Posudek bakalářské práce
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Autor práce	Jan Soukup
Název práce	Parity vertex colorings
Rok odevzdání	2018
Studijní program	Informatika **Studijní obor** Obecná informatika

Autor posudku	RNDr. Petr Kučera, Ph.D. **Role** oponent
Pracoviště	Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Text posudku:

Práce se věnuje problému paritního barvení vrcholů grafu. Barvení vrcholů grafu je paritní, pokud na každé cestě existuje barva s lichým počtem výskytů. Paritní chromatické číslo grafu je pak minimální počet barev potřebný k paritnímu obarvení vrcholů. Práce je členěná do čtyř sekcí. První sekce se věnuje teoretickým vlastnostem paritního barvení. Druhá sekce se věnuje složitosti paritního barvení a algoritmům pro určení paritního chromatického čísla „hrubou silou“. Ve třetí sekci je popsán algoritmus pro určení paritního chromatického čísla, který je parametrizovaný stromovou šířkou grafu. Čtvrtá sekce se pak věnuje souvislosti paritního barvení vrcholů s jinými typy barvení (conflict free, unique maximum). Hlavní výsledky práce jsou v prvních třech sekcích.

1. Teoretické výsledky, kam patří horní a dolní odhady paritního chromatického čísla pro některé grafy, zejména stromy. Student zlepšil některé odhady a některé ukázal nově (například dolní odhad pro obecné binární stromy).

2. Ve druhé sekci je ukázáno, že ověření toho, zda dané obarvení grafu je paritní, je co-NP úplný problém. Dále je zde popsán heuristický algoritmus pro nalezení paritního obarvení daného grafu, který pracuje v čase $O(n^k \cdot n^{O(1)} \cdot 2^n)$, kde n označuje počet vrcholů grafu a k označuje počet barev, které jsou k dispozici.

3. Ve druhé sekci je dále popsán algoritmus pro stromy, který je exponenciální v k (počtu barev) ale polynomiální ve velikosti stromu.

4. Ve třetí sekci je ukázáno, že určení paritního chromatického čísla grafu je řešitelné parametrizovaným algoritmem, uvažujeme-li jako parametr stromovou šířku grafu. Nejprve je k důkazu použito Courcelleho věty, poté jsou explicitně popsány algoritmy pro ověření toho, zda dané obarvení je paritní a pro nalezení paritního obarvení grafu.

Výsledky obsažené v práci jsou netriviální. Práce je dobře strukturovaná a psaná dobrou angličtinou, veškeré zdroje jsou dobře citovány a z textu je vždy patrné, které výsledky jsou autora práce a které jsou převzaté z literatury. Celkově tedy hodnotím práci pozitivně a doporučuji ji k obhajobě.

Mám však také pár poznámek k výsledkům v práci a k některým použitým formulacím.

- Na začátku sekce 2 autor slibuje, že ukáže těžkost určení paritního chromatického čísla grafu. Ve skutečnosti však věta 20 ukazuje, že ověření toho, zda dané obarvení je paritní, je co-NP úplný problém. Obecně se nedá říci, že z těžkosti ověření certifikátu plyne těžkost nalezení nějakého certifikátu, přesněji, z věty 20 neplyne přímo, že určení paritního chromatického čísla grafu je těžké.
- V sekci 2.3.1 je popsán algoritmus pro ověření toho, zda dané obarvení stromu je paritní obarvení. Algoritmus pracuje v čase $O(n^{O(1)} \cdot 2^{O(k)})$, kde n je počet vrcholů stromu a k je počet barev v zadaném obarvení. Uvážíme-li však, že celkový počet cest ve stromě je $O(n^2)$ a ověření toho, zda dané obarvení je na dané cestě paritní lze provést v polynomiálním čase, nabízí se triviální algoritmus pro tento problém, jehož složitost je polynomiální v n i k. Z dalšího textu je patrné, že autor navrhoval algoritmus s ohledem na další použití v algoritmech parametrizovaných stromovou šířkou, přesto si myslím, že ten triviální algoritmus v textu zmíněn být měl. V souvislosti s tím se nabízí otázka, zda algoritmus popsaný v sekci 2.3.2 pro určení paritního chromatického čísla stromu by bylo lze zlepšit na pouze jednoduše exponenciální v k (případně zda tato úloha není rovněž řešitelná v polynomiálním čase). Položil bych zde otázku, co je známo o složitosti dalších druhů obarvení (unique maximum, conflict free) na stromech.

K práci mám i konkrétnější připomínky, jež přikládám jako přílohu posudku.

Práci doporučuji k obhajobě.

