\beta_1(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) E \mathcal{X}_t\mathcal{X}_{t-1}^3 + \\ &\quad + (\beta_2^4 + 6\beta_2^2\omega_2^2 + \alpha_{42}) E \mathcal{X}_t^4 + 6(\beta_1^2 + \omega_1^2)\sigma^2\sigma_X^2 + \\ &\quad + 12\beta_1\beta_2\sigma^2\sigma_X^2 \frac{\beta_1}{1 - \beta_2} + 6(\beta_2^2 + \omega_2^2)\sigma^2\sigma_X^2 + \delta_4 \\ &= (\beta_1^4 + 6\beta_1^2\omega_1^2 + \alpha_{41}) E \mathcal{X}_t^4 + 4\beta_2(\beta_1^3 + 3\beta_1\omega_1^2) E \mathcal{X}_t^3\mathcal{X}_{t-1} + \\ &\quad + \frac{6(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} \left[ (\beta_1^2 + \omega_1^2) E \mathcal{X}_t^4 + 2\beta_1\beta_2 E \mathcal{X}_t^3\mathcal{X}_{t-1} + \sigma_X^2\sigma^2 \right] + \\ &\quad + 4\beta_1(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) \left[ \beta_1 E \mathcal{X}_t^4 + \beta_2 E \mathcal{X}_t^3\mathcal{X}_{t-1} \right] + (\beta_2^4 + 6\beta_2^2\omega_2^2 + \alpha_{42}) E \mathcal{X}_t^4 + \\ &\quad + \sigma^2\sigma_X^2 \left[ 6(\beta_1^2 + \omega_1^2) + 6(\beta_2^2 + \omega_2^2) + 12\frac{\beta_1^2\beta_2}{1 - \beta_2} \right] + \delta_4 \\ &= E \mathcal{X}_t^4 \left[ (\beta_1^4 + 6\beta_1^2\omega_1^2 + \alpha_{41}) + \frac{6(\beta_1^2 + \omega_1^2)^2(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + 4\beta_1^2(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + (\beta_2^4 + 6\beta_2^2\omega_2^2 + \alpha_{42}) \right] + \\ &\quad + E \mathcal{X}_t^3\mathcal{X}_{t-1} \left[ 4\beta_2(\beta_1^3 + 3\beta_1\omega_1^2) + \frac{12\beta_1\beta_2(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1 - \beta_2^2 - \omega_2^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\beta_1\beta_2(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) \Big] + \\
& + \sigma^2\sigma_X^2 \left[ 6(\beta_1^2 + \omega_1^2) + 6(\beta_2^2 + \omega_2^2) + 12\frac{\beta_1^2\beta_2}{1-\beta_2} + \frac{6(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1-\beta_2^2 - \omega_2^2} \right] + \delta_4.
\end{aligned}$$

Označme nyní

$$D = \sigma^2\sigma_X^2 \left[ 6(\beta_1^2 + \omega_1^2) + 6(\beta_2^2 + \omega_2^2) + 12\frac{\beta_1^2\beta_2}{1-\beta_2} + \frac{6(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1-\beta_2^2 - \omega_2^2} \right] + \delta_4,$$

$$\begin{aligned}
E &= (\beta_1^4 + 6\beta_1^2\omega_1^2 + \alpha_{41}) + \frac{6(\beta_1^2 + \omega_1^2)^2(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1-\beta_2^2 - \omega_2^2} + 4\beta_1^2(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2) + \\
&+ (\beta_2^4 + 6\beta_2^2\omega_2^2 + \alpha_{42}),
\end{aligned}$$

$$F = 4\beta_2(\beta_1^3 + 3\beta_1\omega_1^2) + \frac{12\beta_1\beta_2(\beta_1^2 + \omega_1^2)(\beta_2^2 + \omega_2^2)}{1-\beta_2^2 - \omega_2^2} + 4\beta_1\beta_2(\beta_2^3 + 3\beta_2\omega_2^2).$$

Pak zřejmě  $E \mathcal{X}_t^4 = E \cdot E \mathcal{X}_t^4 + F \cdot E \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + D$ , a tedy

$$E \mathcal{X}_t^4 = \frac{F \cdot E \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1} + D}{1 - E}. \quad (3.9)$$

Dosadíme-li do rovnice (3.9) vzorec (3.8) pro  $E \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1}$ , vyjde nám

$$E \mathcal{X}_t^4 = \frac{F \left( A(B \cdot E \mathcal{X}_t^4 + C) \right) + D}{1 - E},$$

a tedy

$$E \mathcal{X}_t^4 = \frac{F \cdot A \cdot C + D}{1 - E - F \cdot A \cdot B}.$$

Výraz  $D$  lze ještě převést na tvar

$$D = \delta_4 + \frac{6\sigma_X^2\sigma^2}{1-\beta_2^2 - \omega_2^2} \left[ \beta_1^2 + \omega_1^2 + (1-\beta_2^2 - \omega_2^2) \left( \beta_2^2 + \omega_2^2 + 2\frac{\beta_1^2\beta_2}{1-\beta_2} \right) \right].$$

Zpětným dosazením do vzorců (3.8), (3.6) a (3.5) pak lze vyjádřit po řadě i hodnoty  $E \mathcal{X}_t^3 \mathcal{X}_{t-1}$ ,  $E \mathcal{X}_t^2 \mathcal{X}_{t-1}^2$  a  $E \mathcal{X}_t \mathcal{X}_{t-1}^3$ , jejich přesné tvary zde ale již odvozovat nebudeme.



# Dodatek 2

## Ergodicita

Na tomto místě popíšeme pojem ergodicity a uvedeme věty, které jsou použity v důkazu věty 15. Následující definice jsme převzali z Davidson (1994), kapitola 13.

**Definice 3.** *Bud'  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pravděpodobnostní prostor. Transformace zachovávající míru je zobrazení  $T$  prostoru  $\Omega$  na  $\Omega$ , pro které platí, že pro každou množinu  $a \in \mathcal{A}$  je  $P(T(a)) = P(a)$ .*

**Definice 4.** *Náhodný jev  $a \in \mathcal{A}$  se nazývá invariantní vzhledem k transformaci  $T$ , jestliže  $T(a) = a$ .*

**Definice 5.** *Transformace  $T$  zachovávající míru se nazývá ergodická, jestliže buď  $P(a) = 0$  nebo  $P(a) = 1$  pro všechna  $a \in \mathcal{J}$ , kde  $\mathcal{J}$  je  $\sigma$ -algebra všech jevů invariantních vzhledem k  $T$ .*

V případě náhodných procesů používáme transformaci posunutí, u které  $\mathcal{X}_{t+1}(\omega) = \mathcal{X}_t(T(\omega))$ .

**Definice 6.** *Stacionární posloupnost  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  se nazývá ergodická, jestliže  $\mathcal{X}_t(\omega) = \mathcal{X}_1(T^{t-1}(\omega))$  pro všechna  $t$ , kde  $T$  je ergodická míru zachovávající transformace.*

*Poznámka.* Posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin či vektorů je ergodická.

**Věta 19** (Ergodická věta). *Nechť  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{N}\}$  je stacionární, ergodický, integrovatelný náhodný proces. Pak*

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathcal{X}_t \xrightarrow{s.j.} E \mathcal{X}_1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Důkaz lze nalézt v Davidson (1994), věta 13.12.

**Věta 20.** *Nechť náhodný proces  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  s hodnotami v měřitelném prostoru  $(S, \mathcal{S})$  je ergodický. Označme  $(S^\infty, \mathcal{S}^\infty)$  měřitelný prostor, kde  $S^\infty$  je součinný prostor  $X_{-\infty}^\infty S$  a  $\mathcal{S}^\infty$  součinnová  $\sigma$ -algebra. Bud'  $(Y, \mathcal{Y})$  měřitelný prostor a  $f : S^\infty \rightarrow Y$  měřitelné zobrazení. Pak náhodný proces  $\{\mathcal{Z}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , kde  $\mathcal{Z}_t = f(\dots, \mathcal{X}_{t-1}, \mathcal{X}_t, \mathcal{X}_{t+1}, \dots)$ , je ergodický.*

Důkaz lze nalézt ve van der Vaart (2010), věta 7.10.

## Další použité definice a věty

**Definice 7** (Kroneckerův součin matic). *Nechť  $\mathbf{A} = (a_{i,j})$  je reálná matice typu  $(m, n)$  a  $\mathbf{B}$  reálná matice typu  $(p, q)$ . Kroneckerův součin matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  je matice typu  $(mp, nq)$  tvaru*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \dots & a_{1,n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\mathbf{B} & \dots & a_{m,n}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Kroneckerův součin matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  značíme  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ .

**Definice 8** ( $m$ -závislé náhodné veličiny). *Řekneme, že náhodné veličiny posloupnosti  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  jsou  $m$ -závislé, kde  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je dané číslo, jestliže pro každé  $t \in \mathbb{Z}$  jsou náhodné vektory  $(\dots, \mathcal{X}_{t-1}, \mathcal{X}_t)$  a  $(\mathcal{X}_{t+m+1}, \mathcal{X}_{t+m+2}, \dots)$  nezávislé.*

**Věta 21** (Centrální limitní věta pro  $m$ -závislé náhodné veličiny). *Nechť  $\{\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je reálná striktně stacionární centrovaná posloupnost  $m$ -závislých náhodných veličin s konečnými druhými momenty a autokovarianční funkcí  $R$ , pro kterou  $\sigma_m^2 = \sum_{k=-m}^m R(k) \neq 0$ . Pak pro  $n \rightarrow \infty$  platí*

$$n \operatorname{var} \bar{\mathcal{X}}_n \rightarrow \sigma_m^2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathcal{X}_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_m^2).$$

Důkaz je uveden v Prášková (2004b).

**Věta 22** (Berry-Esseenova nerovnost). *Pro nezávislé náhodné veličiny  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$  takové, že  $E \mathcal{X}_1 = \dots = E \mathcal{X}_n = 0$  a  $0 < s_n^2 = \operatorname{var} \mathcal{X}_1 + \dots + \operatorname{var} \mathcal{X}_n < \infty$ , platí*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left( \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n \mathcal{X}_k \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{s_n^3} \sum_{i=1}^n E |\mathcal{X}_i|^3.$$

Tato věta byla dokázána v Štěpán (1987), IV.5.1 s konstantou  $C = 6$ .

**Věta 23** (Věta o spojitě transformaci). *Nechť  $\mathbf{X}, \mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N}$  jsou  $k$ -rozměrné náhodné vektory. Nechť dále  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  je zobrazení spojitě v každém bodě otevřené množiny  $C \subset \mathbb{R}^k$  takové, že  $P(\mathbf{X} \in C) = 1$ . Pak pro  $n \rightarrow \infty$  platí:*

$$1. \quad \mathbf{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mathbf{X} \Rightarrow g(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{s.j.} g(\mathbf{X}),$$

$$2. \quad \mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X} \Rightarrow g(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{P} g(\mathbf{X}).$$

Důkaz lze nalézt v Davidson (1994), věta 18.8.

**Věta 24** (Vícerozměrná Ljapunovova centrální limitní věta). *Nechť pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je dán pravděpodobnostní prostor  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$  a na něm definované nezávislé  $q$ -rozměrné náhodné vektory  $\mathbf{Y}_{n,1}, \dots, \mathbf{Y}_{n,k_n}$  při  $k_n \in \mathbb{N}$ . Nechť  $E \mathbf{Y}_{n,1} = \dots = E \mathbf{Y}_{n,k_n} = \mathbf{0}$  a varianční matice  $\text{Var} \mathbf{Y}_{n,1}, \dots, \text{Var} \mathbf{Y}_{n,k_n}$  existují konečné. Jestliže platí*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \text{Var} \mathbf{Y}_{n,k} = \Sigma_Y$ , kde  $\Sigma_Y$  je konečná matice,

2. existuje  $\kappa > 0$  takové, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} E \|\mathbf{Y}_{n,k}\|^{2+\kappa} = 0$ ,

*potom  $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{Y}_{n,k} \xrightarrow{d} \mathbf{Z}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , kde  $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}_q(\mathbf{0}, \Sigma_Y)$ .*

Důkaz lze nalézt v Lachout (1998), věta 16.9.

**Věta 25** (Cramér-Slutského věta). *Nechť  $\mathbf{X}_n, \mathbf{X}$ , jsou  $k$ -rozměrné náhodné vektory,  $\mathbf{Y}_n$  jsou  $(m \times k)$ -rozměrné náhodné matice a  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}_{m \times k}$  je matice konstant. Nechť pro  $n \rightarrow \infty$   $\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{P} \mathbf{C}$ . Pak  $\mathbf{Y}_n \mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{C} \mathbf{X}$ ,  $n \rightarrow \infty$ .*

Důkaz: Věta je dokázána v Sen a kol. (2010), věta 7.5.3. Formulace věty 7.5.3 je mírně odlišná, ale stačí si uvědomit, že posloupnost náhodných matic  $\mathbf{Y}_n$  konverguje v pravděpodobnosti k matici  $\mathbf{C}$  právě tehdy, když jednotlivé složky matic  $\mathbf{Y}_n$  konvergují v pravděpodobnosti k jednotlivým složkám matice  $\mathbf{C}$ . To je splněno pro každé  $\mathbf{C}$  právě tehdy, když stopa matice  $[(\mathbf{Y}_n - \mathbf{C})'(\mathbf{Y}_n - \mathbf{C})]$  konverguje v pravděpodobnosti k nule, neboť stopa této matice je rovna součtu druhých mocnin všech prvků matice  $(\mathbf{Y}_n - \mathbf{C})$ . Podmínky věty 25 jsou tedy ekvivalentní s podmínkami věty 7.5.3 z publikace Sen a kol. (2010).

□





# Seznam použité literatury

- ANDĚL, J. (1976). Autoregressive series with random parameters. *Math. Operationforsch. u. Statist.*, **7**, 735–741.
- AUE, A., HORVATH, L. a STEINBACH, J. (2006). Estimation in random coefficient autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, **27**, 61–76.
- BOSE, A. (1988). Edgeworth correction by bootstrap in autoregressions. *The Annals of Statistics*, **16**, 1709–1722.
- DAVIDSON, J. (1994). *Stochastic Limit Theory*. Oxford University Press, New York. ISBN 0-19-877402-8.
- EFRON, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, **7**, 1–26.
- FRANKE, J., KREISS, J. P. a MAMMEN, E. (2002). Bootstrap of kernel smoothing in nonlinear time series. *Bernoulli*, **8**, 1–37.
- GONCALVES, S. a KILIAN, L. (2004). Bootstrapping autoregressions with conditional heteroskedasticity of unknown form. *Journal of Econometrics*, **123**, 89–120.
- GONCALVES, S. a KILIAN, L. (2007). Asymptotic and bootstrap inference for AR( $\infty$ ) processes with conditional heteroskedasticity. *Econometric Reviews*, **26**(6), 609–641.
- HALL, P. a MA, Y. (2007). Testing the suitability of polynomial models in errors-in-variables problems. *The Annals of Statistics*, **35**(6), 2620–2638.
- JANEČKOVÁ, H. (2002). Some generalizations in a heteroscedastic RCA(1) model. *Acta Univ. Carolin. - Math. Phys.*, **43**, 21–47.
- KREISS, J. P. a FINK, T. (2013). Bootstrap for random coefficient autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, **34**, 646–667.
- KREISS, J. P. a PAPARODITIS, E. (2011a). Edgeworth correction by bootstrap in autoregressions. *Journal of the Korean Statistical Society*, **40**, 357–378.
- KREISS, J. P. a PAPARODITIS, E. (2011b). Bootstrap methods for dependent data: A review. *Journal of the Korean Statistical Society*, **40**, 357–378.
- LACHOUT, P. (1998). *Teorie pravděpodobnosti*. Karolinum, Praha. ISBN 80-7184-730-5.
- LAHIRI, S. N. (2003). *Resampling Methods for Dependent Data*. II. Series. Springer-Verlag New York, Inc., USA. ISBN 0-387-00298-0.
- NICHOLLS, D. F. a QUINN, B. G. (1982). *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*. Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag New York, Inc., New York. ISBN 0-387-90766-1.

- PAPARODITIS, E. a POLITIS, D. N. (2009). Resampling and subsampling for financial time series. In ANDERSEN, T. G., A., D. R., KREISS, J. P. a MIKOSCH, T., editors, *Handbook of Financial Time Series*, pages 983–999. Springer, New York.
- POLITIS, D. N. a ROMANO, J. P. (1992a). A general resampling scheme for triangular arrays of  $\alpha$ -mixing random variables with application to the problem of spectral density estimation. *The Annals of Statistics*, **20**, 1985–2007.
- POLITIS, D. N. a ROMANO, J. P. (1992b). A circular block resampling procedure for stationary data. In LEPAGE, R. a BILLARD, L., editors, *Exploring the Limits of Bootstrap*, pages 263–270. Wiley, New York.
- PRÁŠKOVÁ, Z. (2002). Bootstrap in nonstationary autoregression. *Kybernetika*, **38**(4), 389–404.
- PRÁŠKOVÁ, Z. (2003). Wild bootstrap in RCA(1) model. *Kybernetika*, **39**(1), 1–12.
- PRÁŠKOVÁ, Z. (2004a). Metoda bootstrap. In ANTOCH, J. a DOHNAL, G., editors, *ROBUST 2004*, pages 1–16. JČMF, Praha.
- PRÁŠKOVÁ, Z. (2004b). *Základy náhodných procesů II*. Nakladatelství Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0971-1.
- R CORE TEAM (2013). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <http://www.R-project.org/>.
- SEN, P. K., SINGER, J. M. a DE LIMA, A. P. (2010). *From Finite Sample to Asymptotic Methods in Statistics*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 978-0-521-87722-0.
- SINGH, K. (1981). On the asymptotic accuracy of Efron’s bootstrap. *The Annals of Statistics*, **9**(6), 1187–1195.
- ŠTĚPÁN, J. (1987). *Teorie pravděpodobnosti - matematické základy*. Academia, Praha.
- VAN DER VAART, A. W. (2010). Time series. URL <https://web.archive.org/web/20120406193443/http://www.math.vu.nl/sto/onderwijs/timeseries/olddictaat.pdf>.
- WU, C. F. J. (1986). Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis. *The Annals of Statistics*, **14**(4), 1261–1295.

# Seznam obrázků

3.1	Odhady parametru $\alpha_4$ v modelu $RCA(1)$ s normálně rozdělenými chybami $\varepsilon_t$ i $B_t$ . Extrémní hodnoty nejsou zobrazeny. Odhady byly spočteny pro 1000 nasimulovaných řad, vlevo o 200 a vpravo o 500 pozorováních. . . . .	65
3.2	Podíl $\hat{\omega}_n^4/\hat{\alpha}_{4n}$ v modelu $RCA(1)$ s normálně rozdělenými chybami $\varepsilon_t$ i $B_t$ . Extrémní hodnoty nejsou zobrazeny. Odhady byly spočteny pro 1000 nasimulovaných řad, vlevo o 200 a vpravo o 500 pozorováních. . . . .	65
3.3	Hodnota výrazu $\hat{\beta}_n^2 + \hat{\omega}_n^2$ v modelu $RCA(1)$ s normálně rozdělenými chybami $\varepsilon_t$ i $B_t$ . Odhady byly spočteny pro 1000 nasimulovaných řad, vlevo o 200 a vpravo o 500 pozorováních. . . . .	67
3.4	Hodnota výrazu $\hat{\beta}_n^4 + 6\hat{\beta}_n^2\hat{\omega}_n^2 + \hat{\alpha}_{4n}$ v modelu $RCA(1)$ s normálně rozdělenými chybami $\varepsilon_t$ i $B_t$ . Odhady byly spočteny pro 1000 nasimulovaných řad, vlevo o 200 a vpravo o 500 pozorováních. . . . .	67
3.5	Aproximace rozdělení statistiky $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ pro proces $RCA(1)$ , sada parametrů p2, $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ , $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce $n = 200$ , vpravo $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . . . .	74
3.6	Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace $M(n)$ a $m(n)$ . Hodnoty $M(n)$ reprezentuje konstanta $k$ na ose $x$ , hodnoty $m(n)$ představují jednotlivé barvy. $n = 200$ , $B = 1000$ , $T = 1000$ , $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ , $\varepsilon_t \sim DEx\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$ . Plnou čarou je naznačena hladina $1 - \alpha = 0,9$ , čárkovaně pokrytí intervalového odhadu spočteného pomocí asymptotického normálního rozdělení metodou $AS_V$ , tečkovaně metodou $AS_P$ . . . . .	79
3.7	Závislost $\tilde{u}_t$ na $X_{t-1}^4$ v modelech $RCA(1)$ se sadami parametrů p1 – p3. Na obrázcích vlevo jsou znázorněny všechny hodnoty, na obrázcích vpravo je výřez bez odlehlých hodnot. . . . .	80
3.8	Aproximace rozdělení statistik $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$ (vlevo) a $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$ (vpravo) pro proces $RCA(2)$ , sada parametrů p2, $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ , $i = 1, 2$ , $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000, $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik $T_{1n}$ a $T_{2n}$ spočtené na základě stejné časové řady. . . . .	81
3.9	Aproximace rozdělení statistik $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$ (vlevo) a $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$ (vpravo) pro proces $RCA(2)$ , sada parametrů p5, $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ , $i = 1, 2$ , $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000, $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik $T_{1n}$ a $T_{2n}$ spočtené na základě stejné časové řady. . . . .	82

- 3.10 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p8,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 83
- 3.11 Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 200$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Plnou čarou je naznačena hladina  $1 - \alpha = 0,9$ , čárkovaně pokrytí intervalového odhadu spočteného pomocí asymptotického normálního rozdělení metodou  $AS_V$ , tečkovaně metodou  $AS_P$ . . . . . 120
- 3.12 Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 500$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  . . . . . 121
- 3.13 Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 200$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  122
- 3.14 Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 500$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  123
- 3.15 Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 200$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim DEx(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$ . . . . . 124
- 3.16 Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 500$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim DEx(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$  . . . . . 125
- 3.17 Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 200$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim DEx(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$ . Plnou čarou je naznačena hladina  $1 - \alpha = 0,9$ , čárkovaně pokrytí intervalového odhadu spočteného pomocí asymptotického normálního rozdělení metodou  $AS_V$ , tečkovaně metodou  $AS_P$ . . . . . 126

- 3.18 Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 500$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{DEx}\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$ . Plnou čarou je naznačena hladina  $1 - \alpha = 0,9$ , čárkově pokrytí intervalového odhadu spočteného pomocí asymptotického normálního rozdělení metodou  $AS_V$ , tečkovaně metodou  $AS_P$ . . . . . 127
- 3.19 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p1,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . . . . 128
- 3.20 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p3,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . . . . 129
- 3.21 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p4,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . . . . 130
- 3.22 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p5,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . . . . 131
- 3.23 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p6,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . . . . 132
- 3.24 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p1,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . . . . 133
- 3.25 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p2,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . . . . 134

- 3.26 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p3,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . 135
- 3.27 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p4,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . 136
- 3.28 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p5,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . 137
- 3.29 Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p6,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. . 138
- 3.30 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p1,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 139
- 3.31 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p1,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 140
- 3.32 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p2,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 141

- 3.33 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p3,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 142
- 3.34 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p3,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 143
- 3.35 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p4,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 144
- 3.36 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p4,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 145
- 3.37 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p5,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 146
- 3.38 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p6,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 147

- 3.39 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p6,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 148
- 3.40 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p7,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 149
- 3.41 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p7,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 150
- 3.42 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p8,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 151
- 3.43 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p9,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 152
- 3.44 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p9,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 153



- 3.45 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p10,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 154
- 3.46 Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p10,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady. . . . . 155



# Seznam tabulek

3.1	Parametry procesu $RCA(1)$ . . . . .	61
3.2	Parametry modelu $RCA(2)$ . . . . .	70
3.3	Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr $\beta$ modelu $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. V posledním řádku je uveden poměr nasimulovaných řad, které bylo možné použít pro momentové metody (v procentech). . . . .	75
3.4	Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr $\beta$ modelu $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. . . . .	75
3.5	Porovnání vlastností odhadu $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta))$ u procesu $RCA(1)$ . . . . .	76
3.6	Porovnání vlastností odhadů $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$ a $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$ u procesu $RCA(2)$ . . . . .	77
3.7	Porovnání vlastností odhadů $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$ a $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$ u procesu $RCA(2)$ . . . . .	78
3.8	Porovnání vlastností odhadu $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta))$ u procesu $RCA(1)$ . . . . .	108
3.9	Porovnání vlastností odhadu $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta))$ u procesu $RCA(1)$ . . . . .	108
3.10	Porovnání vlastností odhadu $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta))$ u procesu $RCA(1)$ . . . . .	109
3.11	Porovnání vlastností odhadů $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$ a $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$ u procesu $RCA(2)$ . . . . .	110
3.12	Porovnání vlastností odhadů $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$ a $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$ u procesu $RCA(2)$ . . . . .	111
3.13	Porovnání vlastností odhadů $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$ a $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$ u procesu $RCA(2)$ . . . . .	112
3.14	Porovnání vlastností odhadů $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$ a $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$ u procesu $RCA(2)$ . . . . .	113
3.15	Porovnání vlastností odhadů $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$ a $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$ u procesu $RCA(2)$ . . . . .	114
3.16	Porovnání vlastností odhadů $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$ a $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$ u procesu $RCA(2)$ . . . . .	115
3.17	Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr $\beta$ modelu $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. V posledním řádku je uveden poměr nasimulovaných řad, které bylo možné použít pro momentové metody (v procentech). . . . .	116
3.18	Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr $\beta$ modelu $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. . . . .	116

3.19	Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr $\beta$ modelu $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. V posledním řádku je uveden poměr nasimulovaných řad, které bylo možné použít pro momentové metody (v procentech). .	117
3.20	Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr $\beta$ modelu $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. . . . .	117
3.21	Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr $\beta$ modelu $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. V posledním řádku je uveden poměr nasimulovaných řad, které bylo možné použít pro momentové metody (v procentech). .	118
3.22	Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr $\beta$ modelu $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. . . . .	118

# A. Přílohy

## A.1 Tabulky

$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 500, \quad B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$							
metoda		$(-0,1; 0,3; 0,8)^a$	$(0,1; 0,3; 0,8)$	$(0,1; 0,4; 0,8)$	$(0,5; 0,0; 8)$	$(0,5; 0,15; 0,8)$	$(0,1; 0,3; 1)$
	$\widehat{\text{var}}_{MC} T_n$	1,800	1,760	2,253	0,772	1,123	1,730
$WB_{reg}$	SD	0,583	0,499	0,795	0,086	0,273	0,908
	bias	-0,013	-0,057	-0,187	0,000	-0,016	-0,010
	MSE	0,340	0,252	0,667	0,007	0,075	0,825
$WB_{rek}$	SD	0,425	0,374	0,570	0,073	0,142	0,508
	bias	-0,116	-0,167	-0,370	-0,004	-0,211	-0,134
	MSE	0,194	0,168	0,461	0,005	0,065	0,276
$RB_{KF}$	SD	0,905	1,005	1,427	0,149	0,383	0,936
	bias	0,389	0,385	0,569	0,240	0,338	0,606
	MSE	0,970	1,158	2,359	0,080	0,260	1,242
$RB$	SD	0,046	0,044	0,048	0,051	0,060	0,046
	bias	-0,740	-0,804	-1,335	0,006	-0,394	-0,784
	MSE	0,550	0,648	1,785	0,003	0,159	0,616
$AS_V$	SD	0,575	0,499	0,791	0,079	0,269	0,893
	bias	-0,014	-0,057	-0,186	0,002	-0,018	-0,013
	MSE	0,331	0,252	0,660	0,006	0,073	0,797
$AS_P$	SD	0,608	0,485	0,835	0,080	0,600	1,009
	bias	-0,014	-0,061	-0,180	0,002	0,008	-0,015
	MSE	0,369	0,239	0,730	0,006	0,360	1,017

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta; \omega^2; \sigma^2)$ .

Tabulka 3.8: Porovnání vlastností odhadu  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta))$  u procesu  $RCA(1)$ .

$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 200, \quad B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$							
metoda		$(-0,1; 0,3; 0,8)^a$	$(0,1; 0,3; 0,8)$	$(0,1; 0,4; 0,8)$	$(0,5; 0,0; 8)$	$(0,5; 0,15; 0,8)$	$(0,1; 0,3; 1)$
	$\widehat{\text{var}}_{MC} T_n$	1,680	1,572	1,892	0,735	1,114	1,596
$WB_{reg}$	SD	0,366	0,330	0,553	0,122	0,316	0,369
	bias	-0,109	0,007	-0,064	-0,034	0,017	-0,084
	MSE	0,146	0,109	0,310	0,016	0,100	0,143
$WB_{rek}$	SD	0,285	0,255	0,388	0,098	0,167	0,277
	bias	-0,235	-0,113	-0,262	-0,042	-0,171	-0,212
	MSE	0,137	0,078	0,219	0,011	0,057	0,122
$RB_{KF}$	SD	0,613	0,546	0,844	0,181	0,324	0,592
	bias	0,174	0,272	0,362	0,203	0,265	0,374
	MSE	0,406	0,372	0,843	0,074	0,175	0,490
$RB$	SD	0,048	0,047	0,054	0,068	0,074	0,047
	bias	-0,689	-0,558	-0,939	-0,025	-0,320	-0,670
	MSE	0,477	0,314	0,884	0,005	0,108	0,451
$AS_V$	SD	0,361	0,327	0,551	0,118	0,310	0,358
	bias	-0,110	0,009	-0,064	-0,035	0,016	-0,085
	MSE	0,142	0,107	0,308	0,015	0,096	0,136
$AS_P$	SD	0,389	0,343	0,707	0,121	0,865	2,540
	bias	-0,110	0,014	-0,067	-0,034	0,060	0,001
	MSE	0,163	0,118	0,503	0,016	0,751	6,444

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta; \omega^2; \sigma^2)$ .

Tabulka 3.9: Porovnání vlastností odhadu  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta))$  u procesu  $RCA(1)$ .

$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 500, \quad B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$							
metoda		$(-0,1; 0,3; 0,8)^a$	$(0,1; 0,3; 0,8)$	$(0,1; 0,4; 0,8)$	$(0,5; 0; 0,8)$	$(0,5; 0,15; 0,8)$	$(0,1; 0,3; 1)$
	$\widehat{\text{var}}_{MC} T_n$	1,638	1,609	1,977	0,722	1,076	1,623
$WB_{reg}$	SD	0,278	0,277	0,409	0,085	0,253	0,274
	bias	-0,008	-0,003	-0,067	0,000	-0,003	0,003
	MSE	0,077	0,077	0,172	0,007	0,064	0,075
$WB_{rek}$	SD	0,235	0,236	0,339	0,071	0,127	0,227
	bias	-0,078	-0,082	-0,184	-0,006	-0,202	-0,077
	MSE	0,061	0,062	0,148	0,005	0,057	0,057
$RB_{KF}$	SD	0,615	0,584	0,788	0,154	0,340	0,565
	bias	0,363	0,362	0,512	0,234	0,354	0,541
	MSE	0,510	0,471	0,882	0,078	0,240	0,611
$RB$	SD	0,046	0,046	0,048	0,050	0,055	0,046
	bias	-0,634	-0,643	-1,004	0,002	-0,386	-0,648
	MSE	0,404	0,416	1,010	0,002	0,152	0,422
$AS_V$	SD	0,265	0,265	0,400	0,078	0,244	0,266
	bias	-0,009	-0,004	-0,065	0,000	-0,003	0,002
	MSE	0,070	0,070	0,164	0,006	0,059	0,070
$AS_P$	SD	0,273	0,269	1,485	0,078	0,506	0,280
	bias	-0,006	-0,001	-0,110	0,000	0,008	0,005
	MSE	0,074	0,072	2,216	0,006	0,255	0,078

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta; \omega^2; \sigma^2)$ .

Tabulka 3.10: Porovnání vlastností odhadu  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta))$  u procesu  $RCA(1)$ .

		$(\beta_1, \beta_2)$	$(0,5, 0,2)$	$(0,5, 0,2)$	$(0,5, 0,2)$	$(0,5, -0,2)$	$(0,5, -0,2)$
		$(\omega_1^2, \omega_2^2)$	$(0,25, 0,25)$	$(0,1, 0,1)$	$(0, 0)$	$(0,25, 0,25)$	$(0,5, 0,5)$
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{1n}$	4,744	1,375	0,960	2,650	13,615
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{2n}$	5,487	1,456	0,952	2,650	12,025
<i>WB<sub>reg</sub></i>	SD	$T_{1n}$	6,457	0,664	0,092	1,993	10,105
		$T_{2n}$	5,105	0,592	0,096	2,254	9,648
	bias	$T_{1n}$	0,902	0,048	-0,030	-0,034	-1,655
		$T_{2n}$	-0,486	0,010	-0,016	-0,002	-0,771
	MSE	$T_{1n}$	42,470	0,443	0,009	3,968	104,741
		$T_{2n}$	26,275	0,350	0,009	5,077	93,592
<i>WB<sub>rek</sub></i>	SD	$T_{1n}$	4,465	0,485	0,088	1,360	7,072
		$T_{2n}$	3,213	0,382	0,068	1,126	5,642
	bias	$T_{1n}$	-0,259	-0,036	-0,033	-0,342	-4,219
		$T_{2n}$	-1,631	-0,102	-0,024	-0,454	-3,816
	MSE	$T_{1n}$	19,982	0,237	0,009	1,966	67,766
		$T_{2n}$	12,975	0,156	0,005	1,474	46,360
<i>RB</i>	SD	$T_{1n}$	0,067	0,046	0,045	0,053	0,100
		$T_{2n}$	0,064	0,047	0,046	0,052	0,095
	bias	$T_{1n}$	-3,576	-0,413	-0,017	-1,597	-12,852
		$T_{2n}$	-4,358	-0,435	-0,007	-1,605	-11,299
	MSE	$T_{1n}$	12,790	0,173	0,002	2,554	165,188
		$T_{2n}$	18,999	0,191	0,002	2,579	127,682
<i>AS</i>	SD	$T_{1n}$	7,407	0,768	0,057	1,849	10,166
		$T_{2n}$	6,158	0,651	0,056	2,076	9,693
	bias	$T_{1n}$	1,350	0,067	-0,027	-0,052	-1,877
		$T_{2n}$	-0,027	0,030	-0,014	-0,019	-0,936
	MSE	$T_{1n}$	56,625	0,594	0,004	3,417	106,771
		$T_{2n}$	37,879	0,424	0,003	4,307	94,729

Tabulka 3.11: Porovnání vlastností odhadů  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$  a  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$  u procesu  $RCA(2)$ .



$\mathcal{X}_t = (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad n = 500,$ $B_1(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_1^2), \quad B_2(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_2^2), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = 0,8$							
			(0,5, -0,2)	(0,7, 0)	(0,7, 0)	(-0,5, -0,2)	(-0,5, -0,2)
			(0, 0)	(0,25, 0,25)	(0,1, 0,1)	(0,25, 0,25)	(0,1, 0,1)
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{1n}$	0,950	6,340	1,567	2,584	1,221
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{2n}$	0,972	7,470	1,589	2,634	1,214
<i>WB<sub>reg</sub></i>	SD	$T_{1n}$	0,096	7,229	0,788	2,885	0,212
		$T_{2n}$	0,093	6,242	0,982	2,240	0,209
	bias	$T_{1n}$	0,016	0,873	0,005	0,120	-0,004
		$T_{2n}$	0,026	-1,400	0,020	0,097	0,009
	MSE	$T_{1n}$	0,010	52,969	0,620	8,328	0,045
		$T_{2n}$	0,009	40,884	0,964	5,020	0,044
<i>WB<sub>rek</sub></i>	SD	$T_{1n}$	0,093	4,965	0,603	2,100	0,178
		$T_{2n}$	0,071	3,741	0,501	1,409	0,141
	bias	$T_{1n}$	0,010	-0,527	-0,080	-0,217	-0,044
		$T_{2n}$	0,018	-2,777	-0,136	-0,300	-0,045
	MSE	$T_{1n}$	0,009	24,903	0,369	4,452	0,034
		$T_{2n}$	0,005	21,687	0,269	2,074	0,022
<i>RB</i>	SD	$T_{1n}$	0,047	0,069	0,044	0,052	0,047
		$T_{2n}$	0,048	0,070	0,045	0,052	0,048
	bias	$T_{1n}$	0,023	-4,989	-0,585	-1,593	-0,257
		$T_{2n}$	0,031	-6,470	-0,575	-1,511	-0,247
	MSE	$T_{1n}$	0,003	24,895	0,344	2,541	0,068
		$T_{2n}$	0,003	41,864	0,332	2,285	0,064
<i>AS</i>	SD	$T_{1n}$	0,073	8,457	1,072	3,086	0,203
		$T_{2n}$	0,070	7,615	1,285	2,282	0,193
	bias	$T_{1n}$	0,016	1,363	0,040	0,156	-0,009
		$T_{2n}$	0,028	-0,908	0,053	0,132	0,006
	MSE	$T_{1n}$	0,006	73,306	1,150	9,539	0,041
		$T_{2n}$	0,006	58,760	1,652	5,218	0,037

Tabulka 3.12: Porovnání vlastností odhadů  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$  a  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$  u procesu *RCA*(2).

$\mathcal{X}_t = (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad n = 200,$ $B_1(t) \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega_1^2}, \sqrt{3\omega_1^2}\right]\right), \quad B_2(t) \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega_2^2}, \sqrt{3\omega_2^2}\right]\right), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = 0,8$							
			(0,5, 0,2)	(0,5, 0,2)	(0,5, 0,2)	(0,5, -0,2)	(0,5, -0,2)
			(0,25, 0,25)	(0,1, 0,1)	(0, 0)	(0,25, 0,25)	(0,5, 0,5)
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{1n}$	2,867	1,330	0,940	2,023	6,486
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{2n}$	3,239	1,352	0,930	1,967	6,189
<i>WB<sub>reg</sub></i>	SD	$T_{1n}$	2,756	0,470	0,137	0,979	4,364
		$T_{2n}$	2,033	0,453	0,131	1,081	4,127
	bias	$T_{1n}$	0,440	0,007	-0,049	-0,100	-0,547
		$T_{2n}$	-0,299	-0,037	-0,016	-0,115	-0,679
	MSE	$T_{1n}$	7,783	0,221	0,021	0,968	19,328
		$T_{2n}$	4,218	0,206	0,017	1,180	17,480
<i>WB<sub>rek</sub></i>	SD	$T_{1n}$	1,875	0,330	0,122	0,684	3,317
		$T_{2n}$	1,242	0,247	0,082	0,555	2,606
	bias	$T_{1n}$	-0,128	-0,071	-0,051	-0,336	-1,665
		$T_{2n}$	-0,834	-0,155	-0,033	-0,442	-2,011
	MSE	$T_{1n}$	3,530	0,114	0,017	0,581	13,767
		$T_{2n}$	2,237	0,085	0,008	0,503	10,826
<i>RB</i>	SD	$T_{1n}$	0,065	0,053	0,049	0,063	0,096
		$T_{2n}$	0,067	0,052	0,050	0,062	0,097
	bias	$T_{1n}$	-1,729	-0,322	-0,012	-1,080	-5,411
		$T_{2n}$	-2,093	-0,373	0,000	-1,098	-5,287
	MSE	$T_{1n}$	2,994	0,106	0,003	1,171	29,293
		$T_{2n}$	4,385	0,142	0,003	1,209	27,963
<i>AS</i>	SD	$T_{1n}$	3,048	0,518	0,094	1,048	5,129
		$T_{2n}$	2,606	0,638	0,090	1,086	8,431
	bias	$T_{1n}$	0,620	0,0300	-0,041	-0,089	-0,534
		$T_{2n}$	-0,088	-0,006	-0,007	-0,100	-0,260
	MSE	$T_{1n}$	9,665	0,269	0,011	1,105	26,571
		$T_{2n}$	6,792	0,407	0,008	1,189	71,081

Tabulka 3.13: Porovnání vlastností odhadů  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$  a  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$  u procesu *RCA*(2).

		$(\beta_1, \beta_2)$	(0,5, -0,2)	(0,7, 0)	(0,7, 0)	(-0,5, -0,2)	(-0,5, -0,2)
		$(\omega_1^2, \omega_2^2)$	(0, 0)	(0,25, 0,25)	(0,1, 0,1)	(0,25, 0,25)	(0,1, 0,1)
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{1n}$	0,990	3,272	1,412	1,888	1,166
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{2n}$	0,954	3,931	1,507	1,920	1,190
<i>WB<sub>reg</sub></i>	SD	$T_{1n}$	0,141	3,178	0,562	1,022	0,263
		$T_{2n}$	0,142	2,830	0,615	0,840	0,237
	bias	$T_{1n}$	-0,016	0,638	0,045	-0,039	-0,011
		$T_{2n}$	-0,009	-0,666	-0,093	-0,163	-0,012
	MSE	$T_{1n}$	0,020	10,494	0,318	1,044	0,069
		$T_{2n}$	0,020	8,445	0,387	0,732	0,056
<i>WB<sub>rek</sub></i>	SD	$T_{1n}$	0,129	2,225	0,516	0,694	0,208
		$T_{2n}$	0,096	1,788	0,460	0,516	0,160
	bias	$T_{1n}$	-0,029	-0,074	-0,034	-0,252	-0,057
		$T_{2n}$	-0,035	-1,393	-0,217	-0,437	-0,068
	MSE	$T_{1n}$	0,018	4,951	0,267	0,545	0,047
		$T_{2n}$	0,010	5,132	0,258	0,457	0,030
<i>RB</i>	SD	$T_{1n}$	0,052	0,068	0,048	0,063	0,054
		$T_{2n}$	0,051	0,068	0,048	0,061	0,053
	bias	$T_{1n}$	-0,002	-2,270	-0,371	-0,991	-0,225
		$T_{2n}$	0,001	-3,190	-0,512	-1,074	-0,212
	MSE	$T_{1n}$	0,003	5,156	0,140	0,986	0,054
		$T_{2n}$	0,003	10,178	0,264	1,157	0,048
<i>AS</i>	SD	$T_{1n}$	0,114	3,670	0,879	1,050	0,246
		$T_{2n}$	0,114	4,343	1,017	0,838	0,227
	bias	$T_{1n}$	-0,018	0,895	0,092	-0,041	-0,004
		$T_{2n}$	-0,012	-0,314	-0,042	-0,162	-0,008
	MSE	$T_{1n}$	0,013	14,256	0,781	1,102	0,061
		$T_{2n}$	0,013	18,941	1,036	0,727	0,052

Tabulka 3.14: Porovnání vlastností odhadů  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$  a  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$  u procesu *RCA*(2).

$\mathcal{X}_t = (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad n = 500,$ $B_1(t) \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega_1^2}, \sqrt{3\omega_1^2}\right]\right), \quad B_2(t) \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega_2^2}, \sqrt{3\omega_2^2}\right]\right), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = 0,8$							
			(0,5,0,2)	(0,5,0,2)	(0,5,0,2)	(0,5,-0,2)	(0,5,-0,2)
			(0,25,0,25)	(0,1,0,1)	(0,0)	(0,25,0,25)	(0,5,0,5)
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{1n}$	4,380	1,403	0,997	2,298	13,452
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{2n}$	5,347	1,441	0,958	2,382	13,044
<i>WB<sub>reg</sub></i>	SD	$T_{1n}$	6,348	0,622	0,097	2,149	9,572
		$T_{2n}$	5,043	0,542	0,097	1,284	8,655
	bias	$T_{1n}$	0,866	0,059	-0,006	-0,087	-0,414
		$T_{2n}$	-0,490	0,044	0,009	-0,069	-0,302
	MSE	$T_{1n}$	41,008	0,390	0,010	4,621	91,695
		$T_{2n}$	25,643	0,296	0,010	1,651	74,917
<i>WB<sub>rek</sub></i>	SD	$T_{1n}$	4,060	0,437	0,091	1,388	6,884
		$T_{2n}$	2,874	0,332	0,065	0,980	5,484
	bias	$T_{1n}$	-0,330	-0,021	-0,005	-0,348	-2,809
		$T_{2n}$	-1,660	-0,080	0,002	-0,381	-3,201
	MSE	$T_{1n}$	16,572	0,191	0,008	2,047	55,235
		$T_{2n}$	11,009	0,116	0,004	1,104	40,287
<i>RB</i>	SD	$T_{1n}$	0,064	0,048	0,047	0,053	0,097
		$T_{2n}$	0,061	0,047	0,045	0,052	0,093
	bias	$T_{1n}$	-3,572	-0,391	0,004	-1,525	-11,776
		$T_{2n}$	-4,319	-0,412	0,011	-1,425	-11,028
	MSE	$T_{1n}$	12,764	0,155	0,002	2,330	138,681
		$T_{2n}$	18,659	0,172	0,002	2,033	121,635
<i>AS</i>	SD	$T_{1n}$	6,671	0,698	0,059	2,266	10,163
		$T_{2n}$	5,631	0,660	0,061	1,380	8,925
	bias	$T_{1n}$	1,057	0,076	-0,006	-0,087	-0,467
		$T_{2n}$	-0,311	0,062	0,009	-0,072	-0,389
	MSE	$T_{1n}$	45,577	0,493	0,003	5,136	103,400
		$T_{2n}$	31,776	0,440	0,004	1,907	79,727

Tabulka 3.15: Porovnání vlastností odhadů  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$  a  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$  u procesu *RCA(2)*.

$\mathcal{X}_t = (\beta_1 + B_1(t))\mathcal{X}_{t-1} + (\beta_2 + B_2(t))\mathcal{X}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad n = 500,$ $B_1(t) \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega_1^2}, \sqrt{3\omega_1^2}\right]\right), \quad B_2(t) \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega_2^2}, \sqrt{3\omega_2^2}\right]\right), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = 0,8$							
		$(\beta_1, \beta_2)$	(0,5, -0,2)	(0,7, 0)	(0,7, 0)	(-0,5, -0,2)	(-0,5, -0,2)
		$(\omega_1^2, \omega_2^2)$	(0, 0)	(0,25, 0,25)	(0,1, 0,1)	(0,25, 0,25)	(0,1, 0,1)
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{1n}$	0,956	5,559	1,506	2,362	1,224
		$\widehat{\text{var}}_{MC} T_{2n}$	0,938	7,372	1,623	2,458	1,210
<i>WB<sub>reg</sub></i>	SD	$T_{1n}$	0,098	7,127	0,805	1,600	0,178
		$T_{2n}$	0,095	6,131	0,726	1,226	0,180
	bias	$T_{1n}$	-0,002	1,468	0,091	-0,105	-0,018
		$T_{2n}$	0,003	-1,047	0,018	-0,280	0,000
	MSE	$T_{1n}$	0,010	52,902	0,656	2,569	0,032
		$T_{2n}$	0,009	38,646	0,528	1,579	0,032
<i>WB<sub>rek</sub></i>	SD	$T_{1n}$	0,091	4,762	0,576	1,189	0,158
		$T_{2n}$	0,071	3,584	0,487	0,914	0,126
	bias	$T_{1n}$	-0,008	0,084	0,004	-0,331	-0,052
		$T_{2n}$	-0,006	-2,615	-0,114	-0,543	-0,052
	MSE	$T_{1n}$	0,008	22,665	0,331	1,522	0,028
		$T_{2n}$	0,005	19,669	0,250	1,129	0,019
<i>RB</i>	SD	$T_{1n}$	0,048	0,058	0,047	0,054	0,050
		$T_{2n}$	0,046	0,057	0,046	0,054	0,049
	bias	$T_{1n}$	0,002	-4,528	-0,504	-1,434	-0,249
		$T_{2n}$	-0,001	-6,451	-0,548	-1,530	-0,248
	MSE	$T_{1n}$	0,002	20,502	0,256	2,059	0,064
		$T_{2n}$	0,002	41,622	0,303	2,345	0,064
<i>AS</i>	SD	$T_{1n}$	0,076	7,686	0,968	1,794	0,174
		$T_{2n}$	0,074	6,951	1,007	1,368	0,167
	bias	$T_{1n}$	-0,001	1,907	0,134	-0,072	-0,017
		$T_{2n}$	0,003	-0,587	0,066	-0,239	-0,001
	MSE	$T_{1n}$	0,006	62,652	0,953	3,222	0,030
		$T_{2n}$	0,006	48,613	1,018	1,926	0,028

Tabulka 3.16: Porovnání vlastností odhadů  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1))$  a  $\text{var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2))$  u procesu *RCA(2)*.