V Praze dne 13. června 2018

Podpis:

Konkrétnější připomínky

- Strana 2, „Our work“, řádek 6, značení „B_d“ — dodal bych, že d označuje hloubku stromu.
- Strana 4, Definition 2, věta „standard plus operation adding two elements of $\{0, 1\}^k$.“ — doporučil bych upřesnit, že jde o „bitwise XOR“.
- Strana 6, důkaz lemmatu 1, druhý odstavec, 3. řádka, „having length $1, 2, \ldots, n$, respectively“. — Buď jde o počet vrcholů $1, \ldots, n$ nebo délky $0, \ldots, n-1$, jako délka se uvažuje jinde v textu počet hran.
- Strana 7, věta před zněním lemmatu 4 „denote“ $\rightarrow$ „denotes“.
- Strana 7, poslední odstavec, řádky 2 a 3. „a leaf that has different colour“ $\rightarrow$ „a leaf that has a different colour“.
- Strana 10, nadpis sekce 1.3. „New sharp bound“ — pojmem „sharp bound“ se často označuje fakt, že odhad je těsný, zde ovšem pojmem „sharp bound“ autor myslí to, že jde o ostrou nerovnost („sharp inequality“). To je trochu zavádějící.
- Strana 11, Definice 10, řádek 2/3. „complete binary tree attached to each vertex of this branch“ — mělo by být upřesněno, že jde o připojení přidanou hranou, z příkladu je to patrné, mělo by to být i v definici.
- Strana 11, značení $num(F)$. — Toto značení není konzistentní. Používá se s malým n (například příklad 1b i jinde) i velkým N (v definici 10, v lemmatu 11).
- Strana 13, poslední řádek. „by Claim 15 and 14“ $\rightarrow$ „by claims 15 and 14“.
- Strana 13, poslední řádek. „we use the Lemma 16“ $\rightarrow$ „we use Lemma 16“.
- Strana 14, důkaz lemmatu 18, první věta. „In case $l = d$ it easily follows from Claim 15.“ — Až na případ $l = d = 0$, tento případ by ovšem bylo nejlépe vyloučit nebo probrat zvlášť, aby se autor vyhnul 0^0.
- Strana 16, důkaz lemmatu 19. — Barvy 4 až 15 se vyskytují v obarvení právě jednou, tedy každá cesta, která je obsahuje, má automaticky barvu s lichou paritou. Důkaz by tedy šlo zjednodušit tak, že by k obrázku 1.4 byl přidán obrázek s grafem po odstranění vrcholů s barvami 4 až 15. Graf se tak rozpadne na několik malých komponent souvislosti, na kterých by jistě bylo snadné nahlédnout, že obarvení je paritní na zbylých cestách.
- Strana 20, věta nad algoritmem 1. „We give a pseudocode of this algorithm.“ — Bylo by vhodné přidat odkaz na algoritmus 1.
- Strana 21, třetí odstavec. — Algoritmus je založen na „backtracking“, což by bylo vhodné zmínit.

- Strana 21, věta nad větou 23. „We give a simple pseudocode describing this colouring process.“ — Je třeba přidat odkaz na algoritmus 2, který se formátováním ocitl až na další straně.
- Strana 21, důkaz věty 23, 5. řádek. „algortihm“ → „algorithm“
- Strana 21, poslední věta. „For 13 colours the running time was to high.“ — „to“ → „too“. Navíc by bylo vhodné přidat alespoň krátkou větu, co znamená „too high“. (Například „two days computation on a lab computer“.)
- Strana 30, věta 29. Bylo by vhodné zde zmínit, že kromě tohoto výsledku jsou k dispozici i aproximační algoritmy pro stromovou šířku a heuristické algoritmy. Věta 29 je z teoretického hlediska podstatná, nicméně funkce $k^{O(k^3)}$ ji činí obtížně použitelnou pro praktické účely.
- Strana 32, věta před vzorcem definujícím $Partition$. „bellow“ → „below“.
- Strana 33, druhý odstavec. „The formula $Path(X)$ expresses that vertices of X form a path of at least 2 vertices.“ Ve vzorci definujícím $Path(X)$ není vyloučen případ, kdy $x_1 = x_2$. Tedy i situace s jedním vrcholem na cestě by byla přípustná. Je potřeba přidat explicitně podmínku $x_1 \neq x_2$.
- Strana 37, druhý řádek definice 26. „exits“ → „exists“.
- Strana 39, první řádek popisu „Join node“. „two son“ → „two sons“. Doporučil bych spíš používat „child nodes“.
- Strana 41, třetí řádek. „of length least 1“ → „of length at least 1“.
- Strana 41, příklad 2. Příklad je trochu matoucí tím, že v definici 28 se předpokládá uspořádání na vrcholech a vypadá to, že to pořadí je dané pořadím výčtu vrcholů v A. Zde je ovšem jako poslední vrchol použito b, které je ve výčtu jako druhé. Pokud není řečeno, jaké pořadí mají vrcholy v A, nelze ověřit, jestli je A splittable podle definice 28.
- Strana 42, druhý řádek. „to the the endvertex“ → „to the endvertex“.
- Strana 42, důkaz lemmatu 37, 5. řádek. „we can in similar fashion“ → „we can in a similar fashion“.
- Strana 42, odstavec pod důkazem lemmatu 37, druhý řádek. „two set of paths“ → „two sets of paths“.