$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 500, \quad B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$							
metoda	$1 - \alpha$	$(-0,1; 0,3; 0,8)^a$	$(0,1, 0,3, 0,8)$	$(0,1, 0,4, 0,8)$	$(0,5, 0,0,8)$	$(0,5, 0,15, 0,8)$	$(0,1, 0,3, 1)$
$RB_{KF}$	0,9	0,927	0,929	0,923	0,946	0,934	0,929
	0,95	0,968	0,969	0,969	0,976	0,972	0,970
	0,99	0,990	0,994	0,989	0,992	0,996	0,994
$RMB_{KF}$	0,9	0,888	0,898	0,863	0,912	0,906	0,890
	0,95	0,939	0,943	0,925	0,956	0,951	0,938
	0,99	0,985	0,986	0,974	0,987	0,985	0,982
$MB_{KF}$	0,9	0,898	0,909	0,894	0,911	0,910	0,903
	0,95	0,950	0,953	0,953	0,956	0,954	0,944
	0,99	0,987	0,989	0,989	0,988	0,988	0,987
as1	0,9	0,907	0,916	0,914	0,918	0,908	0,911
	0,95	0,960	0,959	0,961	0,957	0,955	0,955
	0,99	0,986	0,992	0,990	0,992	0,993	0,991
as2	0,9	0,907	0,912	0,907	0,917	0,915	0,913
	0,95	0,959	0,956	0,959	0,956	0,954	0,951
	0,99	0,987	0,991	0,991	0,992	0,990	0,988
%		40	42	39	12	29	41

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta; \omega^2; \sigma^2)$ .

Tabulka 3.17: Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr  $\beta$  modelu  $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. V posledním řádku je uveden poměr nasimulovaných řad, které bylo možné použít pro momentové metody (v procentech).

$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 500, \quad B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$							
metoda	$1 - \alpha$	$(-0,1; 0,3; 0,8)^a$	$(0,1; 0,3; 0,8)$	$(0,1; 0,4; 0,8)$	$(0,5; 0; 0,8)$	$(0,5; 0,15; 0,8)$	$(0,1; 0,3; 1)$
$RB_{KF}$	0,9	0,907	0,907	0,890	0,933	0,921	0,926
	0,95	0,953	0,958	0,951	0,971	0,963	0,964
	0,99	0,985	0,992	0,981	0,995	0,994	0,992
as1	0,9	0,883	0,895	0,882	0,909	0,889	0,900
	0,95	0,941	0,953	0,933	0,952	0,942	0,950
	0,99	0,983	0,990	0,981	0,989	0,987	0,984
as2	0,9	0,882	0,896	0,876	0,909	0,892	0,898
	0,95	0,941	0,951	0,931	0,951	0,939	0,945
	0,99	0,982	0,990	0,977	0,989	0,985	0,981

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta; \omega^2; \sigma^2)$ .

Tabulka 3.18: Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr  $\beta$  modelu  $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů.

$$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 200, \quad B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

metoda	$1 - \alpha$	$(-0,1; 0,3; 0,8)^a$	$(0,1; 0,3; 0,8)$	$(0,1; 0,4; 0,8)$	$(0,5; 0; 0,8)$	$(0,5; 0,15; 0,8)$	$(0,1; 0,3; 1)$
$RB_{KF}$	0,9	0,928	0,922	0,920	0,925	0,921	0,944
	0,95	0,963	0,957	0,969	0,970	0,963	0,976
	0,99	0,995	0,988	0,994	0,991	0,991	0,994
$RMB_{KF}$	0,9	0,909	0,894	0,899	0,893	0,887	0,908
	0,95	0,954	0,943	0,947	0,944	0,950	0,959
	0,99	0,990	0,983	0,986	0,985	0,987	0,991
$MB_{KF}$	0,9	0,909	0,899	0,907	0,895	0,882	0,912
	0,95	0,956	0,944	0,948	0,944	0,947	0,953
	0,99	0,991	0,978	0,987	0,984	0,987	0,990
as1	0,9	0,923	0,915	0,921	0,907	0,897	0,931
	0,95	0,966	0,954	0,958	0,958	0,949	0,967
	0,99	0,994	0,988	0,990	0,992	0,994	0,994
as2	0,9	0,923	0,918	0,926	0,912	0,906	0,932
	0,95	0,968	0,955	0,964	0,960	0,952	0,966
	0,99	0,993	0,987	0,994	0,992	0,989	0,994
%		27	26	26	9	19	28

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta; \omega^2; \sigma^2)$ .

Tabulka 3.19: Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr  $\beta$  modelu  $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. V posledním řádku je uveden poměr nasimulovaných řad, které bylo možné použít pro momentové metody (v procentech).

$$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 200, \quad B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

metoda	$1 - \alpha$	$(-0,1; 0,3; 0,8)^a$	$(0,1; 0,3; 0,8)$	$(0,1; 0,4; 0,8)$	$(0,5; 0; 0,8)$	$(0,5; 0,15; 0,8)$	$(0,1; 0,3; 1)$
$RB_{KF}$	0,9	0,904	0,900	0,905	0,920	0,912	0,914
	0,95	0,946	0,943	0,946	0,967	0,953	0,955
	0,99	0,985	0,987	0,985	0,997	0,983	0,990
as1	0,9	0,890	0,894	0,885	0,883	0,886	0,890
	0,95	0,941	0,942	0,936	0,952	0,940	0,935
	0,99	0,981	0,986	0,987	0,994	0,982	0,984
as2	0,9	0,892	0,893	0,885	0,884	0,882	0,887
	0,95	0,941	0,940	0,935	0,951	0,936	0,936
	0,99	0,983	0,988	0,985	0,994	0,975	0,984

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta; \omega^2; \sigma^2)$ .

Tabulka 3.20: Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr  $\beta$  modelu  $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů.

$$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 500, \quad B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

metoda	$1 - \alpha$	$(-0,1; 0,3; 0,8)^a$	$(0,1, 0,3, 0,8)$	$(0,1, 0,4, 0,8)$	$(0,5, 0,0,8)$	$(0,5, 0,15, 0,8)$	$(0,1, 0,3, 1)$
$RB_{KF}$	0,9	0,911	0,915	0,938	0,952	0,942	0,929
	0,95	0,957	0,952	0,969	0,980	0,973	0,976
	0,99	0,994	0,990	0,992	0,999	0,998	0,998
$RMB_{KF}$	0,9	0,871	0,887	0,902	0,906	0,915	0,899
	0,95	0,932	0,937	0,945	0,956	0,959	0,947
	0,99	0,986	0,980	0,984	0,993	0,992	0,990
$MB_{KF}$	0,9	0,875	0,887	0,904	0,907	0,915	0,897
	0,95	0,937	0,938	0,953	0,956	0,955	0,947
	0,99	0,986	0,981	0,987	0,992	0,991	0,987
as1	0,9	0,887	0,898	0,915	0,911	0,915	0,905
	0,95	0,944	0,943	0,964	0,960	0,957	0,953
	0,99	0,992	0,982	0,990	0,997	0,993	0,992
as2	0,9	0,888	0,898	0,920	0,910	0,925	0,905
	0,95	0,942	0,943	0,965	0,960	0,957	0,953
	0,99	0,992	0,982	0,991	0,997	0,993	0,991
%		41	40	43	12	26	40

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta; \omega^2; \sigma^2)$ .

Tabulka 3.21: Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr  $\beta$  modelu  $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů. V posledním řádku je uveden poměr nasimulovaných řad, které bylo možné použít pro momentové metody (v procentech).

$$\mathcal{X}_t = (\beta + B_t)\mathcal{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad n = 500, \quad B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

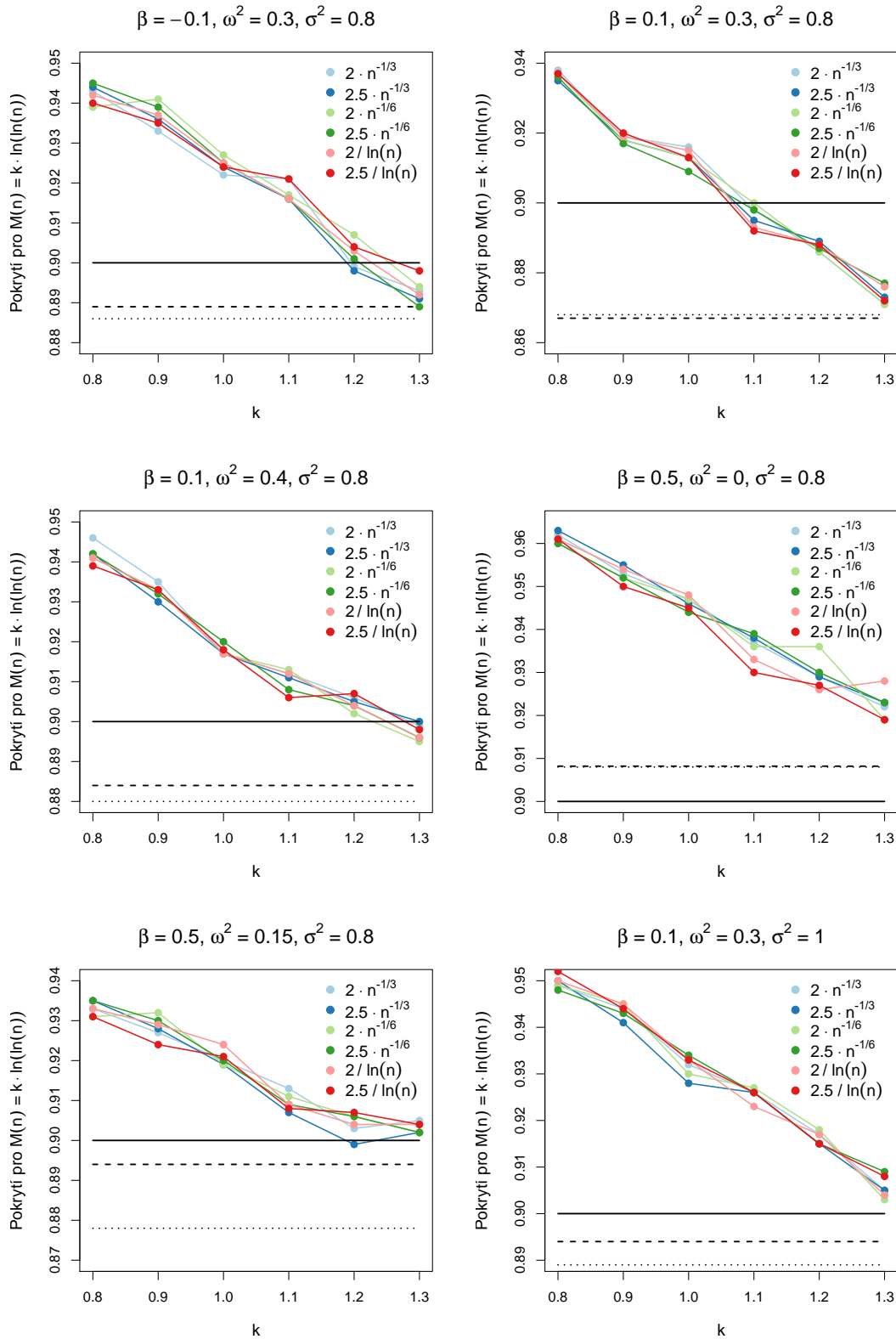
metoda	$1 - \alpha$	$(-0,1; 0,3; 0,8)^a$	$(0,1; 0,3; 0,8)$	$(0,1; 0,4; 0,8)$	$(0,5; 0; 0,8)$	$(0,5; 0,15; 0,8)$	$(0,1; 0,3; 1)$
$RB_{KF}$	0,9	0,912	0,914	0,908	0,937	0,932	0,933
	0,95	0,956	0,955	0,957	0,967	0,972	0,973
	0,99	0,989	0,989	0,992	0,993	0,993	0,998
as1	0,9	0,886	0,898	0,879	0,903	0,901	0,905
	0,95	0,942	0,947	0,936	0,944	0,948	0,943
	0,99	0,985	0,990	0,987	0,987	0,988	0,989
as2	0,9	0,884	0,899	0,876	0,903	0,901	0,905
	0,95	0,942	0,947	0,933	0,944	0,948	0,943
	0,99	0,985	0,988	0,983	0,987	0,988	0,990

Pozn: <sup>a</sup> Trojice parametrů  $(\beta; \omega^2; \sigma^2)$ .

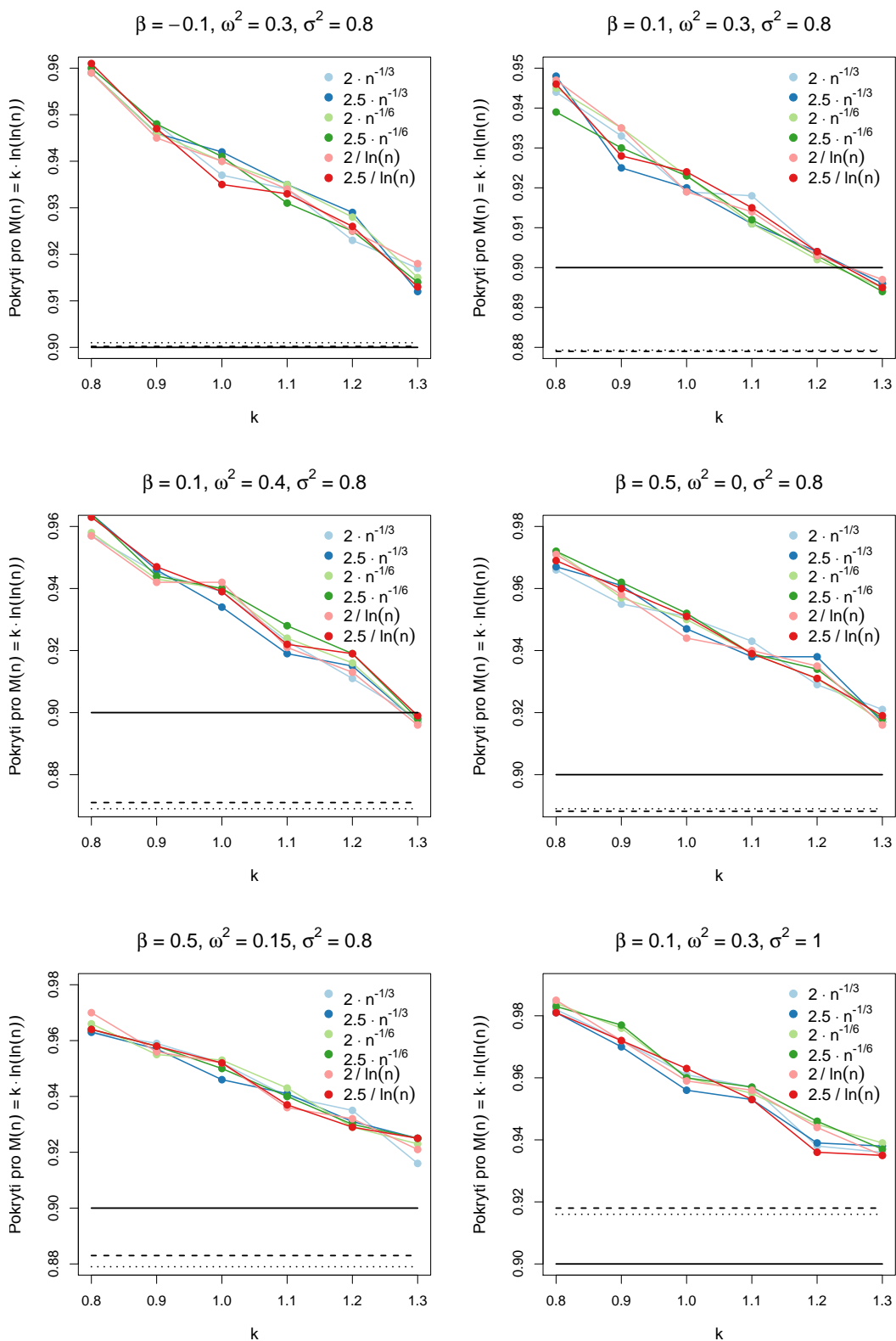
Tabulka 3.22: Pokrytí 90%, 95% a 99% intervalů spolehlivosti pro parametr  $\beta$  modelu  $RCA(1)$ . Intervaly spolehlivosti byly zkonstruovány pro 1000 řad, přičemž pro každou bylo vygenerováno 1000 bootstrapových výběrů.



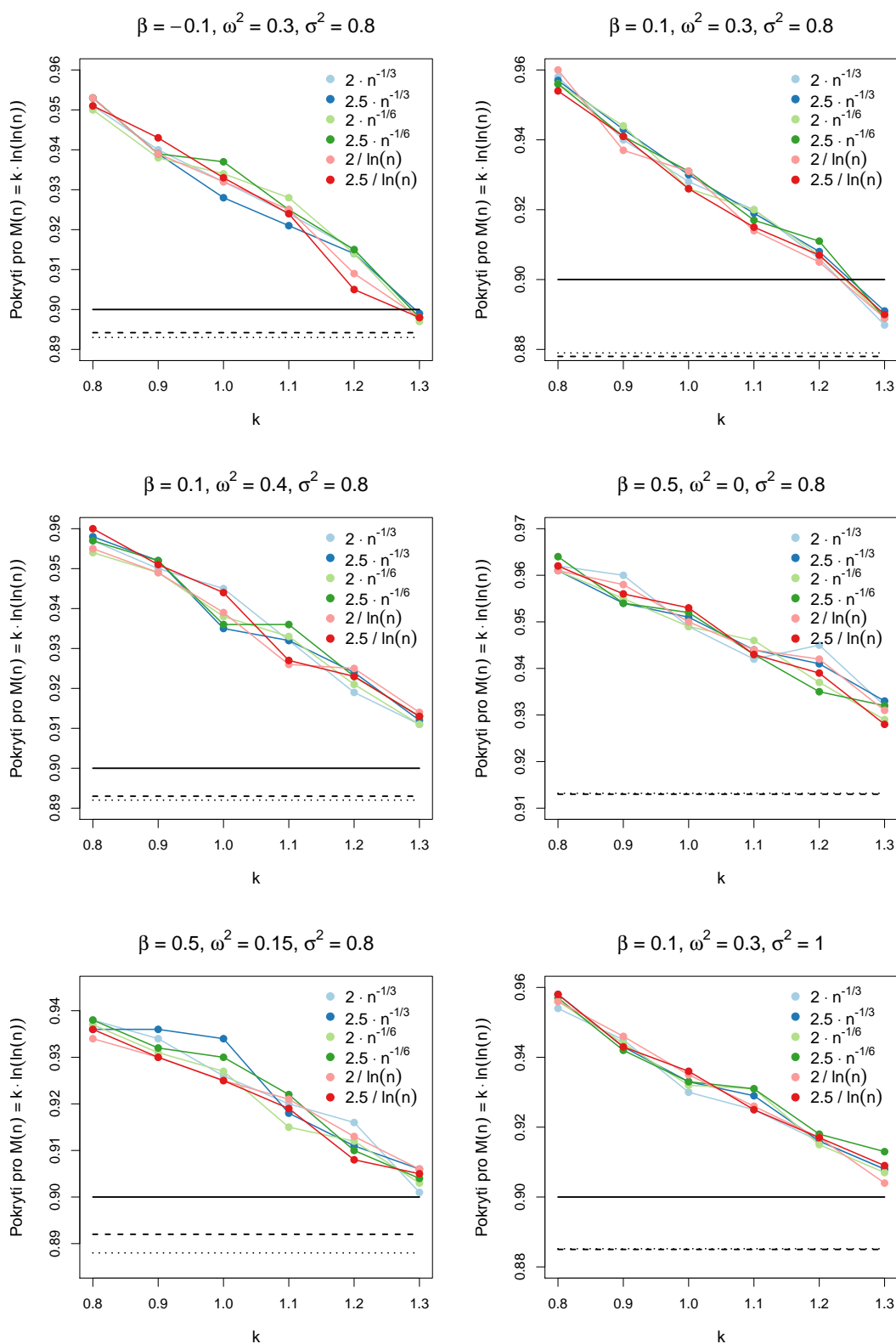
## A.2 Grafy



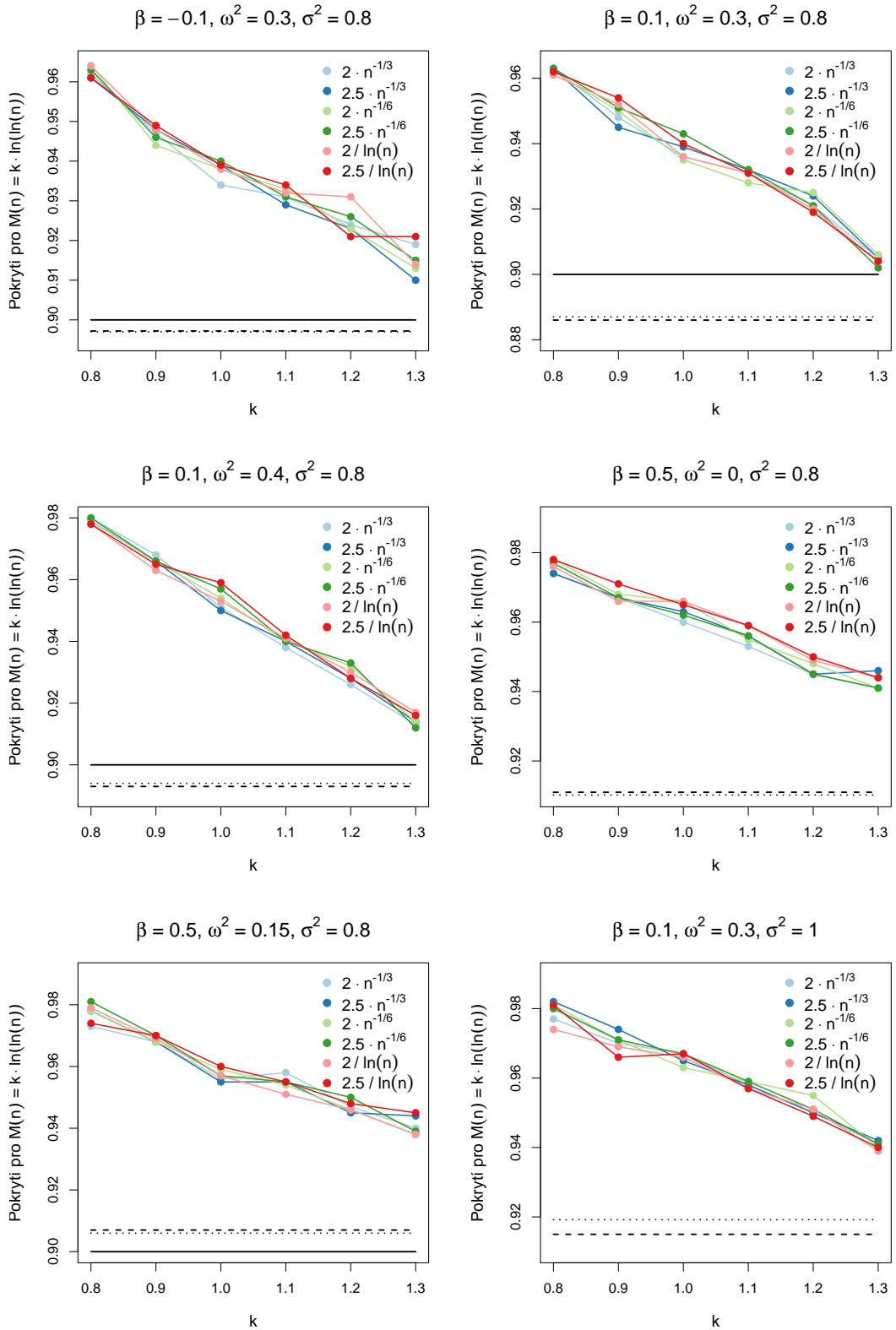
Obrázek 3.11: Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 200$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Plnou čarou je naznačena hladina  $1 - \alpha = 0,9$ , čárkovaně pokrytí intervalového odhadu spočteného pomocí asymptotického normálního rozdělení metodou  $AS_V$ , tečkovaně metodou  $AS_P$ .



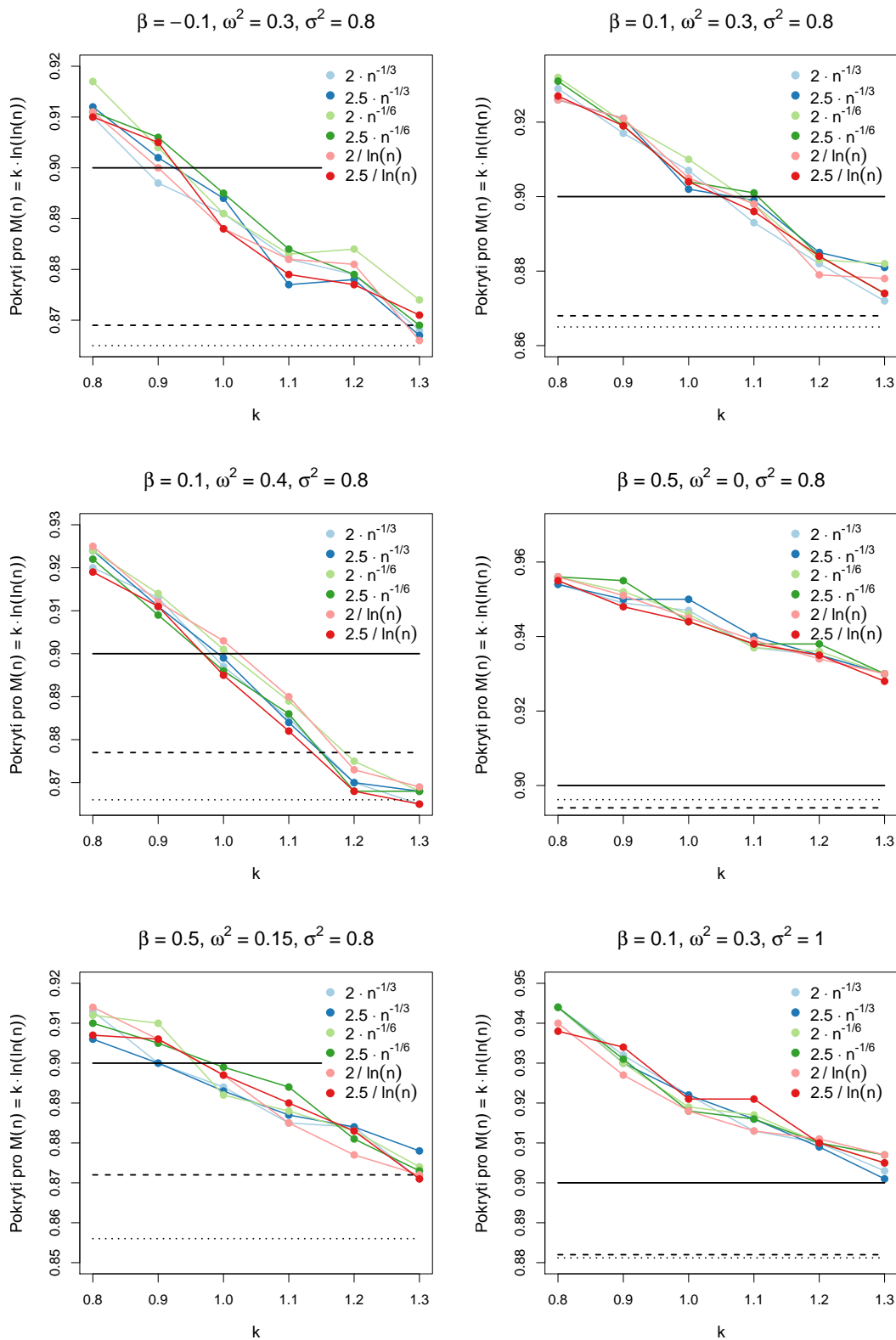
Obrázek 3.12: Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 500$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$



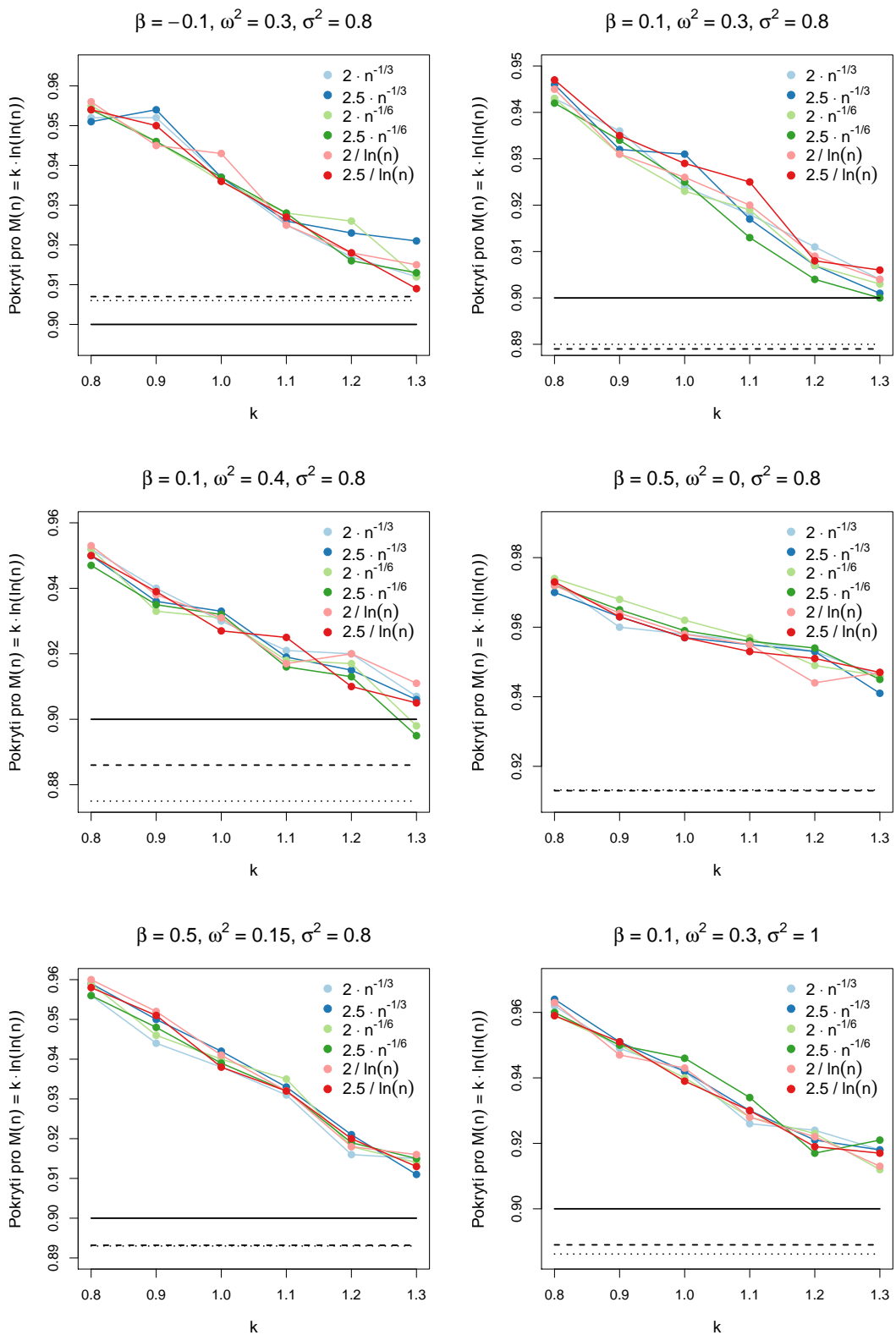
Obrázek 3.13: Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 200$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$



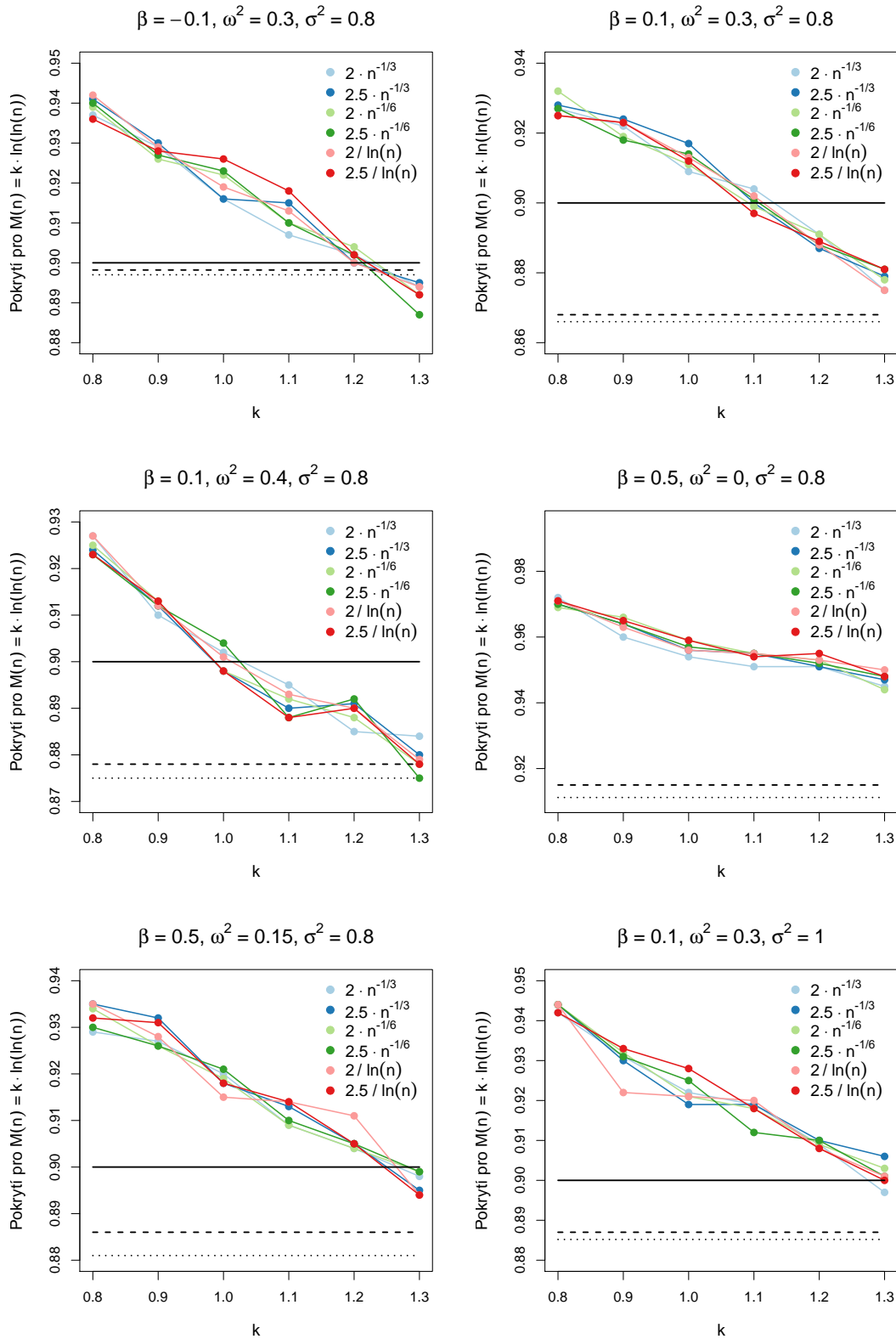
Obrázek 3.14: Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 500$ ,  $B_t \sim \mathcal{R} \left( \left[ -\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2} \right] \right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$



Obrázek 3.15: Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 200$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{DEx}(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$ .

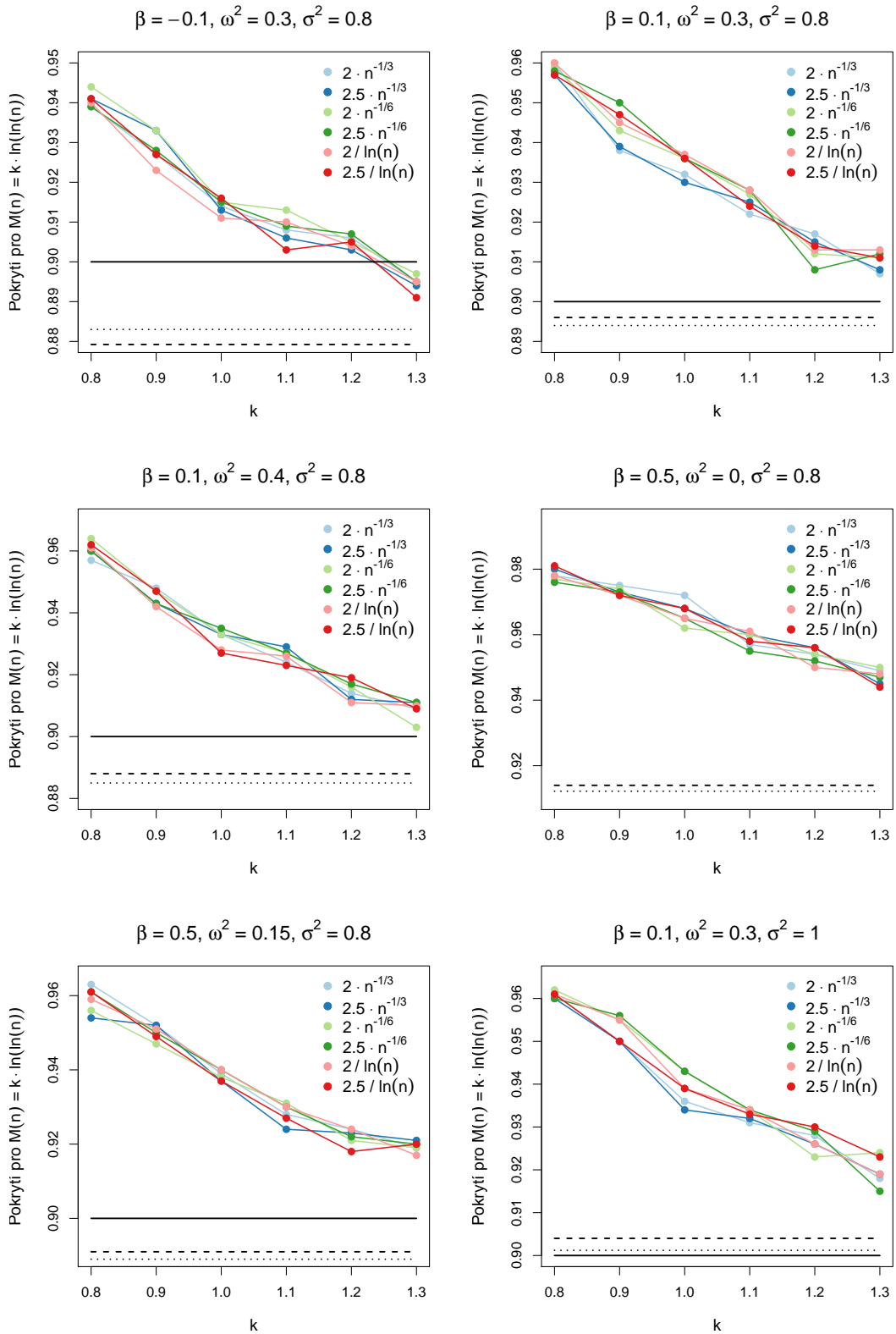


Obrázek 3.16: Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 500$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{DEx}(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$

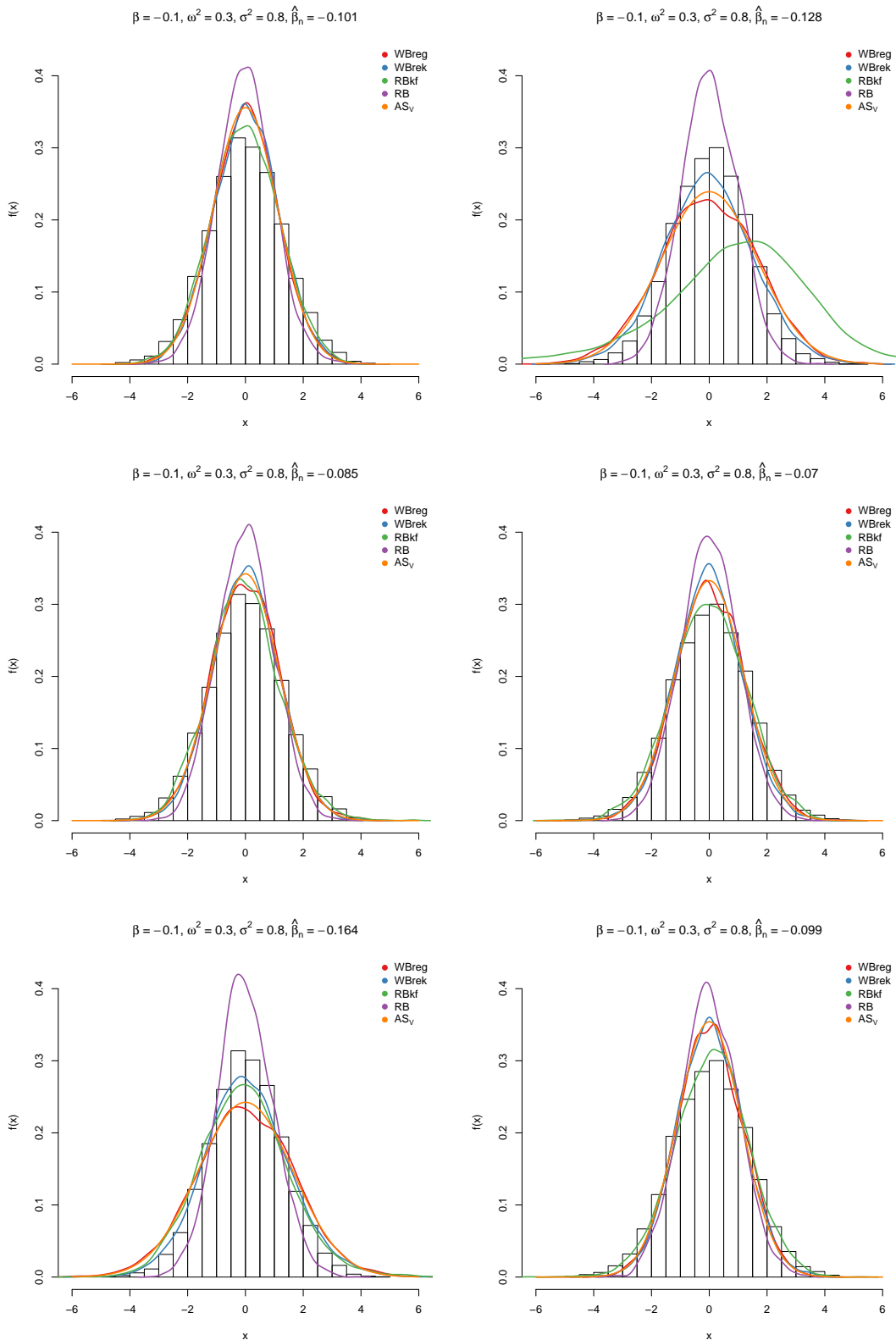


Obrázek 3.17: Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 200$ ,  $B_t \sim \mathcal{R} \left( \left[ -\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2} \right] \right)$ ,  $\varepsilon_t \sim DEx(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$ . Plnou čarou je naznačena hladina  $1 - \alpha = 0,9$ , čárkovaně pokrytí intervalového odhadu spočteného pomocí asymptotického normálního rozdělení metodou  $AS_V$ , tečkovaně metodou  $AS_P$ .

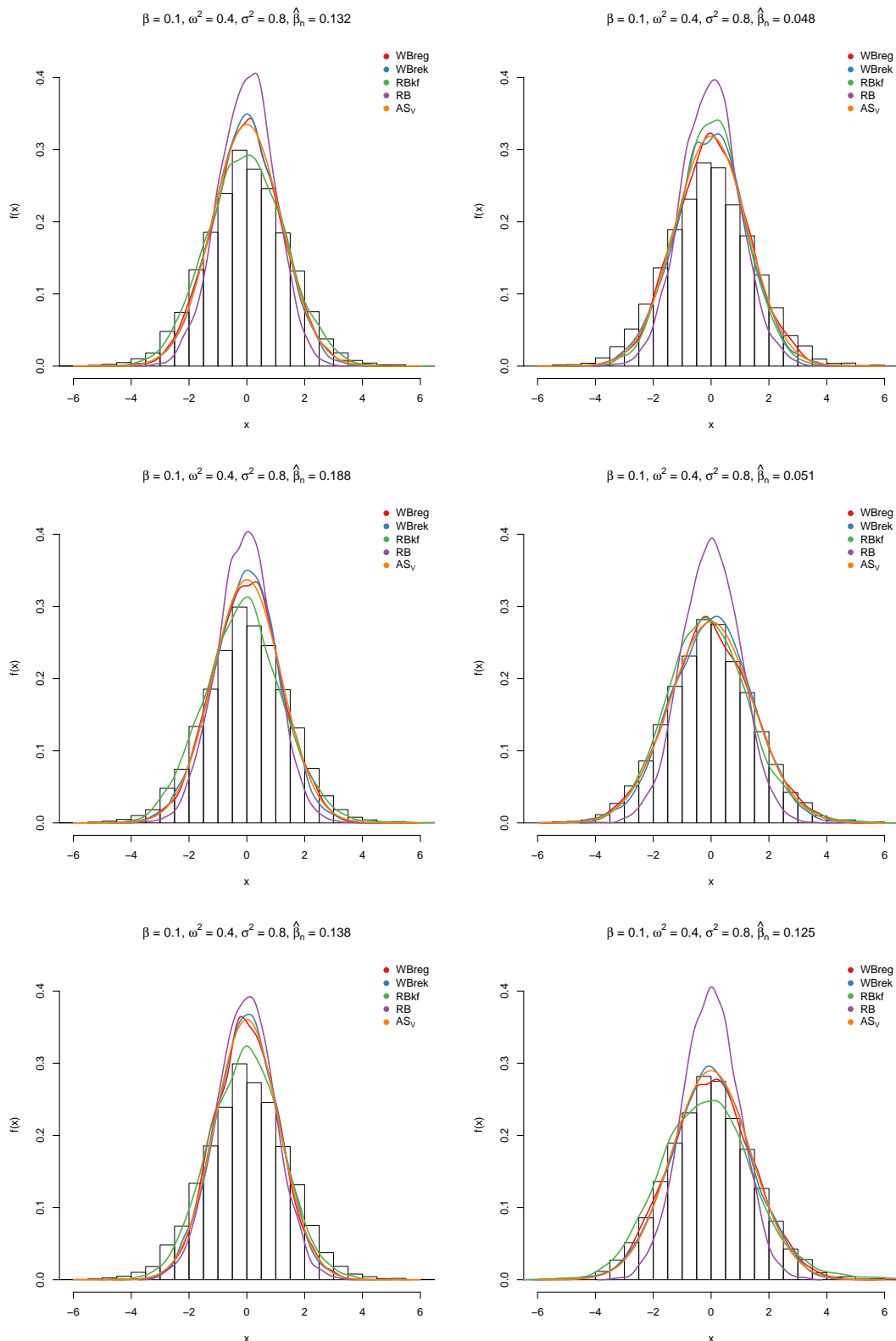




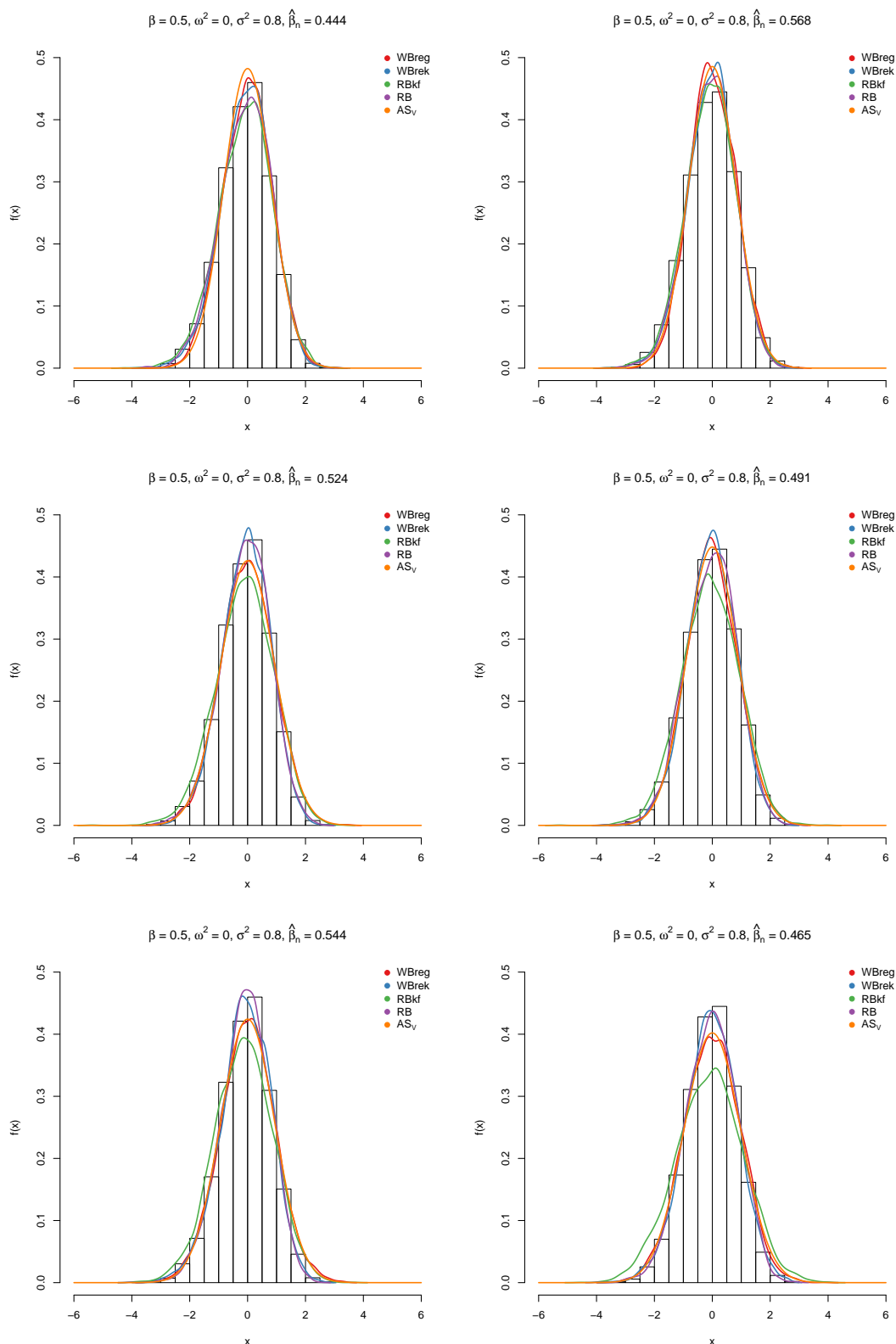
Obrázek 3.18: Pokrytí intervalů spolehlivosti spočtených metodou reziduálního KF bootstrapu pro různé kombinace  $M(n)$  a  $m(n)$ . Hodnoty  $M(n)$  reprezentuje konstanta  $k$  na ose  $x$ , hodnoty  $m(n)$  představují jednotlivé barvy.  $n = 500$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{DEx}(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$ . Plnou čarou je naznačena hladina  $1 - \alpha = 0,9$ , čárkovaně pokrytí intervalového odhadu spočteného pomocí asymptotického normálního rozdělení metodou  $AS_V$ , tečkovaně metodou  $AS_P$ .



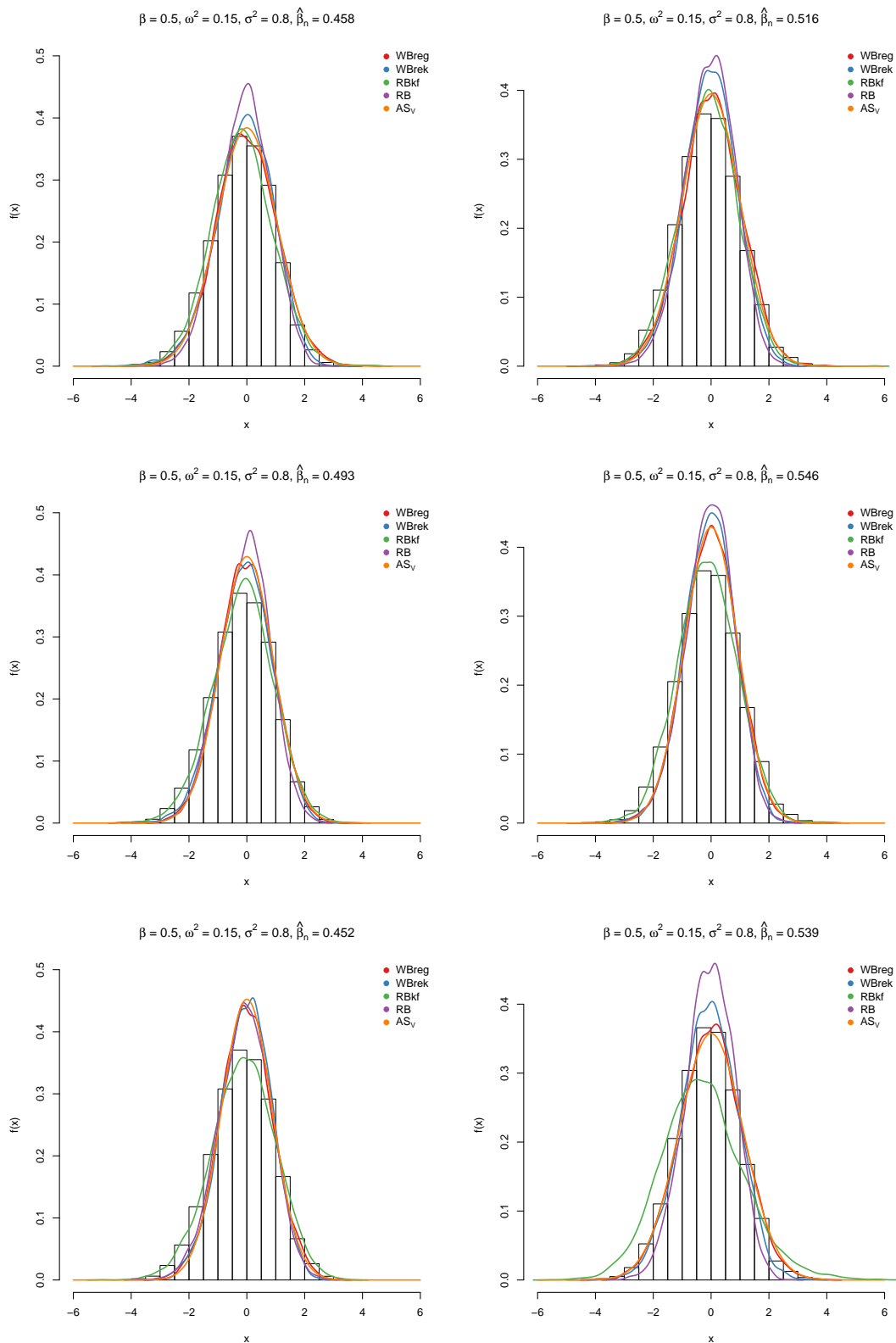
Obrázek 3.19: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p1$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.



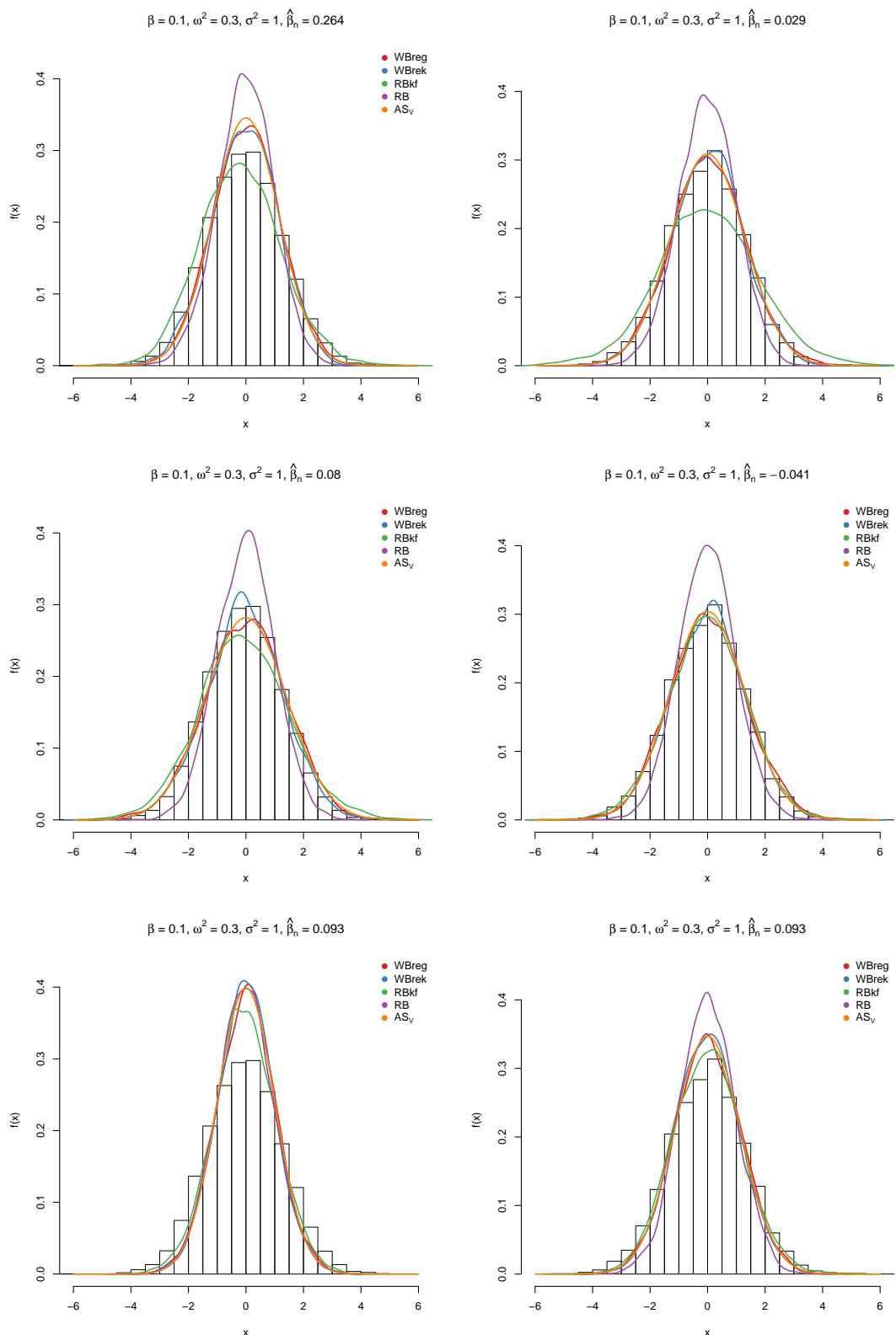
Obrázek 3.20: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů p3,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.



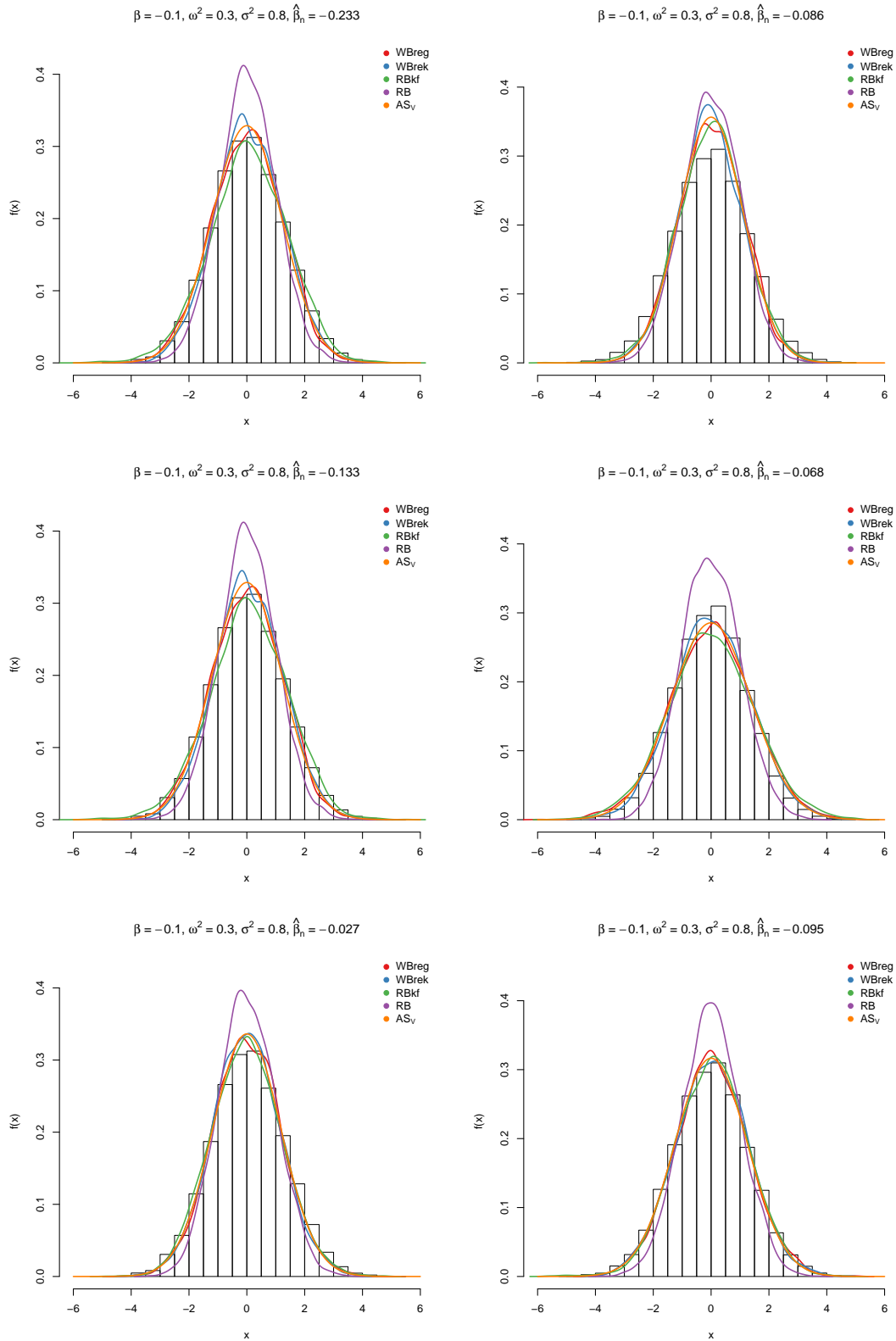
Obrázek 3.21: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p_4$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.



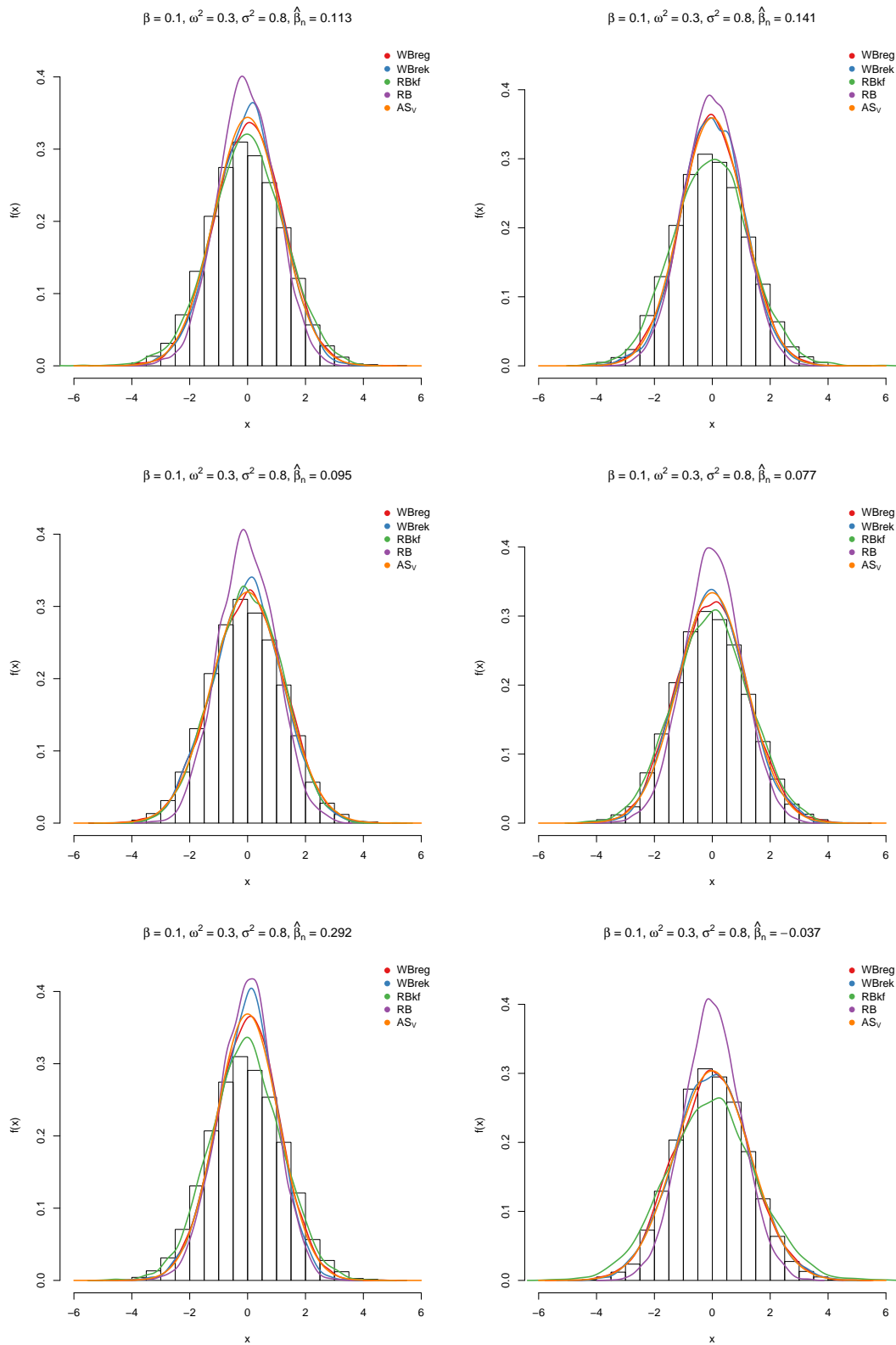
Obrázek 3.22: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p_5$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.



Obrázek 3.23: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p_6$ ,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.

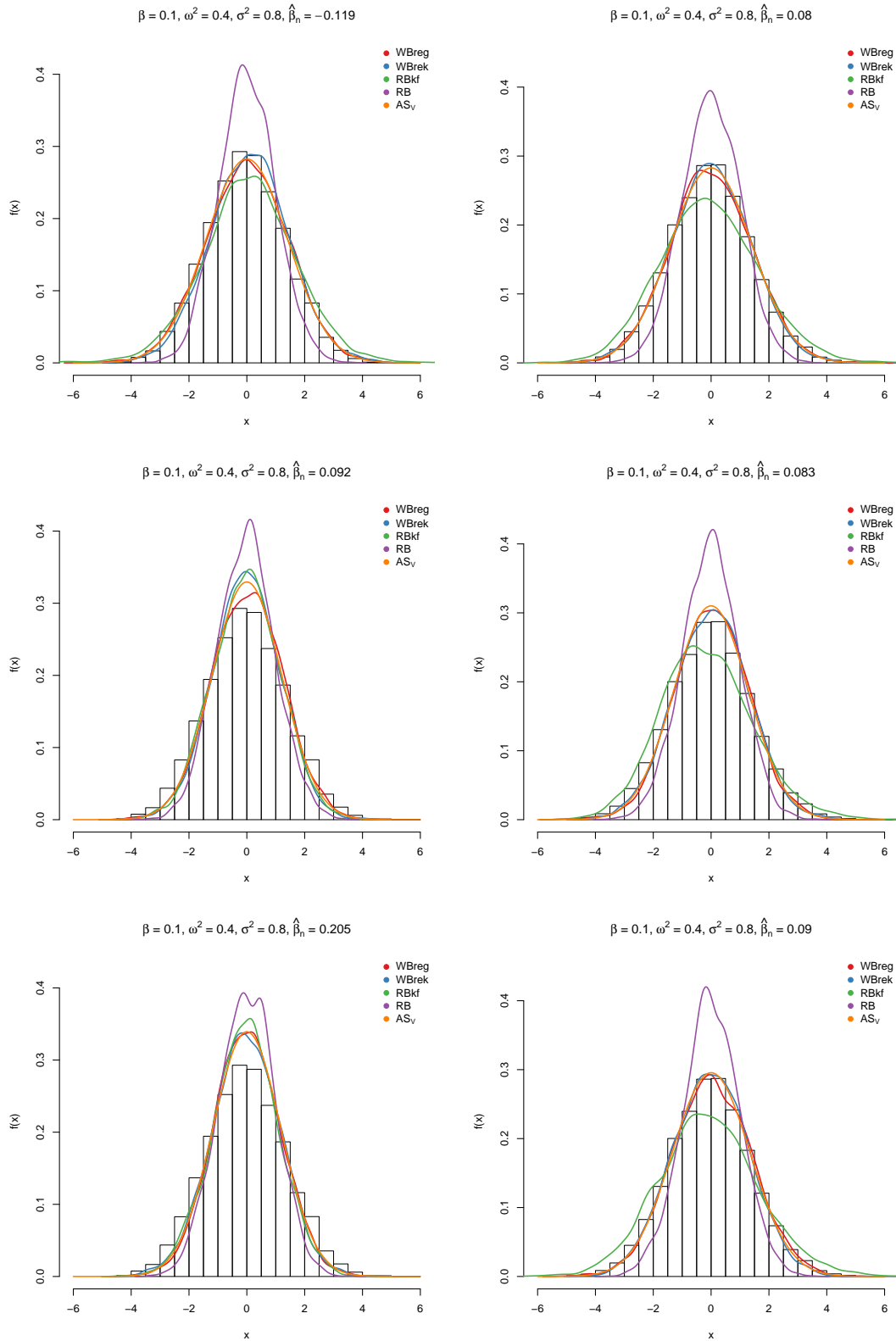


Obrázek 3.24: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p1$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.

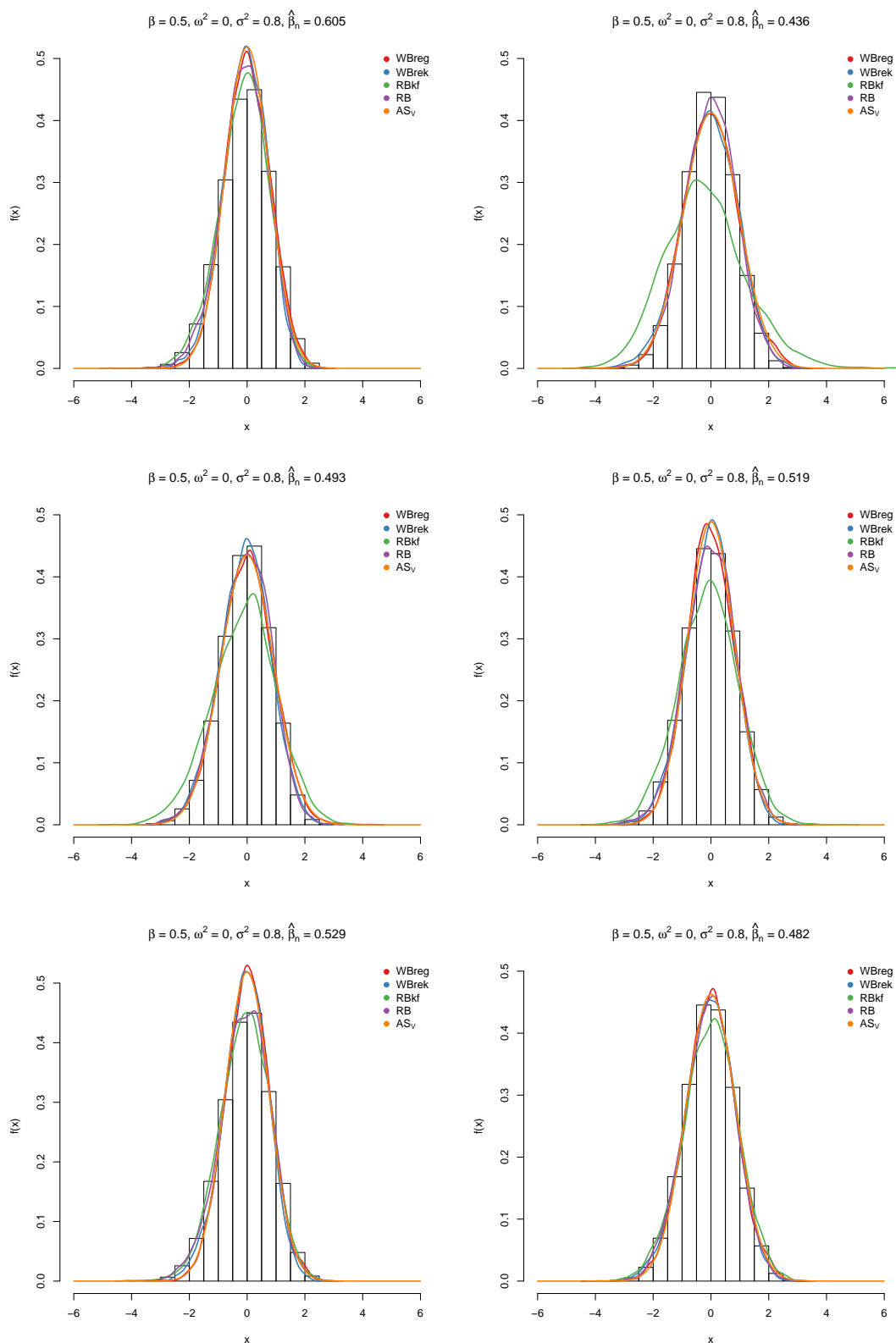


Obrázek 3.25: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p2$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.

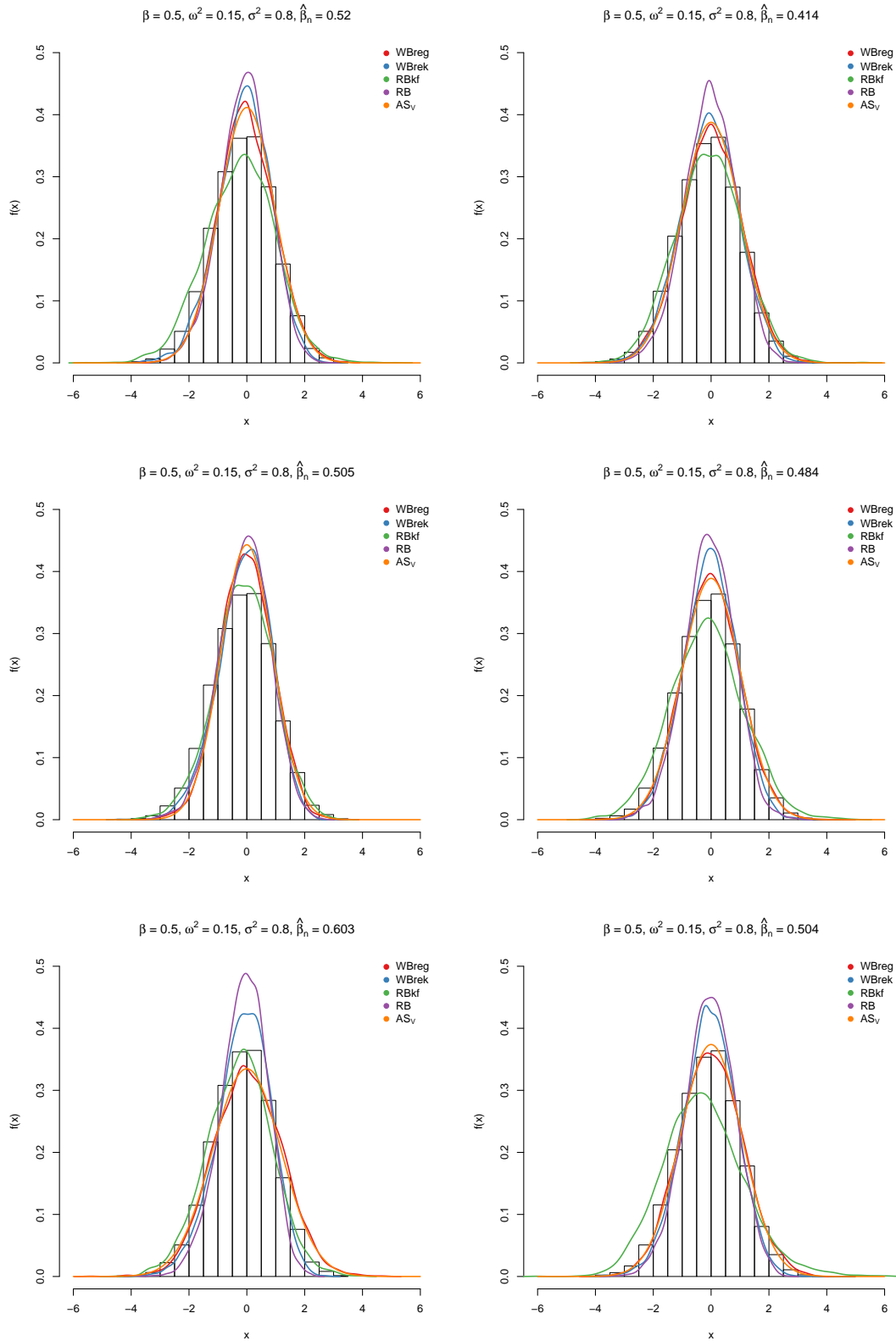




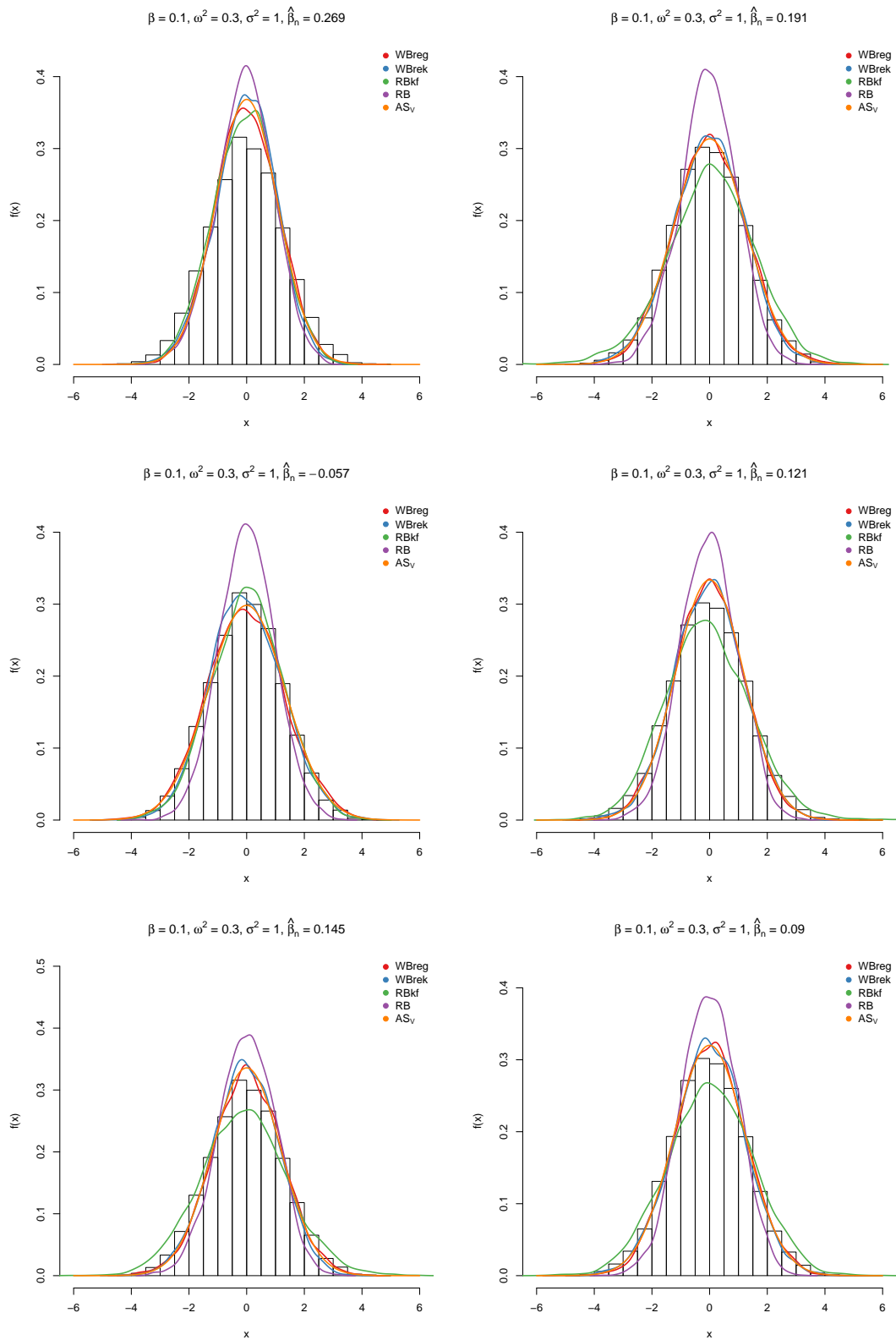
Obrázek 3.26: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p3$ ,  $B_t \sim \mathcal{R} \left( \left[ -\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2} \right] \right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.



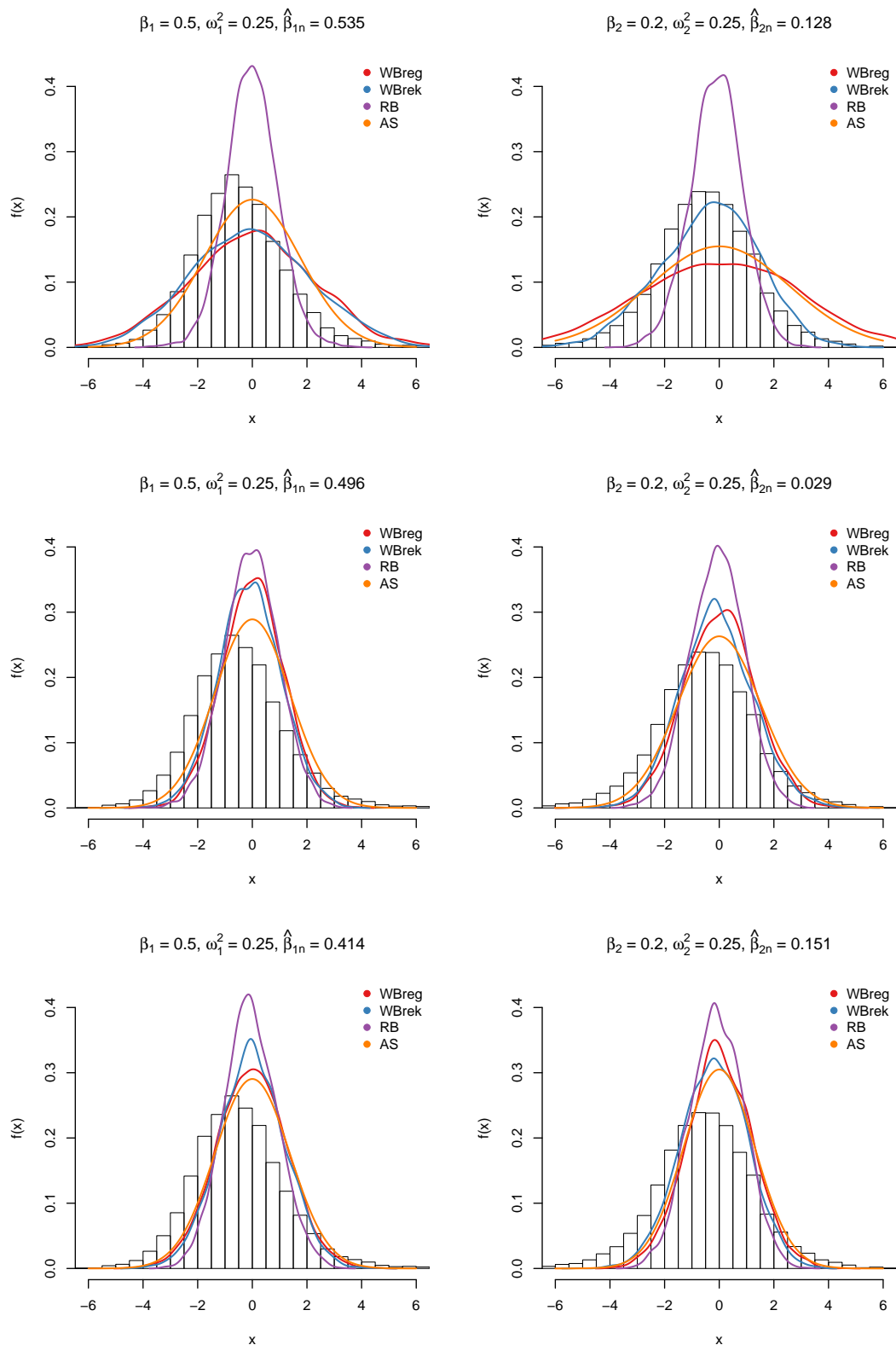
Obrázek 3.27: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p4$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.



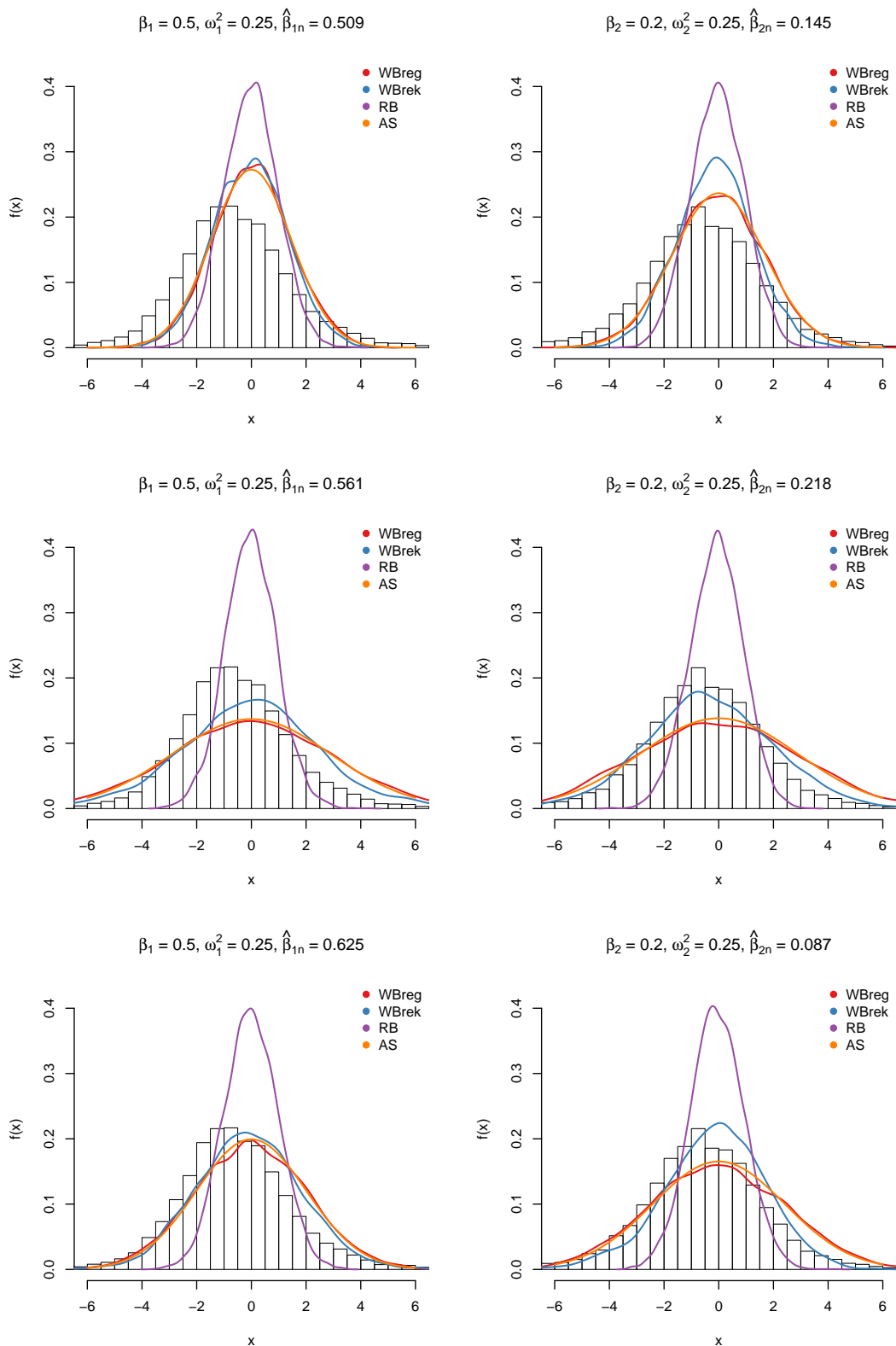
Obrázek 3.28: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p_5$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.



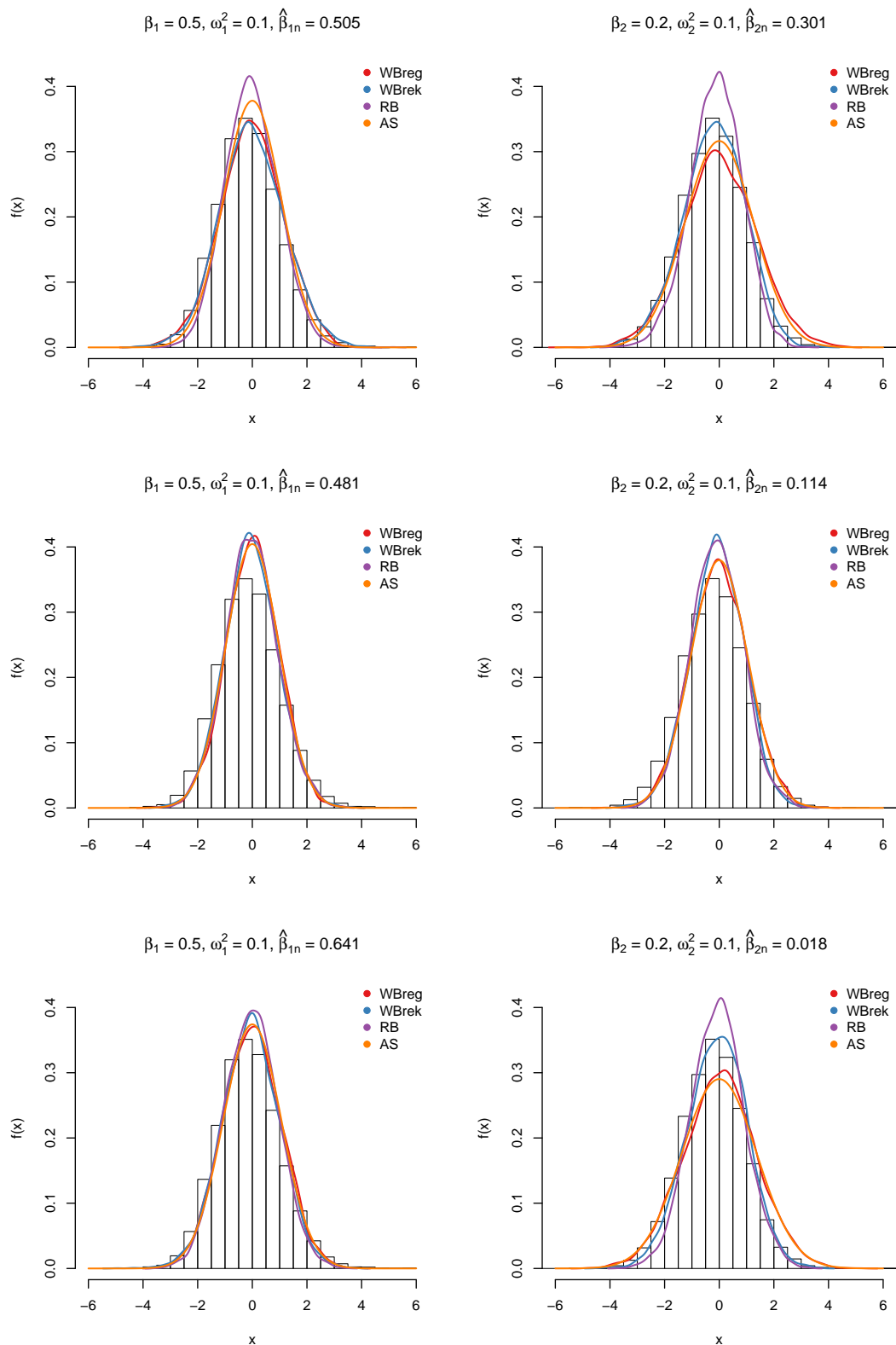
Obrázek 3.29: Aproximace rozdělení statistiky  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  pro proces  $RCA(1)$ , sada parametrů  $p_6$ ,  $B_t \sim \mathcal{R}\left(\left[-\sqrt{3\omega^2}, \sqrt{3\omega^2}\right]\right)$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Grafy vlevo zobrazují procesy o délce  $n = 200$ , vpravo  $n = 500$ . Počet bootstrapových opakování je 5000. Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad.



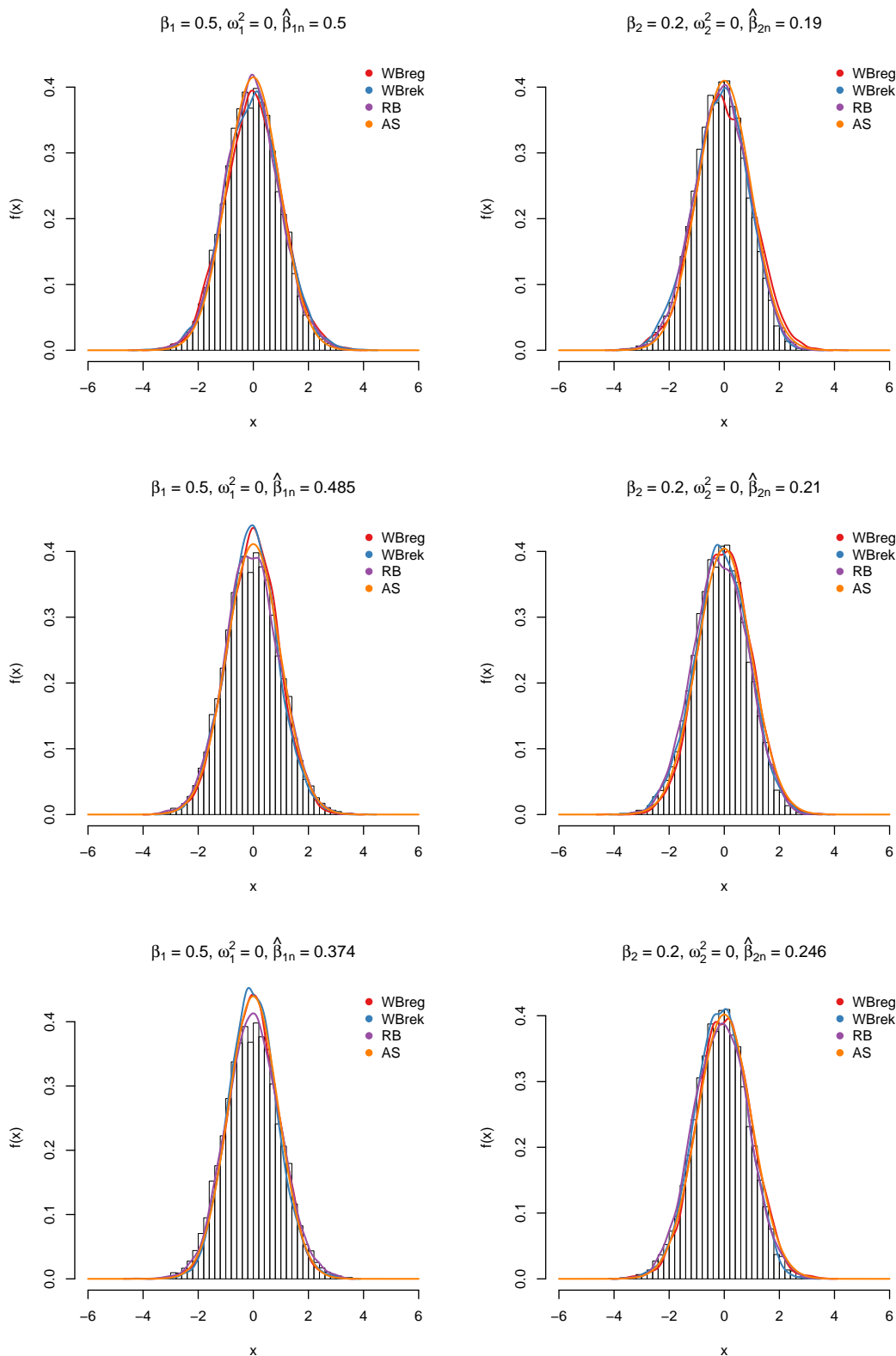
Obrázek 3.30: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p1$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



Obrázek 3.31: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p1$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.

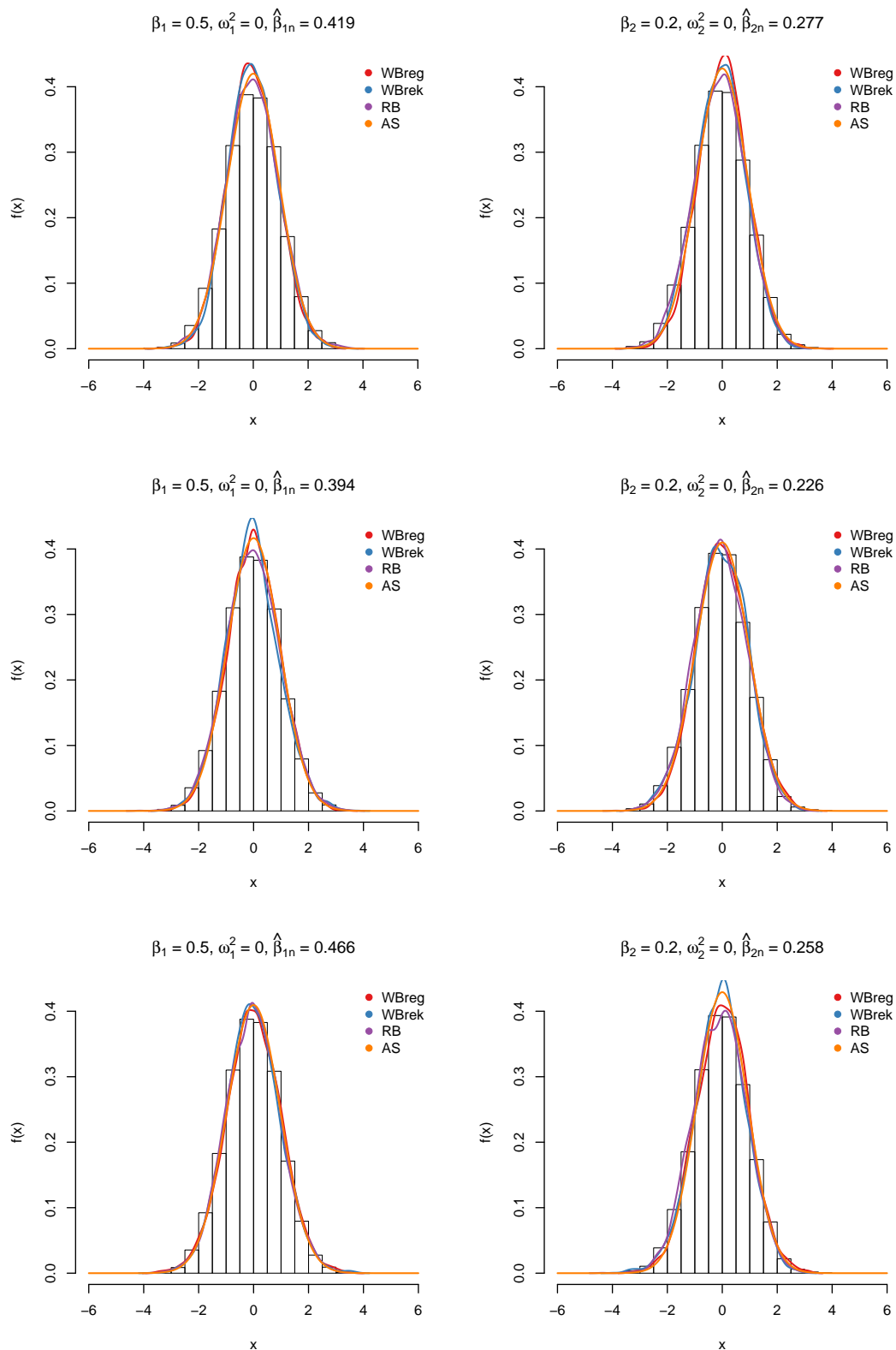


Obrázek 3.32: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p_2$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.

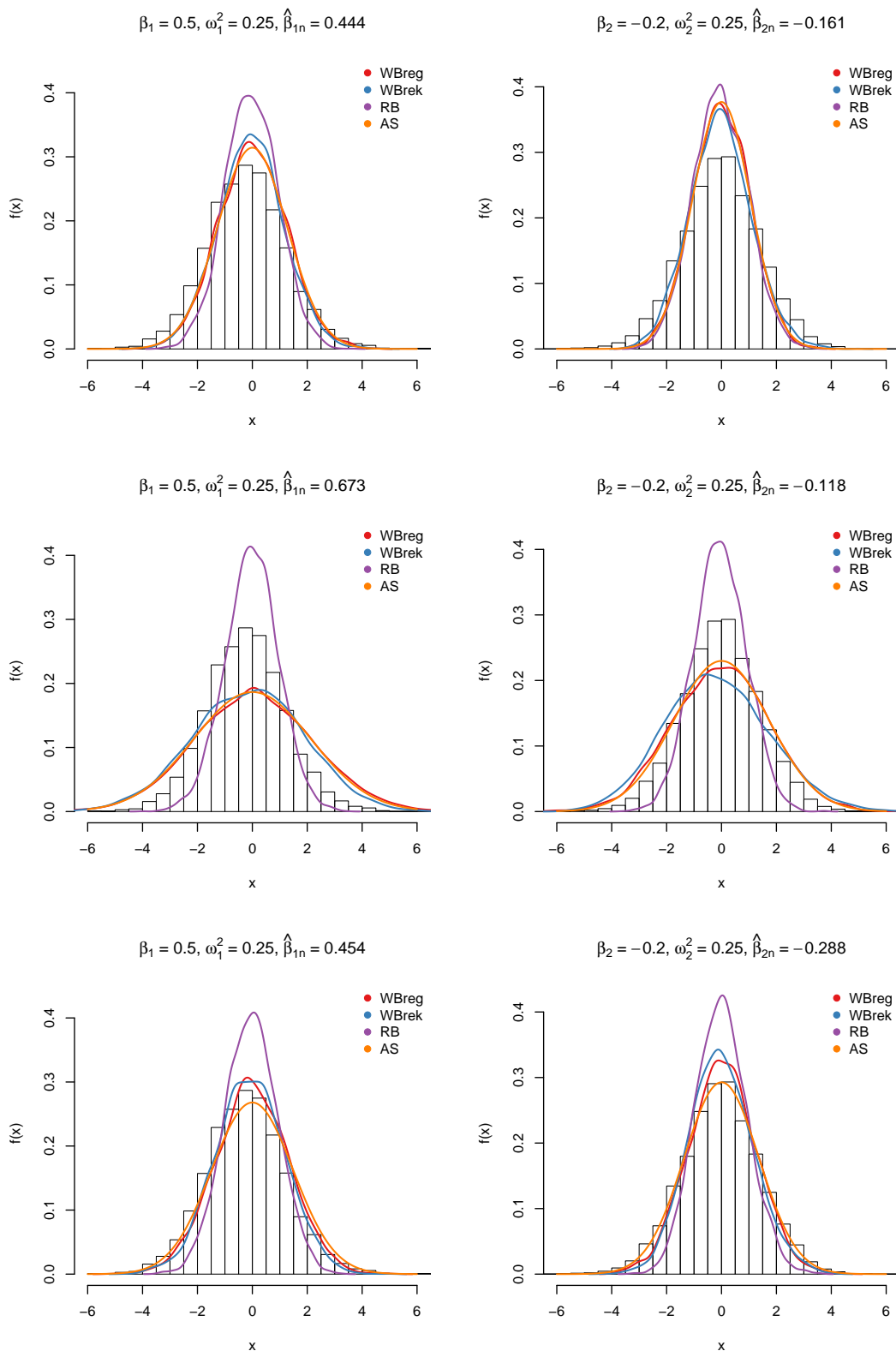


Obrázek 3.33: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p3$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.

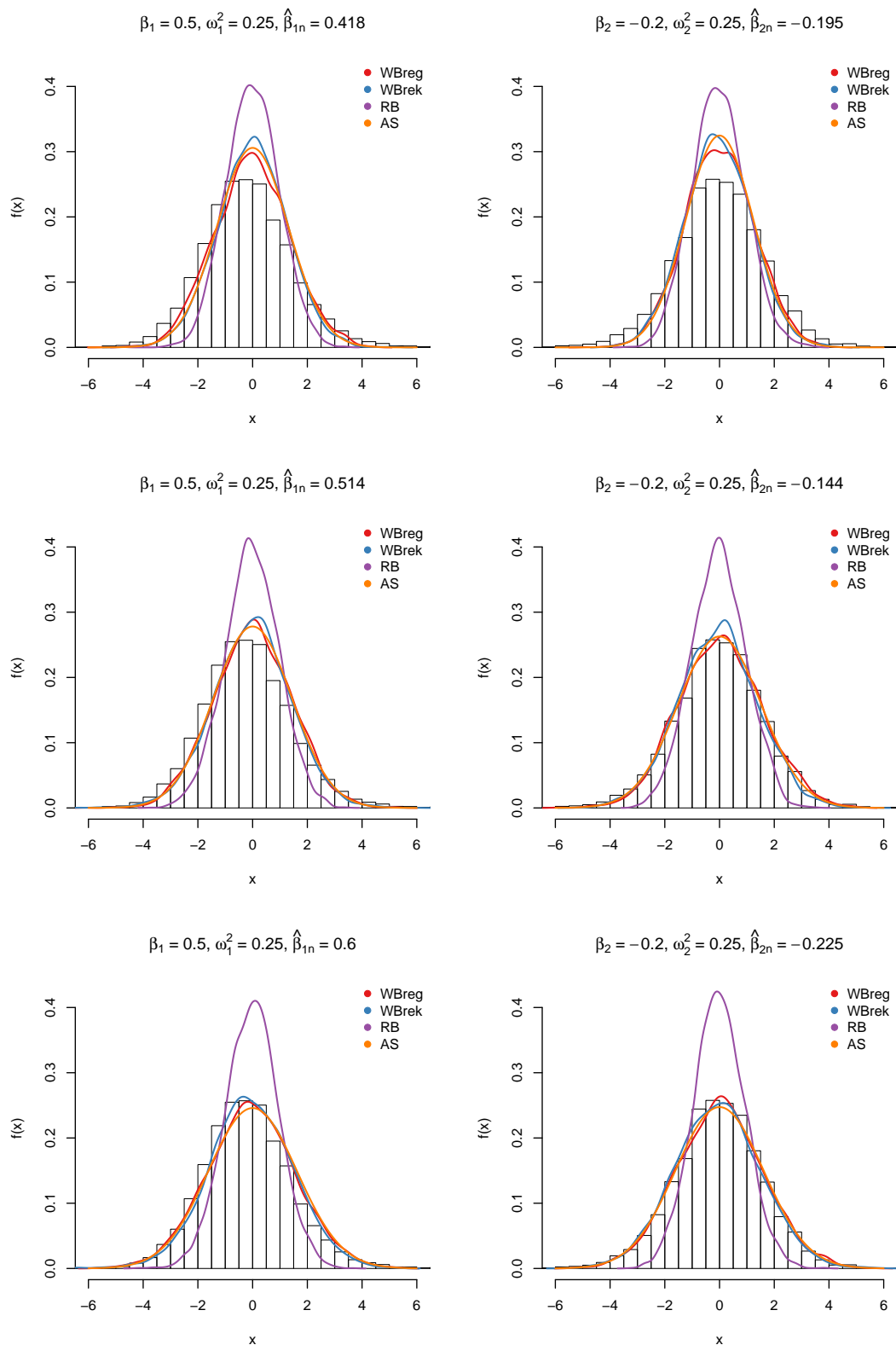




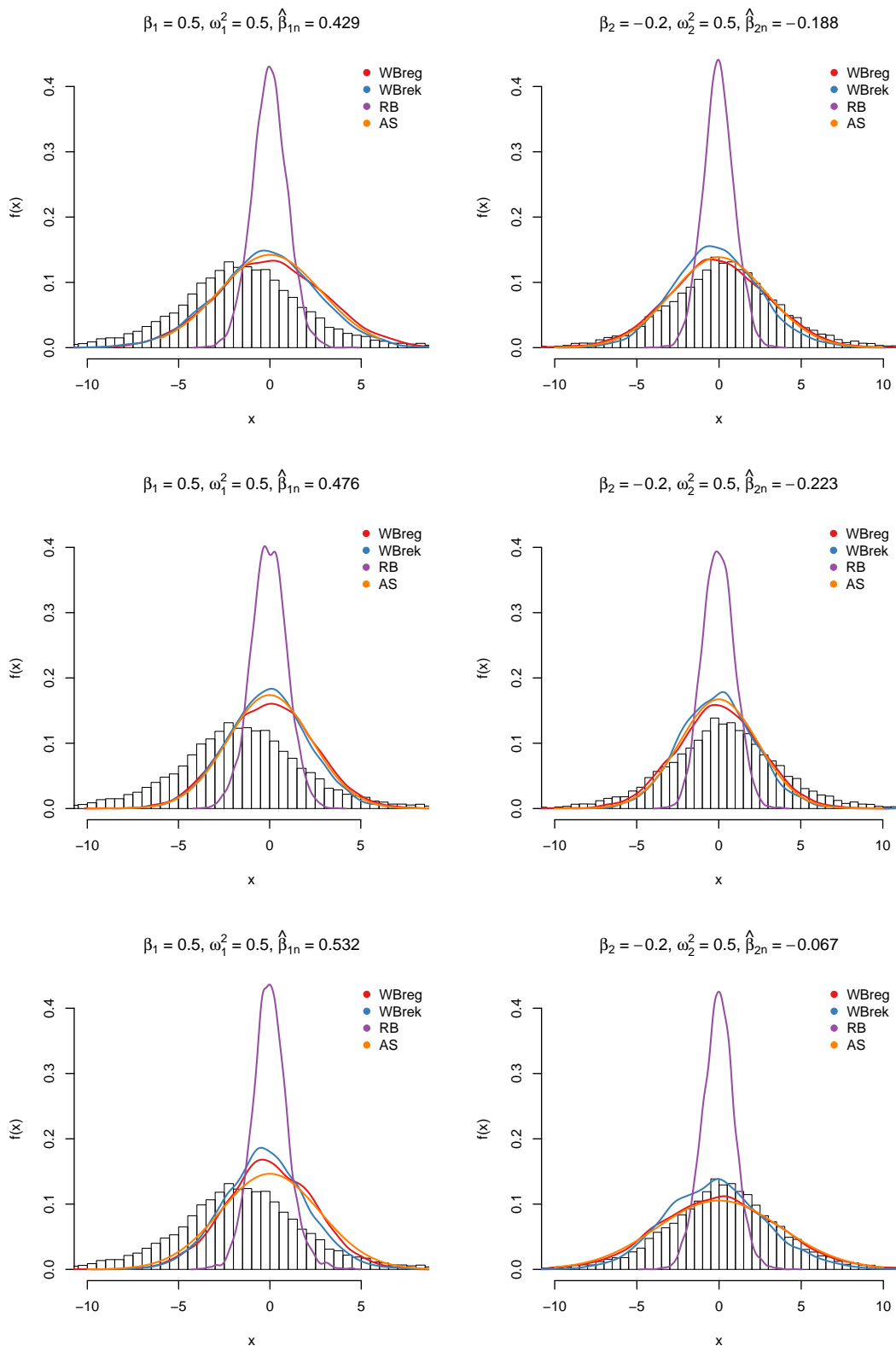
Obrázek 3.34: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p3$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



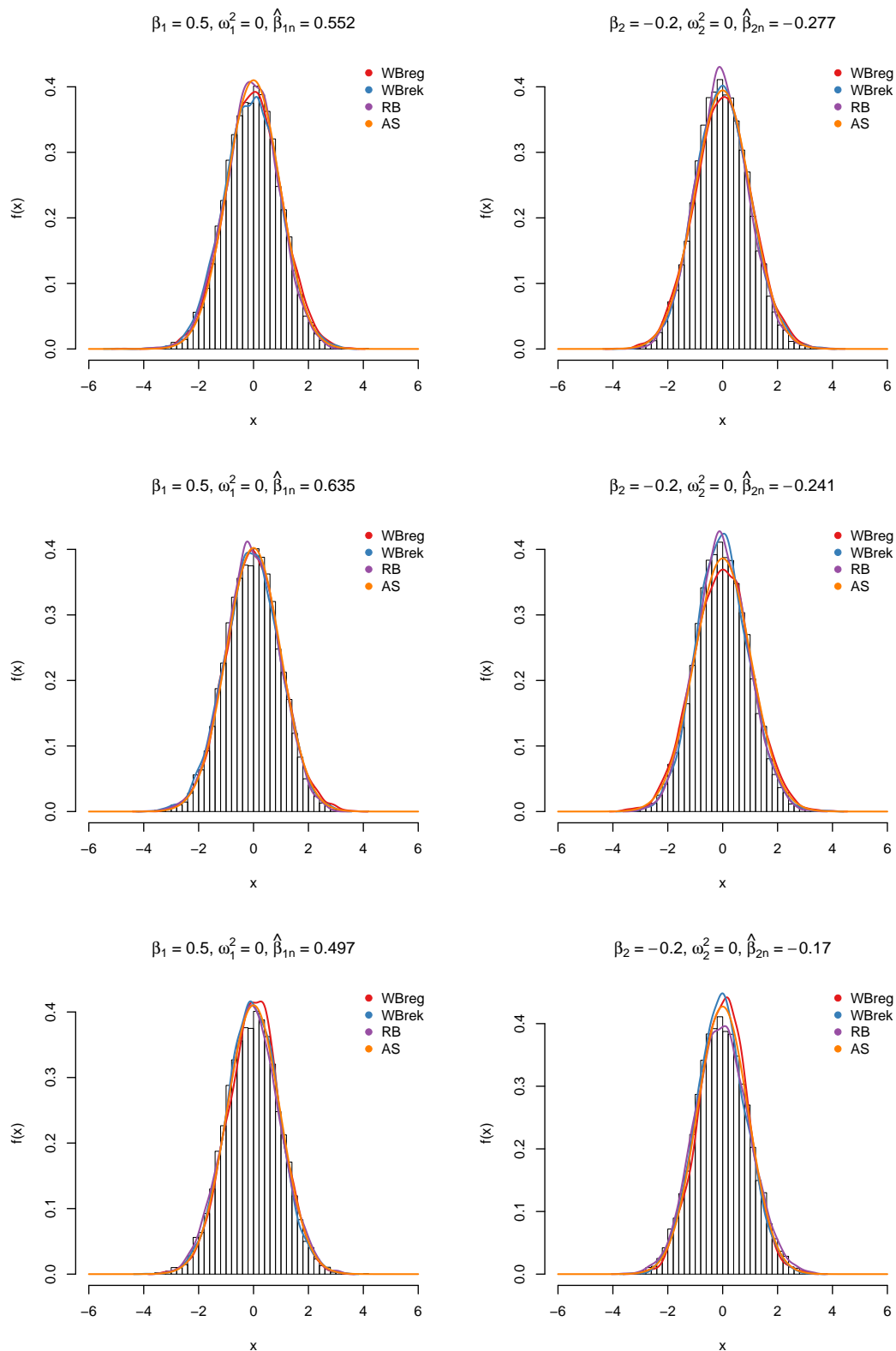
Obrázek 3.35: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p4$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



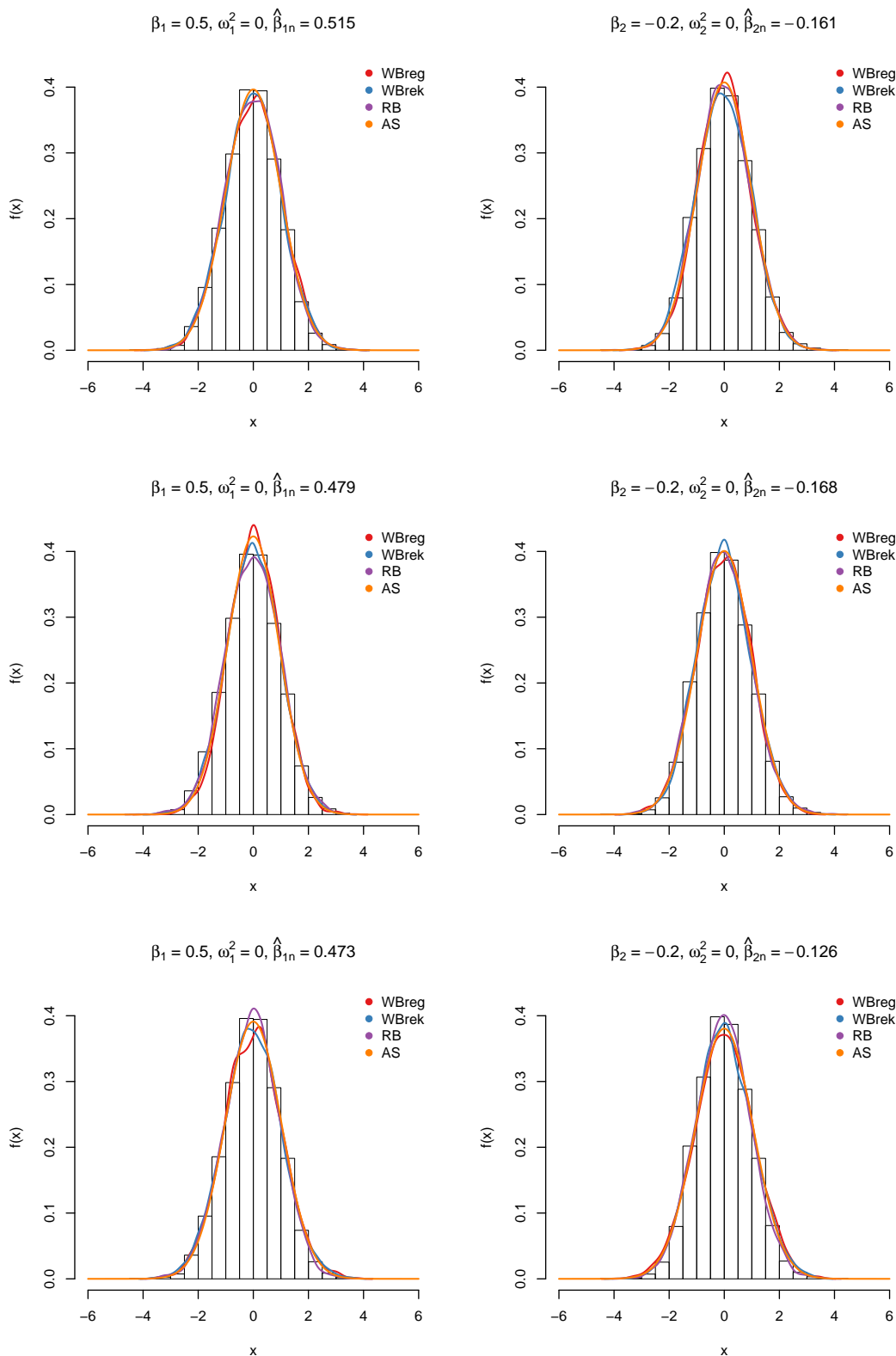
Obrázek 3.36: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p4$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



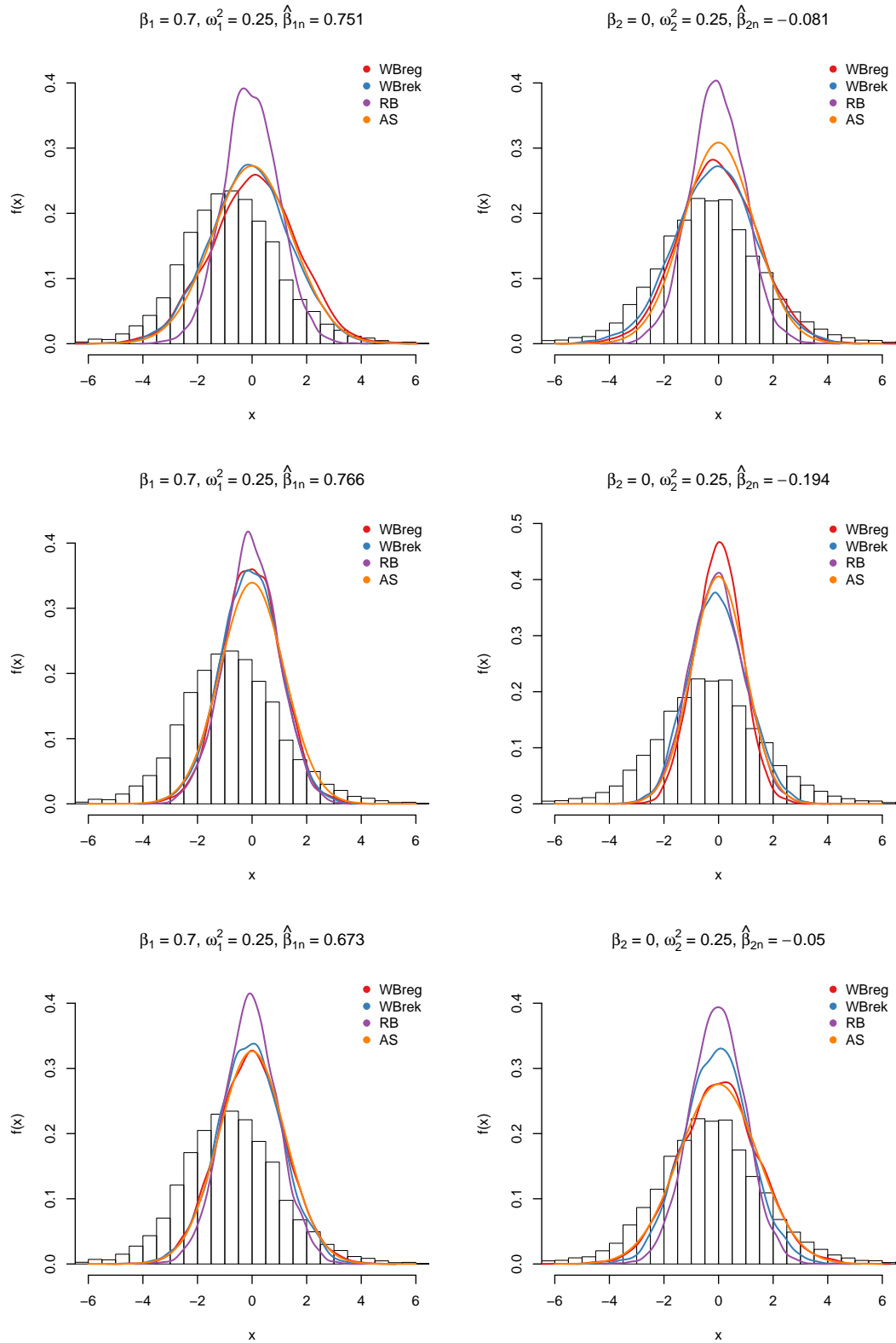
Obrázek 3.37: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p_5$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



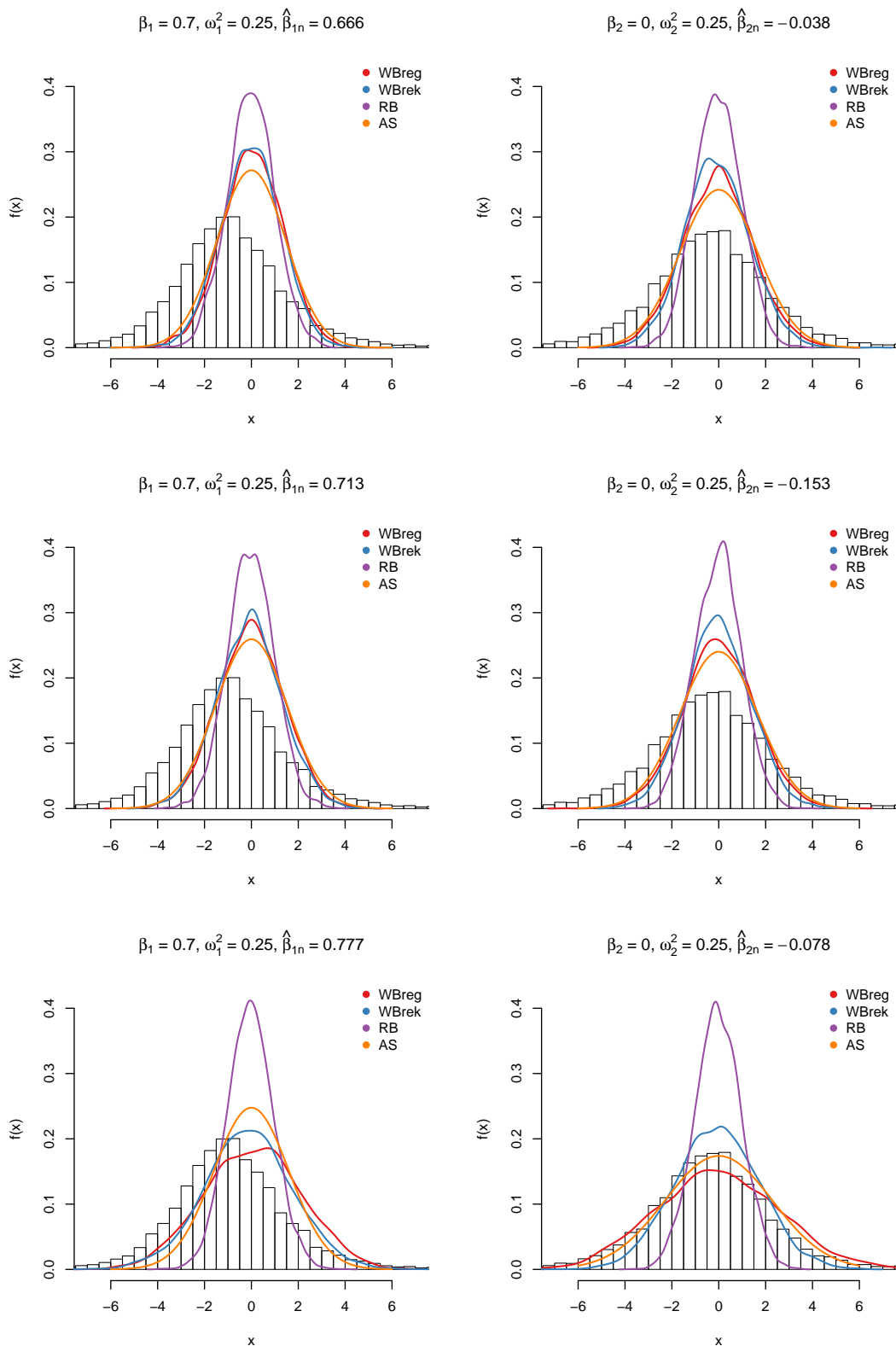
Obrázek 3.38: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p_6$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



Obrázek 3.39: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p6$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.

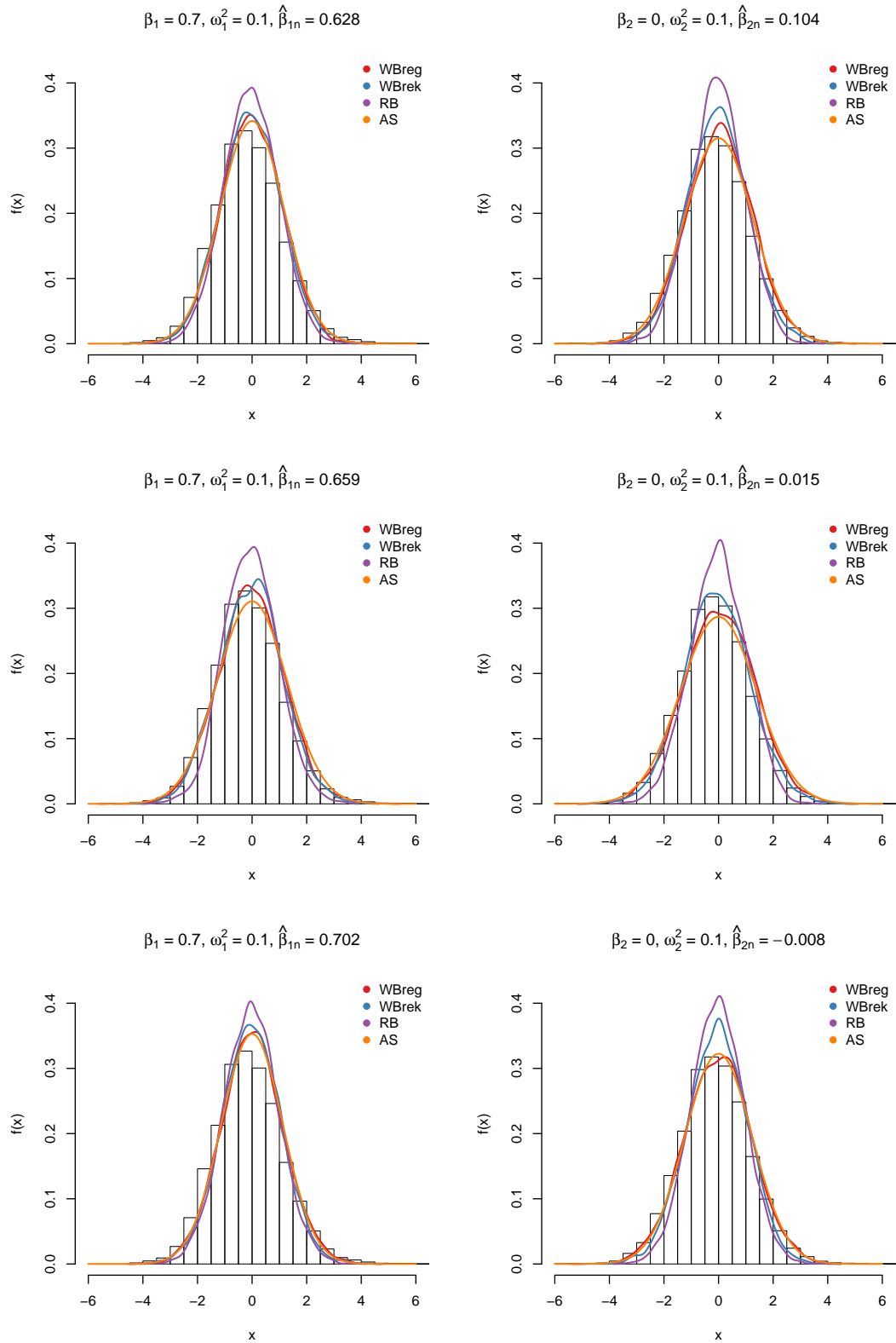


Obrázek 3.40: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p7,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.

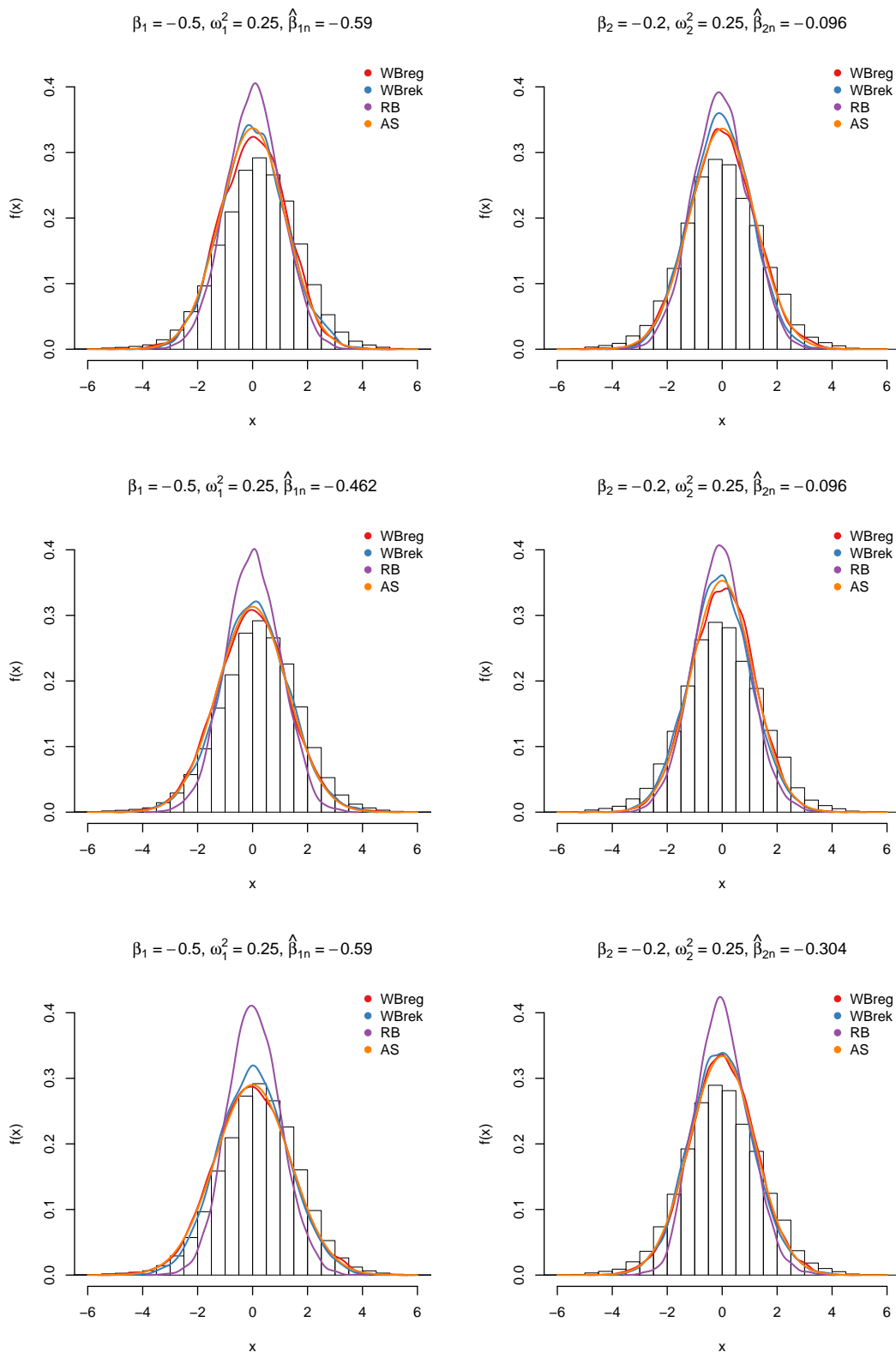


Obrázek 3.41: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p7,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.

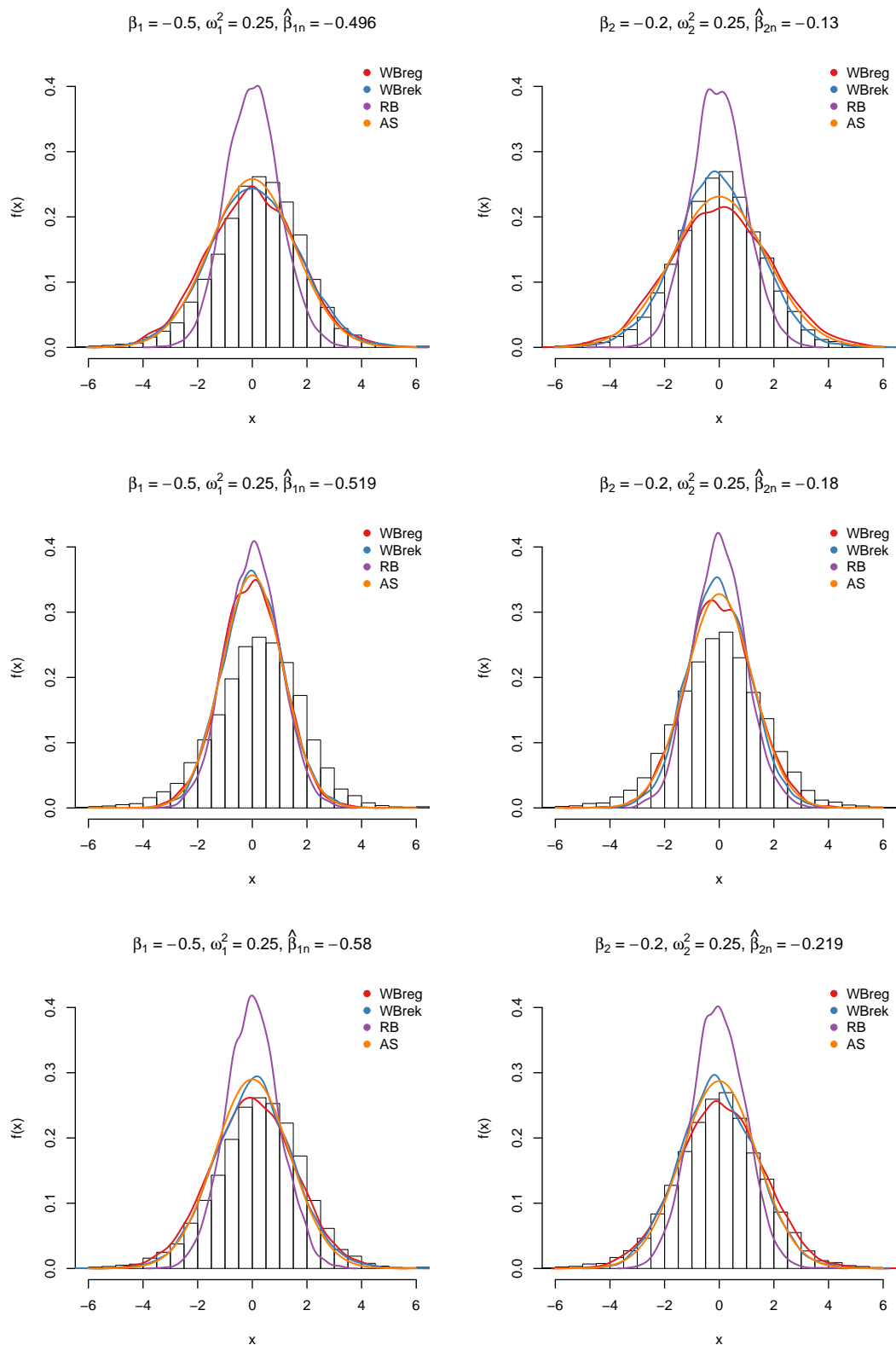




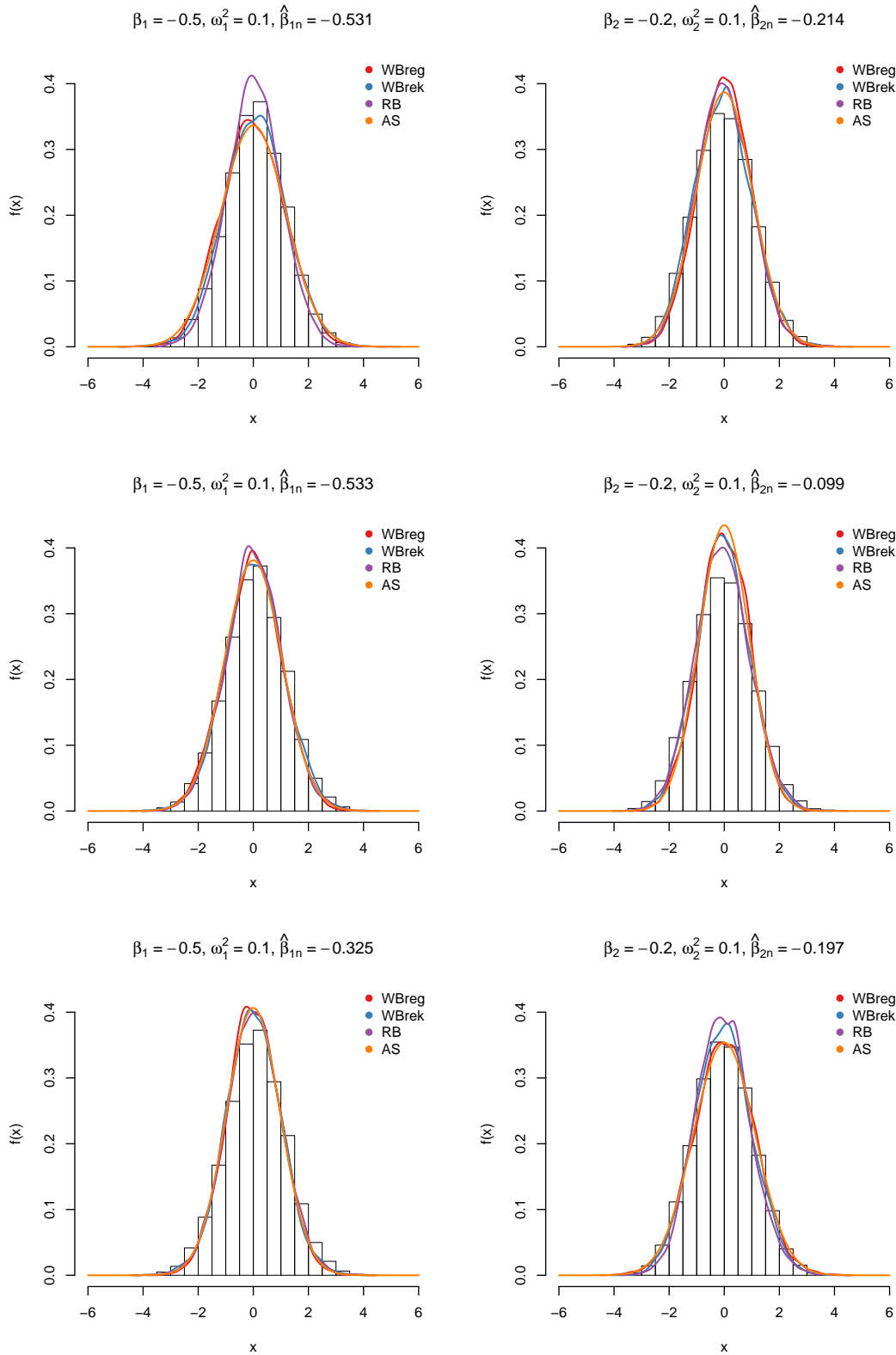
Obrázek 3.42: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p8,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



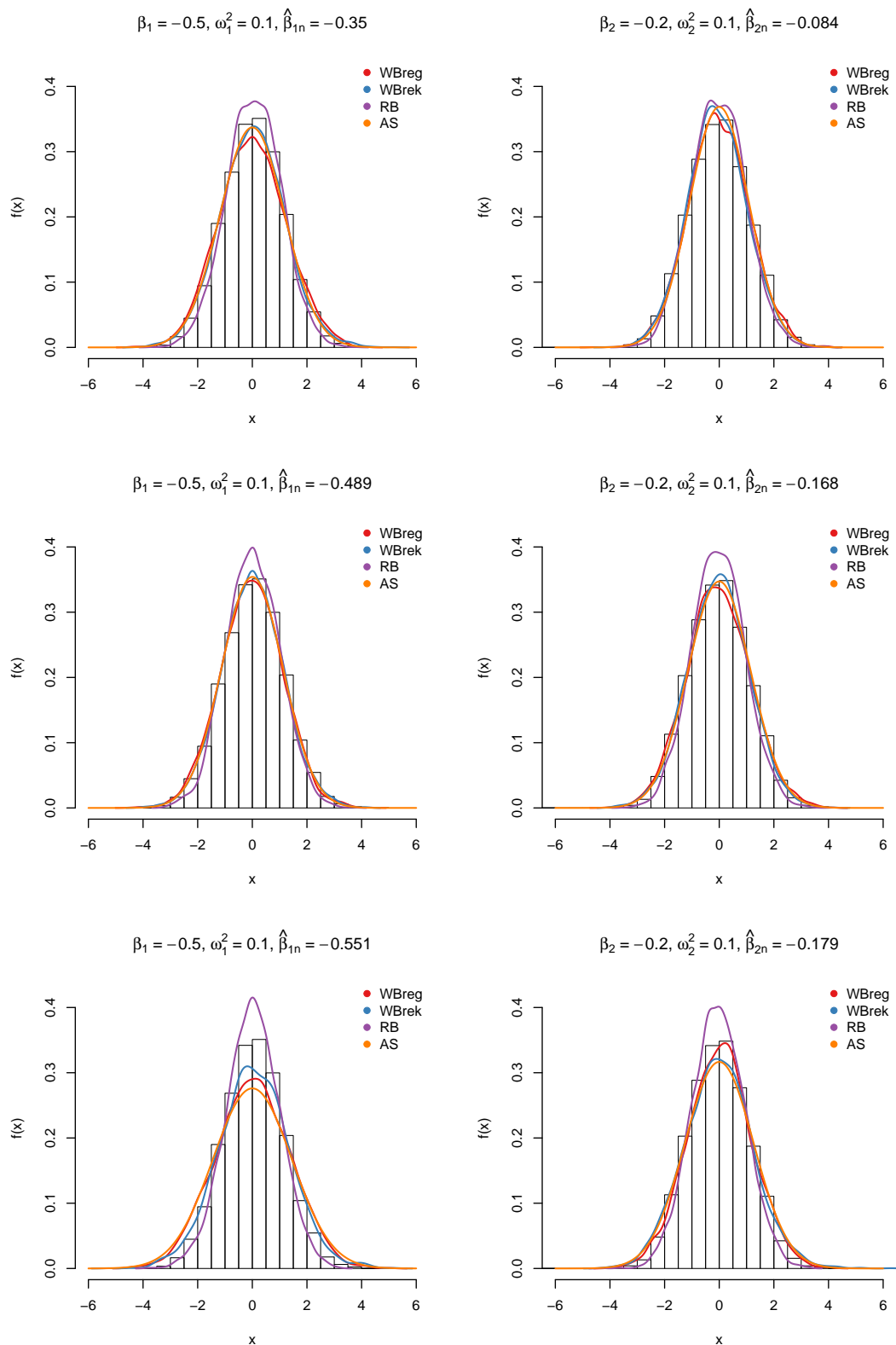
Obrázek 3.43: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p_9$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



Obrázek 3.44: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů p9,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



Obrázek 3.45: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p_{10}$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 200$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.



Obrázek 3.46: Aproximace rozdělení statistik  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1n} - \beta_1)$  (vlevo) a  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2n} - \beta_2)$  (vpravo) pro proces  $RCA(2)$ , sada parametrů  $p10$ ,  $B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \omega_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Počet bootstrapových opakování je 5000,  $n = 500$ . Histogram znázorňuje odhad rozdělení metodou Monte Carlo aplikované na 10 000 řad. Levý a pravý obrázek na jednom řádku jsou aproximace rozdělení statistik  $T_{1n}$  a  $T_{2n}$  spočtené na základě stejné časové řady.

